Applications of The Integral
تطبيقات التكامل
Math 111
Lecture 24

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تطبيقات التكامل

Applications of The Integral:

الفصل الثاني :

حجوم أجسام الدوران:

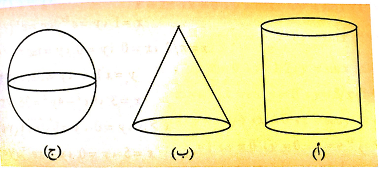
جسم الدوران يعرف بأنه الجسم الناتج من دوران منطقة مستوية R حول مستقيم خارج المنطقة و يقع على نفس المستوى ويسمى ذلك بمحور الدوران.

مثال :

(أ) اسطوانة ناشئة عن دوران مستطيل حول محور y.

(ب) مخروط ناشئ عن دوران مثلث حول محور y.

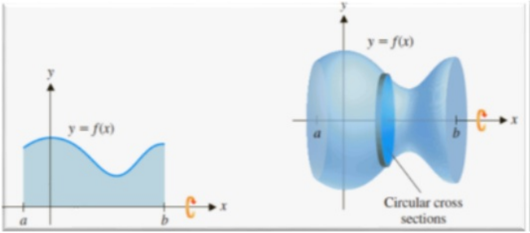
(ج) كرة ناشئة عن دوران نصف قرص دائري حول محور x (أو محور y).



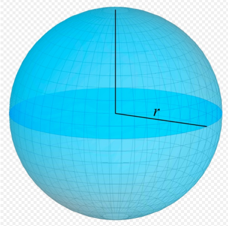
١) الاقراص الاسطوانية:

إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ قابله للتكامل على الفترة $[a, b]$ فإن الحجم الناتج من دوران $y = f(x)$ حول محور x وحيث أن $a \leq x \leq b$ يعطى من:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$



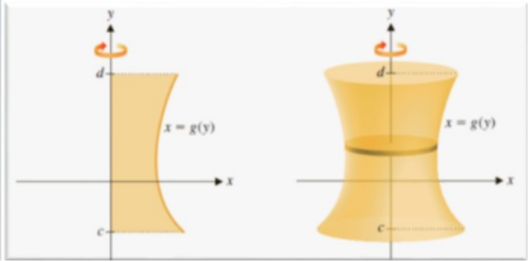
مثال : احسب حجم الكرة التي نصف قطرها r ومركزها نقطة الاصل.



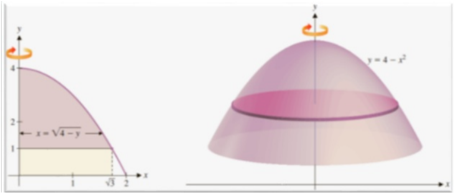
ملاحظة:

إذا كان لدينا الدالة $g(y)$ قابله للتكامل على الفترة $[c,d]$ فإن الحجم الناتج من دوران $x=g(y)$ حول محور y وحيث أن $c \leq y \leq d$ يعطى من:

$$V=\pi\int_{c}^{d}[g(y)]^{2}dy.$$



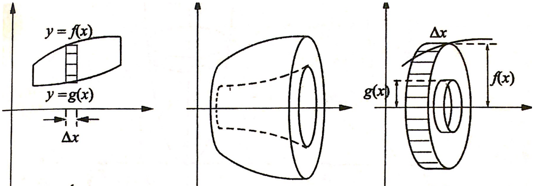
مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحدودة بين الدالتين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ للفترة من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول محور y .



٢) طريقة الوردات:

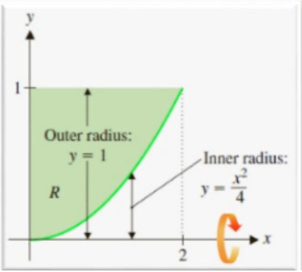
إذا كان لدينا الدالتين $f(x) \geq g(x)$ قابلتان للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإن الحجم الناتج من دوران $y = f(x)$ و $y = g(x)$ حول محور x و حيث أن $a \leq x \leq b$ يعطى من:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$



(أ) (ب) (ج)

مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببياني الدوال $y = \frac{x^2}{4}$ و $x = 0$ و $y = 1$ حول محور x .



