

كتاب  
العربية



مدينة الملك عبدالعزيز  
للعلوم والتقنية KACST

# الاحتمال الصدفة واليقين



تأليف: بول دو هو فيلز

ترجمة: حسين صدراوي

مراجعة: فايز بن علي الشهري

٢٠١٥ هـ - ١٤٣٦ م

ماذا  
أعرف؟

Que  
sais-je?

كتاب  
العربية



مدينة الملك عبدالعزيز  
للعلوم والتقنية KACST

# الاحتمال الصدفة واليقين

تأليف: بول دو هو فيلز

ترجمة: حسين صدراوي

مراجعة: فايز بن علي الشهري

١٤٣٦هـ - ٢٠١٥م

ماذا  
أعرف؟

Que  
sais-je?

ح) مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية، ١٤٣٦هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

فليز، بول دوهو

الاحتمال الصدفة واليقين. / بول دوهو فليز. - الرياض، ١٤٣٦هـ

ص. . : سم

ردمك: ٥-٧٨-٨٠٤٩-٦٠٣-٩٧٨

١- الاحتمالات (رياضيات) أ. العنوان

ديوي ٥١٩,٨٢ ١٤٣٦/٥٣٣٢

رقم الإيداع: ١٤٣٦/٥٣٣٢

ردمك: ٥-٧٨-٨٠٤٩-٦٠٣-٩٧٨

### جميع الحقوق محفوظة



مدينة الملك عبدالعزيز  
للعلوم والتقنية KACST

مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية

ص.ب. ٦٠٨٦ الرياض ١١٤٤٢

المملكة العربية السعودية

هاتف: ٤٨٨٣٤٤٤ - ٠١١ ٤٨٨٣٥٥٥ فاكس: ٤٨٨٣٧٥٦ - ٠١١

الموقع الإلكتروني: [www.kacst.edu.sa](http://www.kacst.edu.sa)

إصدارات المدينة: [publications.kacst.edu.sa](http://publications.kacst.edu.sa)

البريد الإلكتروني: [awareness@kacst.edu.sa](mailto:awareness@kacst.edu.sa)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



## توطئة :

قابلت يوماً شخصاً كان يؤكّد شُكّه في إمكانية الوصول إلى نتائج جديدة في الرياضيات، بدا لي أنّه إذا وجد مثل هذا الرأي فذلك بسبب أنانية الرياضيين أنفسهم قليلي الاستعداد للحديث عن مادّتهم لغير أصحاب الاختصاص. لصالحهم يجب الاعتراف بأنّ المحاضرة في موضوعات نظريّة دون أن يسبب ذلك بعض الضجر أمرٌ صعبٌ، و هناك ما يكفي من العمل للبحث عن أشياء جديدة ( والكل يعلم أنّ البحث وحده محلّ تقدير حقيقي في الأوساط العلميّة) ما لا يترك مجالاً واسعاً للتبسيط و التعريف بالرياضيات.

مع ذلك علينا أن نحاول جعل العلم قريباً من العامّة، و بعد الانتهاء منه عليّ الاعتراف بأنني استمتعت بكتابة هذا الكتيب (المونوجراف) في هذا الاتجاه أملاً أن يحقق هدفه، و هو التعريف ببعض التطوّرات الحديثة (و القديمة) في حساب الاحتمالات، و أن يساهم- بالمحاكاة- في جعل الرياضيين يكتبون أكثر لبقية الناس.

بإمكان القارئ الكريم إكمال محتوى هذا الكتاب بالرجوع إلى الكتاب و الكتب المذكورة في وسط النص و في آخره. هذه العملية مسهّلة منذ مده بالرجوع إلى محرّكات البحث على الشبكة، وبصفة خاصّة المراجع الدقيقة لأغلب المنشورات الرياضيّة الموجودة من بين مصادر أخرى على MathSciNet و موقع الجمعية الأمريكيّة للرياضيات: <http://www.ams.org>

## مدخل:

قد يبدو في عنوان هذا الكتاب تضاد من حيث الجمع بين متضادين: مسألة المصادفة و مسألة اليقين .

في الواقع نريد أن نبين كيف يولد اليقين من شيء تحكمه قوانين المصادفة. كان من الممكن أن يكون العنوان "أفكار حول قوانين الأرقام الكبيرة " مثلًا رغم أن ما نعرضه يتجاوز هذا الموضوع. قبل أن نذهب بعيدًا لنأخذ بعض الأمثلة التي تسمح بفهم ما يتحدّث عنه.

التجسيّدات البسيطة للمسائل العشوائية توجد في ألعاب المصادفة مثل: لعبة " الوجه و القفا " أو لعبة رمي الزهر. من المفيد التذكير بأن كلمة *alea* تعني الزهر في اللّغة اللاتينية و الزهر تأتي من العربية الشرقية و استعملت حتى القرن الثاني عشر لتسمية المكعب نفسه. هذا يؤكّد أهميّة الألعاب في الولادة التاريخية لحساب الاحتمالات.

أبسط مثال على متتالية عشوائية يمكن تجسيدها بمتتالية ألعاب (أو تكرار غير محدّد) وجه و قفا حيث ترمى قطعة نقدية في الهواء و تسقط "بالمصادفة" لتظهر في الجزء المرئي منها الوجه أو القفا. من الطبيعي أن نفترض أن النتائج المتتالية للعبة مستقلة و غير قابلة للتنبؤ، و أنّ القطعة النقدية متوازنة بحيث لا يكون هناك سبب لأن يظهر الوجه أكثر من القفا أو العكس.

بعد ملاحظة  $n$  لعبة أولى لنحسب  $S_n$  عدد الأوجه التي ظهرت من الرمية الأولى إلى الرمية  $n$  للقطعة النقدية، ترّدّد ظهور الوجه يعرف بالكسر  $\frac{S_n}{n}$  و هو عدد بين 0 و 1 و يمكن أن يكون مبدئيًا بين القيم الممكنة 0،  $\frac{1}{n}$ ،  $\frac{2}{n}$ ، ...،  $\frac{n-1}{n}$ ، 1.

ماذا يحدث للكسر  $\frac{S_n}{n}$  عندما تكبر  $n$  بصفة غير متناهية؟ الجواب عن هذا السؤال معطى بما يسمى عادة " قانون الأعداد الكبيرة " الذي يبيّن- بالحساب الرياضي- أنّ المتتالية  $\frac{S_n}{n}$  تؤوّل نحو  $\frac{1}{2}$ . تعبير أكثر دقة لهذه النتيجة (kolmogorov, 1930, chap II) يكمن في القول إنّ نهاية  $\frac{S_n}{n}$  عندما تؤوّل  $n$  إلى ما لا نهاية تساوي  $(\frac{1}{2})$  مع احتمال يساوي 1 كما سنرى لاحقًا، عمليًا ليس هناك فرق لأنّ أيّ حدث احتماله واحد هو "

فيزيائياً مؤكداً " . هكذا نرى في هذه المسألة التي لا يمكن توقع تفاصيل حدوثها، نستطيع مع ذلك أن نستنتج يقيناً إجمالياً.

