Polar Coordinates
الإحداثيات القطبية
Math 111
Lecture 28

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

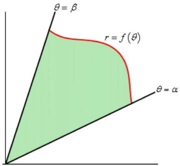
2017

Polar Coordinrates:

الفصل الرابع :

المساحات في الاحداثيات القطبية :

إذا كانت الدالة $r = f(\theta)$ متصلة و موجبة على الفترة $[\alpha, \beta]$ ، والتي لايزيد طولها عن 2π . و إذا كانت R هي المنطقة القطبية المحدودة بالمنحنى $r = f(\theta)$ والمستقيمين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ ،



فإن مساحة المنطقة R تعطى من

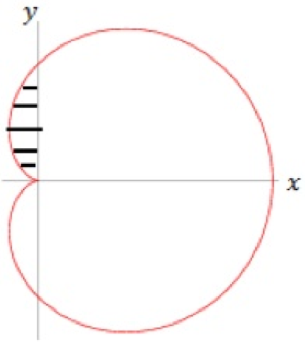
$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \quad d\theta$$

ويمكن الحصول على المساحة بين الدالتين المتصلتين $f(\theta)$ و $g(\theta)$ من

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2\right]\ d\theta$$

مثال:

احسب مساحة R في الربع الثاني داخل المنحنى القلبي $r = 1 + \cos\theta$.

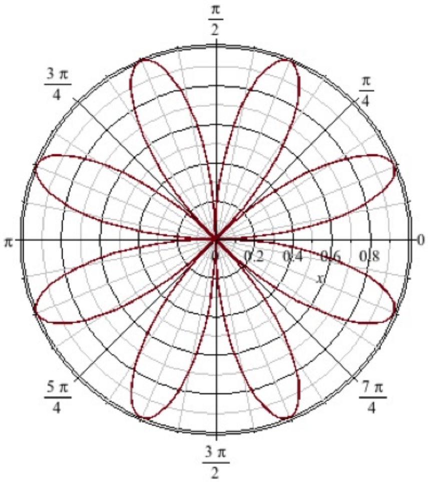


الحل: بما أن مساحة المنطقة المطلوبة في الربع الثاني فيكون ايجادها كمايلي

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos\theta)^2 \quad d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) \quad d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\pi/2}^{\pi} 1 \quad d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} 2\cos\theta \quad d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta \quad d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[[\theta]_{\pi/2}^{\pi} - 2[\sin\theta]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \quad d\theta\right] \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

مثال:

احسب مساحة وريقة من منحنى الوردة $r = \sin 4\theta$.



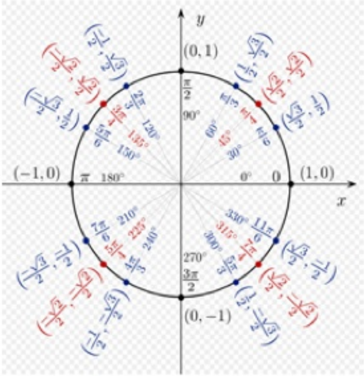
الحل: نريد ايجاد حدود التكامل وذلك بوضع $r = 0$ وبالتالي فإن

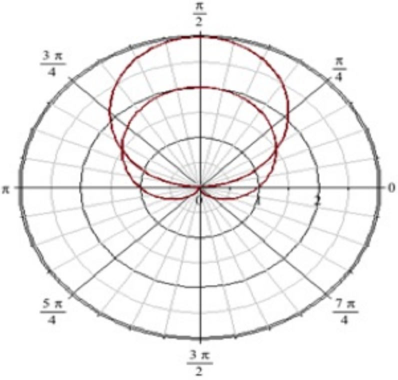
$\sin 4\theta = 0$ اي انه نريد ايجاد قيم الزاوية التي تجعل $\sin = 0$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sin 4\theta)^2 \quad d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1 - \sin 8\theta) \quad d\theta \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

مثال:

احسب مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = 3\sin\theta$ و خارج المنحنى القلبي $r = 1 + \sin\theta$.

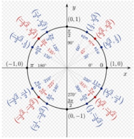
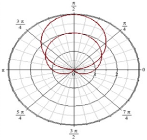




الحل: نريد ايجاد حدود التكامل وذلك بمساواة المعادلتيين وبالتالي فإننا يجب أن نحل المعادلة التالية

$$\begin{aligned} 3\sin\theta &= 1+\sin\theta \\ 2\sin\theta &= 1 \\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اي نريد ايجاد قيم θ التي تجعل $\sin = 1/2$

$$\Rightarrow \theta = \pi/6, \quad \theta = 5\pi/6$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة المطلوبة يمكن إيجادها من

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2] \; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[(3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2\right] \; d\theta \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Exercises

مثال:

احسب مساحة المنطقة داخل $r = 1 - \sin\theta$.

احسب مساحة المنطقة داخل $r = 2\cos\theta$ و خارج $r = 1$.

Thanks for listening.