ملاحظة:

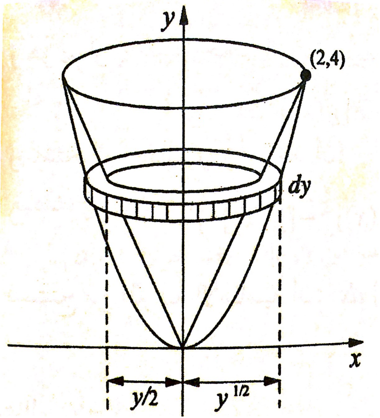
(١) إذا كان لدينا الدالتين $f(y) \geq g(y)$ قابلتان للتكامل على الفترة $[c, d]$ فإن الحجم الناتج من دوران $x = f(y)$ و $x = g(y)$ حول محور y و حيث أن $c \leq y \leq d$ يعطى من:

$$V = \pi \int_c^d [f(y)^2 - g(y)^2] dy.$$

(٢) بالإمكان إستخدام طريقة الوردة حتى إذا لم يكن الدوران أحد المحورين الإحداثيين بل كان مستقيما يوازي احدهما. (راجع مثال ٧-١٥) صفحة: ٢١٥).

مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببياني الدوال

$y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور y .

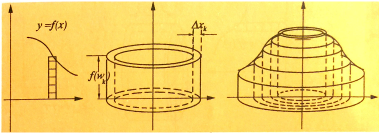


مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببياني الدوال
$y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور y .

٣) طريقة الشرائح الاسطوانية:

إذا كان لدينا الدالة $f(x) \geq 0$ قابله للتكامل على الفترة $[a, b]$. نفرض أن لدينا المساحة R محدودة بالمنحنى $y = f(x)$ و محور x للفترة $[a, b]$. فإن الحجم V الناتج من دوران المساحة R حول محور y يعطى من:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$



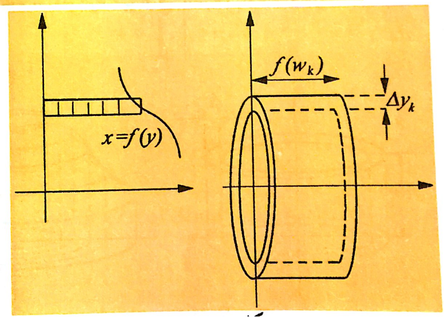
ملاحظة :

بالمثل إذا كان

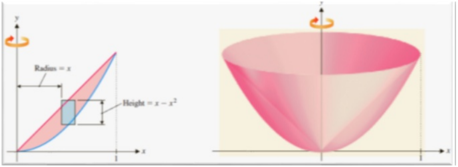
$$R=\{(x,y):0\le c\le y\le d, 0\le x\le f(y)\}$$

و كان محور الدوران هو محور x، فإن الشريحة الاسطوانية تتولد في هذه الحالة عن دوران مستطيل أفقي (أنظر الشكل (٧-٣١)) ونستنتج على نهج شبيه أن

$$V(S)=2\pi\int_c^d y f(y)\,dy \qquad (٩)$$

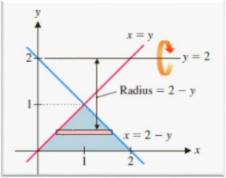


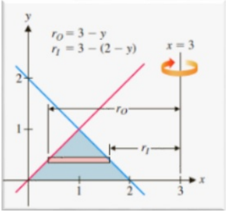
مثال : أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحدودة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = x$ حول محور y .



مثال : لنفرض أن لدينا المساحة R المحصورة ببياني الدوال $y = x$ ،
$y = 2 - x$ و $y = 0$. أحسب الحجم الناتج من دوران R حول :

(1) y=2, (2) x=3.



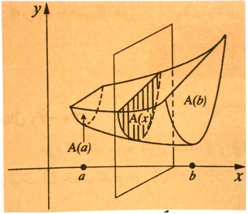


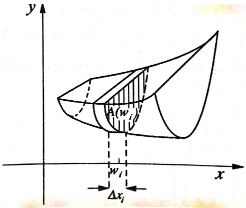
٤) طريقة المقاطع العرضية:

يمكن استخدام هذا الطريقة لحساب حجوم الاجسام التي تكون مساحات مقاطعها العرضية المعامدة لمحور مناسب محكومة بدالة قابلة للتكامل وهي تشمل الاجسام الدورانية كحالة خاصة. بالمقطع العرضي نعني تقاطع مستو مع ذلك الجسم. والحجم يكون

$$V(S) = \int_a^b R(x)\,dx.$$

نعني ب R المساحة.

.2 

.2 

https://www.youtube.com/watch?v=DDE9lZcHUM

مثال:

https://www.youtube.com/watch?v=mDDE9k7cHUM

Thanks for listening.