يمكن الاعتراض والقول إن التقارب لتردد لعبة الوجه و الفقا نحو ( $\frac{1}{2}$ ) طبيعي. في الواقع بعض التفكير يبين أن النتيجة ليست بديهية إطلاقاً.

من الممكن التخيل أن ( $\frac{S_n}{n}$ ) تتذبذب بين ٠ و ١ بدون التقارب نحو نهاية محددة.

مثال آخر " لقانون الأعداد الكبيرة " يسمح بالحصول على نتيجة غير منتظرة، نقصد إبرة بوفون التي اخترعها جورج لويس لوكلارك بوفون عام ١٧٧٧ (١٧٠٧-١٧٨٨) و تتمثل في أن نرسم على الأرض سطوراً متوازية تفصلها المسافة  $a$  نفسها وحدة القياس، ثم نرمي إبرة دقيقة طولها ( $l$ ) حيث ( $l < a$ ) وننظر إن كانت الإبرة تقاطع أحد أسطر الشبكة أو لا، نكرر التجربة عدداً كبيراً من المرات ثم نحسب التردد لهذه التقاطعات. من الطريف أنه عندما نؤول ( $n$ ) إلى ما لا نهاية التردد ( $p_n$ ) يؤول إلى ( $p = \frac{2l}{\pi a}$ ) ما يسمح بحساب تجريبي للعدد ( $\pi = 3.145$ ) باستعمال قاعدة الثلاث، ومن

المفاجئ أن نستطيع حساب ( $\pi$ ) من متابعة مسألة عشوائية، و لكن هذا ما يحدث، و تجارب عديدة مماثلة تؤكد هذه القاعدة (ندعو القارئ إلى القيام بهذه التجربة على القاعدة باستعمال عود ثقاب، بحيث تحترم المقاييس ( $a=1.25$ ) أو ( $a=0.8$ )، للحصول على مقاربة للعدد ( $\pi$ ) بين (٣.١ و ٣.٢). يجب القيام بعدد يقارب المائة من الرميات لأن التقارب بطيء نسبياً.



## رسم بياني ١ : مقياس بوفون

وقد صل بوفون نفسه إلى ( ٢٠٤٨ ) رمية ما سمح له بمقاربة (  $\pi$  ) بدقّة الواحد على المائة.

يطبّق قانون الأعداد الكبيرة أيضًا على متوسط التجارب العشوائية من الصنف نفسه، وليس القانون الوحيد الذي يصف تغيّر بعض المتتاليات العشوائية، بل يوجد - في الواقع - عدّة قوانين "أعداد كبيرة" بعضها مفاجئ جدًا.

سيركز حديثنا على دراسة النتائج من هذا الصنف، و كثير منها- من بين ما سنذكر- اكتشف حديثًا على الرغم من الفائدة الظاهرة للتعريف بهذه القوانين لا نستطيع هنا- بسبب المساحة المتاحة لنا- إلّا تناول دراسة هذه المسائل- الغريبة غالبًا التي لها طابع عام، يضعها في جوهر العلم- بشيء من السطحيّة. في ما يلي نحاول بجديّة أن يكون تقديمنا حيًّا قدر الإمكان للمصادفة و اليقين. سوف يتحقّق هذا باتّباع ترتيب غير أكاديميّ يكمن في الحديث عن " حساب الاحتمالات " و تطوّره التاريخي أكثر من المحاضرة للمختصين وحدهم.

## الفصل الأول

### استحالة مشاهدة أحداث غير محتملة

يصعب تقديم مسألة المصادفة، الاحتمال، والعشوائية بصفة متناسقة لأنها تجمع بين النماذج الرياضية والنماذج الفلسفية والنماذج الفيزيائية.

علينا أن نفرّق بين النظرية الرياضية لحساب الاحتمالات، التي هي جزء من التحليل ذي التطورات منتهية الدقة من ناحية ، و من ناحية أخرى المسائل الفيزيائية التي يمكن تأويلها باستعمال هذه النظرية دون أن نكون دائماً قادرين على التسوية الكامل لصحة النمذجة. نشاهد مناسبة النموذج الاحتمالي للعالم الفيزيائي ولا يمكن إثباتها؛ إذ تظل الفلسفة في موقع متشابك مع هذه المسائل، حيث إنّ الجدل بين مؤيدي الحتمية القحة ( حيث لا مجال للمصادفة ) و الذين يعتقدون أنّ المصادفة جزء طبيعي من العالم الذي نعيش فيه ( نذكر هنا نظرية الفوضى التي طوّرت منذ ١٩٧٥ التي تبين أنّ عدداً من الظواهر هي طبيعياً غير قابلة للتنبؤ إذا تجاوزنا حداً زمنياً معيناً بسبب حساسية للشروط الأولية لوصف هذه الظواهر).

لنعود لمثال لعبة الوجه و القفا التي ذكرناها سابقاً كنموذج معهود للظاهرة العشوائية، نرى أنّ مثل هذه الظاهرة غير قابلة للتنبؤ في نتائجها الفردية، فيجب لوصفها الوصول إلى تعريفات تسمح بالتحويل الكمي للطابع المحتمل وغير المحتمل للأحداث القابلة للملاحظة، وفي حالة الألعاب المنتهية، حيث إنّ كلاً من الإمكانات الفردية المحتملة لها فرصة الوقوع نفسها (لعبة الوجه والقفا بسبب التناظر مثلاً)، ومن الطبيعي تعريف الاحتمال، نرّمز له بالرمز  $P(A)$ ، لحدث  $A$  الذي يمكن مشاهدته خلال اللعبة بالقسمة .

$$P(A) = \frac{\text{عدد المرات التي تتحقق فيها } A}{\text{العدد الجملي للحالات الممكنة}} = \text{احتمال } A$$

كمثال في لعبة القفا و الوجه ٣ مرات يمكن أن نشاهد ( FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP ) حيث ( P ) ترمز للقفا و ( F ) ترمز للوجه

الحدث: (يظهر الفقا مرّة واحدة) يكون احتمالُه إذن  $\left(\frac{3}{8}\right)$  لأنّ A يتحقّق في الحالات الثلاث ( PFF , FPF , PFF ) و مجموع الحالات الممكنة ( ٨ ).

