تعريف: لتكن f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$.

نقول بأن f قابلة للتكامل على $[a,b]$

إذا كانت:

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,w) = (A) \text{ عدد ثابت}$$

مهما كان اختيار عناصر العينة w من بين عناصر الفترات الجزئية لهذه التجزئة.

وعندئذٍ نرمز لقيمة هذا التكامل بالرمز:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{أو} \quad \int_a^b f$$

مثال: لتكن f دالة ثابتة على $[a,b]$ ومعرفة

بـ: $f(x) = c$ لكل $x \in [a,b]$ حيث c عدد ثابت.

بيّن أن f قابلة للتكامل على $[a,b]$ وأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

الحل: لتكن $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيء للفترة $[a,b]$ ولتكن $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

عينة من عناصر الفترات الجزئية لهذا التجزئ
بحيث أنه :

$w_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$:

فيكون

$$S(f, P, w) = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C\,\Delta x_k$$

$$= C \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$= C\,[\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n]$$

هذا عبارة عن طول
الفترة $[a, b]$
$\equiv b - a$

$$= C\,(b-a)$$

$$\therefore \lim_{\|P\| \to 0} S(f, P, w) = \lim_{\|P\| \to 0} C\,(b-a)$$

$$= C\,(b-a)$$

لأنه مقدار ثابت

نستنتج من ذلك أن f قابلة للتكامل على $[a,b]$

وأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

وبناء على نتيجة هذا المثال فإن:

1. $$\int_1^8 5\,dx = 5(8-1) = 35$$

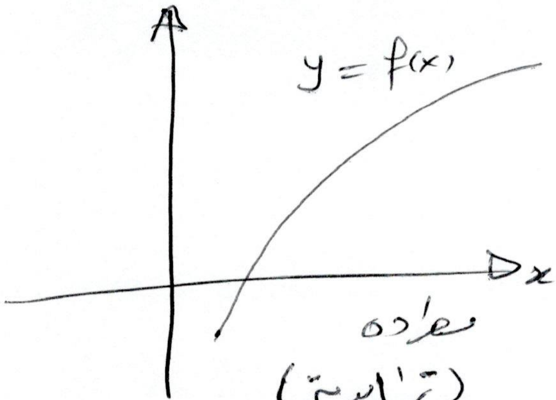
2. $$\int_0^2 \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}(2-0) = 2\sqrt{3}$$

3. $$\int_0^6 -\frac{\pi}{2}\,dx = -\frac{\pi}{2}(6-0) = -3\pi.$$

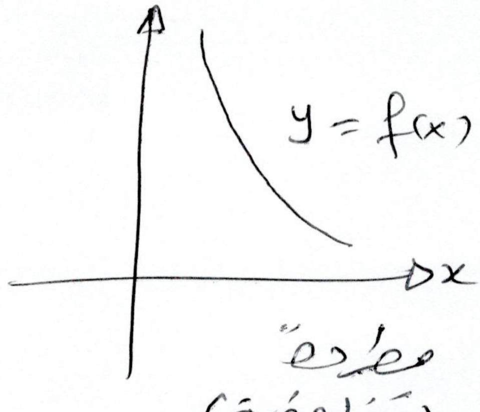
هناك فئات من الدوال معلوم أنها قابلة للتكامل، مثل:

① اذا كانت f مطردة على $[a,b]$، فإن f قابلة للتكامل على $[a,b]$.

(مطردة تعني أن الدالة إما تزايدية أو تناقصية)



مطردة (تزايدية)



مطردة (تناقصية)

② إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ ، فهي قابلة للتكامل على $[a,b]$.

③ إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ عدا عند عدد محدد (منتهٍ) من النقاط في هذه الفترة ، فإن f قابلة للتكامل على $[a,b]$.

ملاحظة: إذا علمنا أن الدالة قابلة للتكامل على فترة ما ، فلحساب قيمة هذا التكامل باستخدام التعريف ، لا داعي لاستخدام تجزئ عام ، بل نكتفي بأخذ تجزئ نوني منتظم .

مثال: باستخدام تعريف (مجموع ريمان) احسب قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^{3}(3x^2-2x+1)\,dx$$

الحل: هنا $f(x)=3x^2-2x+1$

و

$$[a,b]=[-1,3]$$

الدالة f كثيرة حدود لذلك فهي متصلة على $[-1,3]$، إذن قابلة للتكامل على هذه الفترة.

ولحساب هذا التكامل، نفرض أن

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$$

تجزيء منتظم للفترة $[-1,3]$، إذن

$$\Delta x_k=\frac{b-a}{n}=\frac{3+1}{n}=\frac{4}{n}$$

$$\Longrightarrow x_k=a+k(\Delta x_k)\ ,\ k=0,1,\dots,n$$

$$=-1+k\left(\frac{4}{n}\right)=-1+\frac{4k}{n}$$

ونأخذ $w_k=x_k$ ، لكل $k=1,2,\dots,n$

نجد أن

$$S(f,P,w)=\sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{4k}{n}\right)$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[3\left(-1+\frac{4k}{n}\right)^2 - 2\left(-1+\frac{4k}{n}\right)+1\right]$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[3\left(1-\frac{8k}{n}+\frac{16k^2}{n^2}\right)+2-\frac{8k}{n}+1\right]$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[3-\frac{24k}{n}+\frac{48k^2}{n^2}+3-\frac{8k}{n}\right]$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[6-32\frac{k}{n}+48\frac{k^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{4}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}6-\frac{32}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{48}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right]$$

$$= \frac{4}{n}\left[6n-\frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}+\frac{\overset{8}{\cancel{48}}}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{\underset{1}{\cancel{6}}}\right]$$

$$= \left[24-64\left(\frac{n+1}{n}\right)+32\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right]$$

$$= \left[24-64\left(1+\frac{1}{n}\right)+32\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(24 - 64\left(1 + \cancel{\tfrac{1}{n}}_{\,0}\right) + 32\left(1+\cancel{\tfrac{1}{n}}_{\,0}\right)\left(2+\cancel{\tfrac{1}{n}}_{\,0}\right) \right)$$

$$= 24 - 64(1) + 32(2)$$

$$= 24.$$