من هذا التعريف، فإنّ الحدث ذا الاحتمال الضعيف يمكن أن يعدّ غير مرجّح الوقوع، و لذلك تصعب مشاهدته، نأخذ مثلاً احتمال مشاهدته (١٠) فقا متتالية في لعبة الفقا و الوجه ( PFFFFFFFFF )، الاحتمال المقابل يكون إذن  $\left(\frac{1}{2^{10}}\right)$  أي حوالي ( ٠.٠٩% ). لذلك يبدو عملياً من غير الوارد أن يشاهد لاعب هذا الحدث بإجراء تجربة واحدة، مع ذلك هذا غير مستحيل، بما أنّه لو أجرى اللاعب نفسه - إذا قبلنا أنه يتحلّى بالصبر التجريبي - ( ٤٠٠٠ ) مرّة أي تجربة لعبة الفقا و الوجه (١٠) مرّات، يكون الاحتمال هذه المرة 1-  $4000(2^{-10}-1)$  أي ( ٩٨% ) لمشاهدة مرّة واحدة على الأقل من بين ( ٤٠٠٠ ) تكرار للعبة الفقا و الوجه، عشر مرّات متتالية، و هذا يجعل مشاهدة مثل هذا الحدث محتملة جدّاً على المدى البعيد.

لنفترض الآن أنّ متتالية الألعاب فقا وجه غير منتهيّة، لا يمكن في هذه الحالة تعريف الاحتمال بالقسمة  $\left(\frac{\text{عدد الحالات التي تحقّق A}}{\text{عدد الحالات الجلي}}$  ) حيث إنّ هذا الكسر ليس له معنى بما أنّ مقامه غير منته، مع ذلك يمكن تمديد التعريف السابق منطقيّاً بإعطاء - كأمر مسلم- للاحتمال خصائص الاتصال عند أخذ النهايات، يسمح هذا بإسناد الاحتمال صفر لبعض الأحداث مثل P...PPP (أي فقا في كلّ المرّات).

بما أنّ أيّ حدث ذي احتمال ضعيف جدّاً يمكن عدّه مستحيل المشاهدة - تقريباً في اختيار واحد- فنخلص إلى قبول المسلمة التي نقول: إنّه إذا كان احتمال حدث ما صفرًا فعلياً أن نعدّ تحقيقه "استحالة فيزيائية" ووجهة نظر يصعب الدفاع عنها عندما ننظر إلى كلّ الحالات الممكنة لمتتاليات الفقا و الوجه جليّاً، على الرغم من أنّ كلّ حدث من هذه الأحداث- بسبب المبدأ المذكور- مستحيل فيزيائياً، فإنّ واحداً من هذه الأحداث يتحقّق دائماً، و هنا التناقض؛ لذلك لا بد من توضيح تؤول المبدأ بالإشارة إلى أنّ الاستحالة الفيزيائية لمشاهدة حدث ذي احتمال صفري لا تنطبق إلا على حدث واحد من بين هذه الأحداث، يحدّد مسبقاً قبل التجربة.

عندما نتحدث هنا عن حدث واحد فهذا لا يُقصد أن حدثًا واحدًا يمكن أن يكون مرئيًا، بما أنه- كما سنرى- إذا كانت  $A_1, A_2, \dots$  متتالية أحداث ذات احتمال صفري، والحدث الذي نرسم له بالرمز  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  و الذي يحدث إذا تحقق واحد من  $(A_i)$  على الأقل هو أيضًا حدث صفري، أي إذا كان كل حدث من متتالية أحداث ذي احتمال صفري فإنه من المستحيل مشاهدة حدث واحد فقط.

نصل إلى استخلاص الأفكار الآتية:

- (١) الظاهرة العشوائية- بالتعريف- يستحيل التنبؤ بها بالتفصيل، نستطيع فقط أن نحسب الطابع المحتمل وغير المحتمل للأحداث القابلة للملاحظة التي تتبع هذه الظاهرة.
- (٢) إذا كانت الظاهرة معقدة بما فيه الكفاية، فمن الممكن أن نسد لبعض الأحداث القابلة للملاحظة- نظريًا- الاحتمال صفر ما يجعلها استحالات فيزيائية.
- (٣) عندما نقول - قبل مشاهدة ظاهرة عشوائية- إن بعض النتائج الممكنة نظريًا لن تتحقق، فإلى أي مدى تبقى الظاهرة عشوائية؟ بلغة أخرى، ليس هناك تناقض في استخلاص حقائق يقينية تهم الظواهر العشوائية؟

يجسد مثل ألعاب المصادفة قوانين الأعداد الكبيرة المتعددة التي تصف سلوكيات مؤكدة لبعض الأشياء العشوائية بدقة، فمن الشائع أن نرى محاولة لاعبي الكازينوهات استعمال قانون للأعداد الكبرى لغير مصلحة خصومهم، فهناك طريقة من هذا الصنف واسعة الانتشار رغم مساوئها، و هي طريقة " مبدأ التعويض " وسيأتي وصفها: (انظر الباب ١٤). في الكازينو (انظر الباب ١٣).

تعود لعبة القفا والوجه بحدوث الزوجي أو الفردي، أو الأحمر أو الأسود على طاولة العجلة. هذه الألعاب تسلك مثل سلوك القفا والوجه، لذلك نحتفظ بمصطلحات اللعبة الأخيرة. إذا كانت  $(S_n)$  تمثل عدد الأوجه التي تظهر في  $n$  لعبة و  $T_n = S_n - n$  الفرق بين عدد المرات التي يظهر فيها الوجه و عدد المرات التي يظهر فيها القفا و ذلك حتى اللعبة الأخيرة فمن الممكن إثبات- باحتمال (١)- أن المتتالية  $(T_n)$  تأخذ القيمة ٠ عددًا غير منته من المرات.

استراتيجية اللاعب- إذن- هي التالية، يشاهد  $(T_1, \dots, T_k)$  حتى يحدث زائد  $T_k$  (لصفر) في مستوى محدد مسبقًا مثلًا:  $T_k = 5$  (زيادة ٥ أوجه على الأفقية). المقامر يلعب التعويض بالمخاطرة بصفة آلية على نتائج

الزائد الذي وقعت مشاهدته ( يتوقَّع ظهور قفا ) حتى يحدث التعويض الذي تصفه ( $T_{n+k} = 0$ ) يتأكد اللاعب من تسجيل ربح يساوي ( $T_k = 5$ ) مرّات ما خاطر به أوّلاً .

عيوب هذه "الطريقة" متعدّدة: أوّلاً لا يتعلّق الأمر هنا بلعبة القفا والوجه المتوازنة، ولكن بالعب العجلة مع احتمالات  $1/37, 2/38$  أو غيرها (ظهور صفر أو صفرين). المبالغ المخاطر بها يحتفظ بها البنك كلياً أو جزئياً. هذا يجعل لعبة التعويض خاسرة في متوسّطها على المدى البعيد إذا أخذنا بعين الاعتبار عدد المرّات التي يأخذ فيها البنك المخاطر ما بين البداية والعودة للتعويض.

المخاطرة بعكس التعويض (أي لعب الوجه) حتّى الوصول إلى ربح محدّد مسبقاً تبدو غير منطقيّة، و لكن من ناحية الاحتمالات تعود إلى " لعب التعويض" لذلك الخيار، وهو هنا مجرد دعم معنوي لا يجلب أيّ ضمانات خاصة.

ختاماً نذنبات ( $m=1,2,\dots, T_{i+m}$ ) قبل العودة إلى الصفر يمكن أن تكون مهمّة بما يكفي لإقلاس لاعب لا يملك ثروة تضاهي ثروة البنك، إضافة إلى ذلك فقد تستغرق وقت انتظار معتبر، ولن ننسى لاحقاً (الباب 13) ذكر - بالتفصيل - أكثر ألعاب الكازينو خاصّة في ما يهمّ بعض الجوانب من تركيباتها الاحتماليّة، وسنطرح السؤال الذي يطرحه كلّ لاعب: هل من الممكن حقاً ربح المال باتباع طريقة أو نظام معين؟ والجواب لهذا السؤال سيكون- تقريبياً- الآتي: إنّ ذلك ممكن على أن نخاطر بكثير و نربح القليل تقريباً. بصفة مؤكّدة على أن يكون ذلك مرّة واحدة- وألاً نعيد الكرة مطلقاً. سنرى من ناحية أخرى أنّ الخيار الأنكى هو ألاّ نلعب بالكلّ و هو ما يثبتّه المنطق الرياضي دون شك، وذلك لن يثني اللاعبين المغرمين باللّعب.

لكي نجعل قريباً إلى الحدس معنى الأحداث ذات الاحتمال الصغرى، لناخذ- من جديد- اللّعبة غير المنتهية للوجه والقفا ونسال: هل من الممكن عرض كلّ النتائج الممكنة نظرياً؟ أي المتاليات غير المتناهية من ( $P$  و  $F$ ) في كتيب مرتب بالأعداد  $1,2,3,\dots$ . كلّ مجموعة يمكن ترقيم عناصرها تسمّى قابلة للعد. من الناحية الفيزيائيّة المجموعات القابلة للعدّ هي المجموعات الوحيدة السهل الوصول إليها إنسانياً، حيث إذا رصدنا للإنسانية مدّة حياة غير منتهية فسوف يمكنها بالإقصاء المتتالي أن تجد- بعد وقت طويل بما فيه الكفاية- عنصراً "ضائعاً" في المجموعة .

و يحدث بالضبط أن مجموعة المتتاليات غير المنتهية من P أو F و بصفة مكافئة مجموعة كل الاحتمالات الممكنة في لعبة القفا و الوجه غير المنتهية ليست قابلة للعد. كي نثبت ذلك نستعمل برهان كانتور (١٩١٨-١٨٤٥) الذي يتمثل في افتراض أن ذلك ممكن و يتحقق في جدول كما في الصورة ٢.

1 P F F P F P...

2 F P F P P F...

3 P F P F F P...

4 P P F P F F...

5 F F P P F P...

#### صورة رقم ٢

و يكفي أن نأخذ القطر هنا (PPPPF...) و عكسه هنا (FFFFP...) الذي لا ينتمي إلى الجدول و هذا يناقض فرضية القابلية للعد.

لعبة " القفا و الوجه " حالة خاصة من ظاهرة عشوائية متكونة من مجموعة نتائج يمكن تبديلها، أي يمكن تحويلها باستعمال تحويلة تقابلية (حيث كل عنصر من عناصر المجال يحول إلى عنصر وحيد في المدى) غير محددة دون تغيير التركيب الاحتمالية.

عندما يكون لظاهرة عشوائية مجموعة نتائج قابلة للتغيير فالاحتمالات الوحيدة التي نحصل عليها هي:

(١) لا يوجد غير عدد منته من الحالات الممكنة ذات الاحتمال الواحد.

(٢) عدد الحالات الممكنة غير قابل للعد، و كل حالة احتمالها صفر، حيث لو وجد تعداد.

في الواقع، إذا كان هناك عدد من  $(w_1, \dots, w_n)$  الأحداث الأولية الاحتمال  $P(W_i) = p$

لكل حدث لا يتغير مع  $(i=1,2,\dots)$  هذه الأحداث لا تتقاطع و يجب أن يكون عندنا المساواة

$$P(W_1, U \dots U W_n) = P(W_1) + \dots + P(W_n) = np \leq 1$$

هذه الخاصية لا يمكن أن تقع لكل  $(n \geq 1)$  إلا إذا كان  $(p = 0)$  وإذا كان ذلك حاصلًا فخصائص الاحتمال تؤدي إلى :

$$P(U_{i=1}^{\infty} W_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(W_i) = 0$$

$$\text{و هذا مستحيل لأن } (P(U_{i=1}^{\infty} W_i) = 1)$$

هذا المثال يبين أن مسألة الاحتمال مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بمسألة القابلية للعدد.

مما سبق يمكن القول: إنَّ الحدث ذا الاحتمال الصفري يمكن تأويله كحدث صغير جدًا، و لا يمكن الوصول إليه بعملية إحصاء قابل للعدِّ لأحداث أولية قابلة للملاحظة.

في الحالة الخاصة للعبة "الفا و الوجه" هذا المبدأ يقول: إنه إذا لعب كلُّ الناس الذين وجدوا أو سيولد كلُّ منهم لوقت غير منتهٍ فلن يصلوا إلى مشاهدة كلِّ الحالات الممكنة و مجموعة المتتاليات المشاهدة لا تمثل إلا جزءاً ذا احتمال صفري من كلِّ المتتاليات الممكنة نظرياً.

هذا يسمح بفهم أفضل لمبدأ الاستحالة الفيزيائية لمشاهدة أحداث ذات احتمال صفري، مثل هذا الحدث في عالم رياضي شاسع يستحيل إيجاده بطرق متاحة للبشر، و هذا يشبه الإبرة في كومة التبن مع الفرق أن كومة التبن تكون مجموعة منتهية.

في حال قانون الأعداد الكبيرة الذي يصف تقارب الترددات نحو  $1/2$  في لعبة الففا و الوجه هذه الخاصية تبين- ببساطة- أنَّ مجموعة المتتاليات  $(X_1, X_2, \dots)$  من  $(1 \text{ و } 0)$  و المجموع الجزئي

$$(S_n = X_1 + \dots + X_n) \text{ حيث } \left(\frac{S_n}{n}\right) \text{ لا تُؤوَل إلى } (1/2) \text{ احتمالها صفر، أي أن هذه المجموعة صغيرة جدًا}$$

للمتتاليات  $(X_1, \dots, X_n)$  التي تحقِّق نهاية  $\left(\frac{S_n}{n}\right)$  تساوي  $1/2$ . كان من الممكن الاعتقاد العكس تمامًا، أي أنَّ

مجموعة المتتاليات التي لا تحقِّق نهاية  $\left(\frac{S_n}{n}\right)$  تساوي  $\left(\frac{1}{2}\right)$  تكون أكبر من المجموعة التي تحقِّق نهاية

$$\left(\frac{S_n}{n}\right) \text{ تساوي } 1/2 \text{ في هذا الشكل تبدو النتيجة مفاجئة جدًا، مع ذلك -كما سنرى- في الباب الخامس كل هذا}$$

يمكن تفسيره بواسطة ما يسمى " العدد الطبيعي " الذي ابتكره الرياضي الفرنسي Emile Borel (١٩٥٦-١٨٧١).





فاهتمامه بهذه المسائل، و ثمة نقاشه في الموضوع مع (Pascal) جعلته من السابقين الأساسيين في حساب الاحتمالات العصرية.

هل كان هذا نتيجة سمعة مشبوهة أو حقيقة؟ في كل الحالات ينسب له البحث المتواصل عن قواعد معقدة تسمح له بالحصول على أفضلية خفية على خصومه و تحقيق الثراء نتيجة لذلك.

واحدة من بين هذه القواعد التي ابتكرها تتمثل في رميالزهر ٤ مرّات و المخاطرة بظهور ٦ على الأقل. احتمال الخسارة هو إذن:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \cong 48.225\%$$

بطريقة ثانوية احتمال الربح هو ( % 51,775  $\cong \frac{671}{1296}$  ). الفرق مع لعبة الخمسين في المائة 50% للعبة

متوازنة ضعيف و يقارب لعبة عجلة الكازينو  $\frac{19}{37} \cong 51,351$  هذا الفرق يصعب ملاحظته في عدد صغير من المرّات، ولكنه يستطيع أن يقدم للمخاطر - على المدى البعيد- أرباحاً مؤكدة .

قاعدة أخرى تحمل (Le chevalier de Méré) أبوتهاتتمثل في رمي زهرين ٢٤ مرّة مع المخاطرة بظهور خمسين معاً على الأقل مرّة واحدة يبدو هنا أنّ ( Le chevalier ) أخطأ حيث احتمال الربح هو:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 49,14\%$$

فيما أنه لو اختار ٢٥ رمية لكان احتمال الربح يساوي :

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \cong 50,553\%$$

دون خطأ (باليد) صعب؛ تقول الأسطورة: إنّ القاعدة الأولى صنعت ثراءه بينما أقرته الثانية.

لا شك أنّ الواقع ليس بهذه البساطة و لكن الأسطورة توضح المشكلة المطروحة.

على ضوء هذه الأرقام نلاحظ أنّ الاحتمالات لا يمكن تخمينها بالحدس دوماً، الأمثلة الآتية على غرار طريقة فارس (Mere) تؤكد هذا الاستنتاج:

المثال الأوّل من هذه الألعاب يمكّن من ربح سهل على مخاطرات على مجموعات غير عارفة. في مجموعة من  $n$  شخص تقع المخاطرة على أنّ هناك اثنين من بين المجموعة على الأقل - لهما تاريخ الميلاد نفسه. إذا فرضنا أنّ الولادات موزّعة بصفة منظمّة على 365 يوماً (ومن هذا يكون الوضع أفضل للمخاطرة إذا كانت هناك كثافة لتواريخ الميلاد في فترات معيّنة) و إذا لم نعدّ السنوات ذات قفزة، فالاحتمال  $P_n$  لربح المخاطرة معطى بالقاعدة:

$$P_n = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right) \cdot \left(\frac{365-2}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{365-n+1}{365}\right)$$

مقدار يصعب تقييمه من الوهلة الأولى. بعض القيم الرقمية للاحتمال  $P_n$  معطاة في الجدول الآتي:

$n$	$P_n$	$N$	$P_n$	$n$	$P_n$
2	0.27%	12	16.70%	22	47.57%
3	0.82%	13	19.44%	23	50.73%
4	1.64%	14	22.31%	24	53.83%
5	2.71%	15	25.29%	25	56.87%
6	4.05%	16	28.36%	...	
7	5.62%	17	31.50%		
8	7.43%	18	34.69%		
9	9.46%	19	37.91%	30	81.44%
10	11.69%	20	42.14%	40	89.12%
11	14.11%	21	44.37%	50	97.04%

من المفاجئ ملاحظة أنّ  $P_n$  يتجاوز 50% بمجرد تجاوز عدد الأفراد الحاضرين 23. من المنصوح به المخاطرة بمبلغ كبير إذا كانت  $n=50$  أو أكبر.

المثال الآتي يعرف تحت اسم مسألة المعلق أو مسألة الصدف، حيث نفترض أن  $n$  شخصاً ذهبوا للاستماع إلى محاضرة و تركوا معطفهم معلقةً خارج القاعة، رمى مشاكس المعاطف على الأرض ثم ندم على فعله فأرجعها إلى المعلقين بطريقة عشوائية، ما احتمال أن يجد واحد من الحاضرين على الأقل معطفه في مكانه تماماً؟

النتيجة مفاجئة تماماً، حيث نحصل على ذلك باستعمال الرمز :

$$k! = k \times (k-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \rightarrow 1 - e^{-1} \cong 63,21 \%$$

عندما  $n$  تؤول إلى  $\infty$ .

إثبات هذه القاعدة يستعمل مساواة Poincaré.

$$P\left(\bigcup_1^n A_i\right) = Q_1 - Q_2 + Q_3 - \dots + (-1)^{n+1} Q_n$$

حيث

$$Q_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})$$

تطبق على الأحداث  $\{ \text{الشخص الرقم } i \text{ يجد معطفه} \}$

هذه النتيجة يمكن تطبيقها على وضعيات مختلفة، و تعبر عن مبدأ عام و هو أنّ المصادفات أكثر احتمالاً مما يمكن توقعه في البداية، يمكن المخاطرة على هذا مع حظوظ وافرة للربح.

لنعد إلى فارس de Méré. واحد من أسئلته أدى Pascal إلى ابتكار - عام ١٦٥٤ - المثلث الرقعي، (أو مثلث Pascal) الذي يسمح بحساب العوامل الثنائية :

$$\binom{q}{p} = C_q^p = \frac{P!}{q!(p-q)!} = \frac{p(p-1) \dots (p-q+1)}{q(q-1) \dots 1}$$

= عدد التركيبات من q عنصر تأخذ من بين p عنصر

لقد وضع فارس de Méré المسألة الآتية :

يلعب لاعبان (A) و (B) متتالية ألعاب قفا و وجه، الأول الذي يكسب مجموع (N) لعبة يكسب الكل. نفرض أنه لسبب خارجي- قرّر اللاعبان إيقاف اللعب قبل النهاية، اللاعب (A) يحتاج إلى (m) لعبة أخرى ليكسب و اللاعب (B) يحتاج إلى ربح (n) لعبة أخرى ليكسب، كيف يمكن قسمة مبلغ المخاطرة بعدل بين (A) و (B) ؟

مسألة القسمة هذه لا يمكن حلّها إلا بتعداد عدد الحالات N(A) التي يكسب فيها (A) و عدد الحالات N(B) التي يكسب فيها (B) و توزيع S حسب هذين العددين  $P(A) \times S$  و  $P(B) \times S$  للاعب (B) حيث S المبلغ الجملي و حيث:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(A)+N(B)} \text{ و } P(A) = \frac{N(A)}{N(A)+N(B)}$$

نرى في P(A) و P(B) احتمالات الربح للاعبين (A) و (B) هذا الحل وجد بالتعداد عن طريق Fermat في حالة خاصة أوّلاً ثم في الحالة العامة عن طريق Pascal في ١٦٥٤.

بما أنّه لا بدّ من  $m+n-1$  لعبته قبل الوصول إلى قرار نهائي ( حيث إذا اكسب (A) ما كان لـ (B) فرصة الربح إلا  $m-1$  مرّة من قبل و العكس كذلك )، العدان N(A) و N(B) معطيان كالآتي:

$$N(A) = \binom{m+n-1}{0} + \binom{m+n-1}{1} + \dots + \binom{m+n-1}{n-1}$$

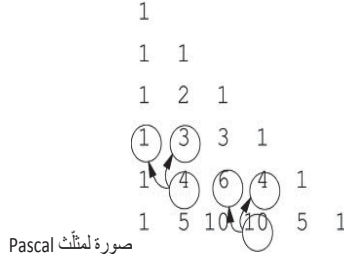
$$N(B) = \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m-1} + \dots + \binom{m+n-1}{1} + \binom{m+n-1}{0}$$

المجموع  $N(A)+N(B)$  مساوٍ للعدد  $2^{n+m-1} = (1+1)^{n+m-1}$  وهو عدد الألعاب الممكنة المتبقية. لذلك إذا كان  $(A)$  يحتاج إلى لعبتين للكسب و  $B$  لثلاث لعبات و  $N(A)=1+4+6$  و  $N(B)=1+4$  فنجد إذا  $\frac{11}{16}$  من  $S$  تعطى للاعب  $(A)$  و  $\frac{5}{16}$  ( و ليس كما يمكن توقعه بسداجة  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{2}{5}$  من  $S$ ).

الشكل التحليلي لعوامل ذي الحدين لم يكن معروفاً وقتذاك، استعمل Pascal المثلث الرقمي (صورة ٣) نجد

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 = 6 + 4$$

و كذلك يمكن حساب بقية العوامل بجمع العنصرين في السطر الأعلى الموجودين في الأعلى و على شمال الرقم المطلوب ( انظر صورة ٣ ) نحصل على مثلث Pascal بوضع  $i$  في السطر و العمود  $j$  العامل ذي الحدين  $\binom{i}{j}$  الأعداد  $i$  و  $j$  يمكن أن تكون صفرية بوضع المعطى  $0! = 1$ .



الذي يهمننا هنا هو أنه في هذا الحساب نظهر- لأول مرة- فكرة الربح المؤمل، أو توقع الربح- نسند في الواقع- للاعبين الجزء من المخاطرة الذي يتوقعون ربحه باعتبار احتمالات ربح كل منهما.

## الفصل الثالث

# توقع الربح في لعبة المصادفة قانون برنولي للأعداد الكبيرة

رأينا في الباب الثاني في مسألة قسمة المبالغ المخاطر بها في حالة خاصة بسيطة من حساب توقع الكسب في لعبة مصادفة عامة، أن الإمكانات المختلفة تكون: ربح،  $S_1$  مع احتمال  $p_1$ ،  $S_2$  مع احتمال  $p_2$ ، ...  $S_k$  مع احتمال  $p_k$  حيث  $p_1 + \dots + p_k = 1$ .

الكسب المحصول عليه، نرسم له بالرمز  $X$ ، هو عدد عشوائي (نقول إن  $X$  متغير عشوائي) نعرف توقعه (أو التوقع الرياضي) الذي نرسم له بالرمز  $E(X)$  بالمجموع:  $E(X) = p_1 S_1 + \dots + p_k S_k$

بهذه الطريقة في مسألة فارس de Meré، اللاعب (A) يحصل على توقع الكسب المساوي:

$$0' (1 - P(A)) + S' P(A) = S' P(A)$$

فكرة التوقع قدمها في البداية Huygens في ١٦٥٧ في كتابه De Ratiociniis in Aleae Ludo (في منطق لعب الزهر).

كلمة التوقع تظهر في اللاتينية تحت اسم "expectatio" مع التأويل أنها "الثمن المناسب الذي يتخلى من أجله لاعب عن مكانه في لعبة ما".

تأويل Huygens مجسد لمسألة التوقع، ولكنه لا يخلو من مخاطر، في الواقع من الأفضل اعتبار التوقع كعامل رياضي - بدل لحساب- نحصل عليه منطقياً من الفكرة التجريبية " للقيمة المحسوبة تقريباً" للكسب " المتوقع". لهذه الأسباب فالتوقع- كما عرفناه و عكس بعض التعريفات الأخرى الممكنة- يسمى التوقع الرياضي. من السهل بناء بعض الأمثلة حيث التوقع الرياضي لا يساوي القيمة المنتظرة للربح. لناخذ مثلاً

لاعين (A) و (B) يلعبان لعبة، حيث يخاطر (A) بمليون أورو مع احتمال خسارة (1/1000) و (B) يخاطر (1000) أورو مع احتمال خسارة يساوي (999/1000)

هذان اللاعبان عندهما توقعات رياضياً متساوية تقريباً (1000€ للاعب (B) و (999€ للاعب (A)). بالنسبة للتوقع الوضع أفضل للاعب (B) ، مع ذلك يبقى أن وضع (A) الذي ربحه شبه مؤكد (مع نسبة ربح 99,9%) يبدو أفضل بكثير من وضع (B).

من بين الأمثلة المشهورة من الحالات التي لا تتألف فيها مسألة التوقع الرياضي مع فكرة الربح المنتظر تناقض Saint-Petersbourg الذي طرحه Nicolas Bernoulli على Montmort عام (1713) و عاود تناوله Daniel Bernoulli عام (1738) ودرسه بعد ذلك Laplace (1749-1824) و مؤخرًا Feller (1950) و (J.Appl Probab. 22.634-646) Martin-lof (1985)، لعبة-Saint-Petersbourg لعبة تلعب بين خصمين (A) و (B) يحصل (A) في البداية على مبلغ جملي S وحدة في حين يتأثر ربح (B) بنتيجة متتالية ألعاب قفا ووجه، إذا ربح (B) لعبة الأولى و خسر اللعبة n+1 يحصل على 2<sup>n</sup> وحدة، هكذا يخاطر (B) على ظهور قفا و (A) على ظهور وجه، إذا كانت الألعاب المتتالية كالاتي:

F B يحصل على وحدة (A) يحصل على S

PF B يحصل على وحدتين (A) يحصل على S

PPF B يحصل على 4 وحدات (A) يحصل على S

PPPF B يحصل على 8 وحدات (A) يحصل على S

PPPPF B يحصل على 16 وحدة (A) يحصل على S

السؤال يتمثل في تحديد قيمة S حتى تصبح اللعبة عادلة.

والحل المنطقي يستدعي أن تكون توقعات الربح للاعبين متساوية، لكن هذا مستحيل بما أن توقع ربح B غير منتهٍ لأنه يساوي:

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + \dots + 2^n \times 2^{-n-1} + \dots$$

المبلغ (S) المعطى للاعب (A) يجب أن يكون غير منتهٍ كي تكون اللعبة عادلة، مع ذلك هذا ليس عادلاً حقاً،

مثلاً لو حُدد المبلغ المعطى للاعب (A) بـ  $S = 1024 = 2^{10}$  لا يستطيع (B) تحقيق ربح أكبر من S إلا

باحتمال  $2^{-10} = \frac{1}{1024}$  و هذا يؤدي إلى أن (A) يكون متأكدًا عمليًا من تحقيق ربح أكبر من ربح (B) إذا لعبت اللعبة مرة واحدة، هناك في الظاهر إذن تناقض، حيث الحلّ العادل منطقيًا يكون في مصلحة (A) مقارنة باللاعب (B)، هناك طريقة سهلة لحلّ هذا التناقض تكمن في قول: إنّه يستحيل أن نجعل اللعبة عادلة؛ هذا غير مرضٍ لأنّه انطلاقًا من مبدأ أنّ لكل شيء ثمنًا نعتقد أنّه لا بدّ من أن تكون هناك طريقة أخرى لحساب المعطى S غير طريقة حساب التوقع.

الحلّ الأفضل "إنسانيًا" لتناقض Saint-Petersbourg قدمه، دون شكّ، Daniel Bernoulli منذ عام (1738) في كتابه Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis حيث عرض نظرية جديدة لتقييم المخاطرة " ينطلق فيها من مبدأ أنّ ربح اللاعب لا يصلح إلا إذا فورن بثروته، حينئذ لللاعب الذي يملك الثروة  $\alpha$  أن يقتر الربح  $d\alpha$  نسبيًا إلى القسمة  $\frac{d\alpha}{\alpha}$  وليس نسبيًا إلى  $d\alpha$  لذلك إذا كان للاعب (c) الثروة  $\alpha$  ولعب لعبة حيث ربحه أو خسارته المحسوبة سلبًا متغير عشوائي X يعرف Daniel Bernoulli الصلاحية المتوسطة للعبة بالتعبير (أين  $\log u$  يرمز للوغاريتم الطبيعي ذي الأساس e للعدد u)

$$U(\alpha, x) = \alpha E(\log(X + \alpha) / \alpha)$$

حيث (E) ترمز للتوقع الرياضي، إذا آلت  $\alpha$  إلى ما لا نهاية  $\log((X + \alpha) / \alpha)$  تؤول إلى X و تصبح الصلاحية المتوسطة  $U(\alpha, X)$  إذا كانت قريبة من التوقع الرياضي. ممدّدًا هذا التعريف يعرف Daniel Bernoulli التوقع المعنوي  $E_M(X, \mu)$  للعبة بالمساواة

$$\alpha \log\left(\frac{E_M(X, \alpha) + \alpha}{\alpha}\right) = U(\alpha, x) = \alpha E\left(\log\frac{X + \alpha}{\alpha}\right)$$

في حالة يكون  $X = S_1$  باحتمال  $p_1$  و  $X = S_2$  باحتمال  $p_2$  وهكذا هذه القواعد تؤدي إلى تعريف التوقع المعنوي بالقاعدة:

$$E_M(X, A) = \int_0^1 a \left(1 + \frac{S_1}{a}\right)^{p_1} \dots \left(1 + \frac{S_2}{a}\right)^{p_2} \dots \frac{1}{b} - a$$

في لعبة Saint-Petersbourg اللاعب (B) يملك الثروة  $\beta$  و يكون توقعه المعنوي

$$E_M(X, B) = p(b) - b = \int_0^1 \left(b + 1\right)^{\frac{1}{4}} \left(b + 2\right)^{\frac{1}{4}} \dots \left(b + 2^p\right)^{\frac{1}{2^p}} \dots \frac{1}{b} - b$$



لجعل اللعبة عادلة بإعطاء (A) مبلغًا مساويًا للتوقع المعنويّ لللاعب (B) يجب أن يكون هذا المبلغ  $P(\beta) - \beta$  وحدة. كمثال إذا كان  $\beta = 0$ ،  $P(\beta) - \beta = 2$  إذا كان  $\beta = 10$ ،  $P(\beta) - \beta = 3,04$ ، وإذا كان  $\beta = 100$  فإن  $P(\beta) - \beta = 4,38$  و  $P(\beta) - \beta = 5,97$  و  $P(\beta) - \beta = 1000$  إذا كان  $\beta = 1000$

للأسف، إذا بدا التحليل جيدًا لللاعب (B) فهو لا يخدم مصلحة (A) بالدرجة نفسها، حيث نلاحظ أنه إذا كانت  $\alpha$  ثروة (A) محدودة فإفلامه ممكن مع احتمال غير صفري، بينما يكون توقعه المعنوي سالبًا ما لا نهاية؛ يمكن لهذا أن نعيب على فكرة التوقع المعنوي عدم احترام التناظر للاعبين.

في الواقع حصل التخلي عن هذه الفكرة بصفة كلية تقريبًا لصالح التوقع الرياضي، رغم أهميتها الحقيقية الاجتماعية الاقتصادية.

توجد مقاربات أخرى عصرية أكثر للعبة Saint-Petersbourg نعرضها بإيجاز من خلال n لعبة

ممتثلة، الربح  $S_n$  لللاعب B يتبع القانون النهائية 1 @  $\frac{S_n}{n \log n}$  (تقارب في الاحتمال عندما  $n \rightarrow \infty$ ) هنا

$\log n = \log n / \log 2$  يرمز للوغاريتم في الأساس 2 (انظر Feller 1950). نستطيع أن نستعمل هذه الخاصية

للحصول على تقييم مختلف لما يملكه B (انظر S.Csorgo, R.Dodunekova (1991), Sums, Trimmed Sums and Extremes, Bale, Birkhauser)

للعبة "تناقضات" مثل ما يوجد في لعبة

Saint-Petersbourg ليست في الواقع متناقضة إلا أنها تمزج- أحيانًا بطرق شائكة- بين المسائل

الرياضية الدقيقة و بين التأويل الفيزيائي المخاطر.

كان Daniel Bernoulli (1700-1782) من عائلة علماء الأثمنر من بينهم أبوه Jean Bernoulli

(1667-1748) (مخترع نو العروتين) و عمه Jacques Bernoulli (1645-1705) مخترع أعداد

Bernoulli.

قطعت مرحلة كبيرة في مسار تطور حساب الاحتمالات بنشر- بعد وفاته - في 1713، عمل Jacques

"Ars Conjectandi", Bernoulli, أو "فن الفرضيات الحسنية". في هذا الكتاب عرض البرهان الدقيق

الأول للقانون الضعيف للأعداد الكبيرة، فيه نأخذ متتالية  $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$  متغيرات عشوائية مستقلة،

بأخذ كل واحد منها القيمة (1) باحتمال (p) والقيمة (0) باحتمال (1-p) المجموع الجزئي للملاحظات:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

يؤول كعدد المرّات التي تأخذ فيها  $X_i$  القيمة ( ١ ) إذا كانت ( i ) بين ( ١ ) و ( n ) القانون الضعيف للأعداد الكبيرة يقول: إنه لكل  $\varepsilon > 0$  معطاة, الاحتمال  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right)$  يؤول إلى ٠ إذا آلت (n) إلى  $+\infty$ .

يعبر هذا القانون عن أنّ الذبذبة  $\left(\frac{S_n}{n}\right)$  (ظهور حدث في تكرار تجارب تؤول إلى الاحتمال (p) لمشاهدة هذا الحدث في تجربة واحدة من بين هذه التجارب. نلاحظ أنّ هذا الشكل من قانون الأعداد الكبيرة أضعف من الذي ذكرناه سابقاً, الذي يعبر عن أنه مع المعطيات نفسها  $p \otimes \frac{S_n}{n}$  باحتمال واحد. هذه النسخة تسمى القانون القوي للأعداد الكبيرة, بينما في الشكل الذي طرحه Bernoulli يعرف القانون بالقانون الضعيف للأعداد الكبيرة.

واحد من الأدلة على عدم بساطة هاتين النتيجةين يوجد في أنّه انقضى حوالي ٢١٥ سنة بين برهان القانونين: الضعيف والقوي للأعداد الكبيرة. القانون القوي للأعداد الكبيرة لم يثبت إلا في ١٩٣٠, في شكله النهائي, من طرف A.N Kolmogorov (١٩٨٧-١٩٠٣).

قانون الأعداد الكبيرة لـ Bernoulli لا يقدم معلومات دقيقة حول سرعة تقارب  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right)$  نحو صفر.

هذا المشكل لم يحلّ إلا في عام (١٧١٨) من طرف Abraham de Moivre (١٧٥٤-١٦٦٧) في كتابه "نظرية الفرص" الذي أعاد تناوله في مؤلفه Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis "تحليل مختلف للمتسلسلات والتربيعات". براهين Abraham de Moivre أعيد تناولها مع بعض التحسينات من طرف Pierre-Simon de Laplace (١٨٢٧-١٧٤٩) في كتابه " النظرية التحليلية للاحتتمالات" الذي نشر في ١٨١٢ حيث لم يذكر فيه (de Moivre 1754-1667). هذا يجعل النتائج المذكورة تنسب في الغالب إلى Laplace عوضاً عن أن تنسب لمبتكرها الأصلي.

استعمل de Moivre في برهانه نشرًا مقارنًا لـ  $n! = n(n-1) - 1$  حتى يحسب الاحتمال  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . من قاعدته أمكنه استنتاج نسخة أولى من نظرية النهاية المركزية مثبتًا أنه إذا كان:

$$-\infty < a < b < \infty$$

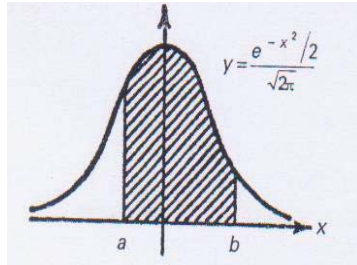
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

النتيجة التي حصل عليها De Moivre Laplace ينتج عنها قانون الأعداد الكبيرة لـ Jacques Bernoulli

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

و توضح قانون الاحتمال النهائية للقسمة

نرى هنا القانون المشهور لـ Gauss أو القانون الطبيعي أو قانون Laplace-Gauss هذا القانون المقابل لكثافة تسمى "المنحنى الناقوس"



ينسب عادة إلى Gauss أكثر من Laplace لأن Gauss (1777-1855) أثبت في (1821) في مؤلفه "theoria combinationis observationum Erroribus Minimus Obnoxiae" نظرية تركيب الأخطاء ذات المقياس الضعيف" أنها في إطار أعم، نهاية قانون الاحتمال لمجموع أخطاء عشوائية مستقلة ذات مقياس ضعيف حين يصبح عددها غير متناه.

هكذا نرى أن نتائج Laplace و de Moivre كانت مجرد حالات خاصة لتقارب عام يلعب فيه القانون الطبيعي دوراً شاملاً.

قانون الأعداد الكبيرة لـ J. Bernoulli الذي توضحه نظرية النهاية المركزية يعبر عن التقارب الذي يسمى ضعيفاً أو في الاحتمال للمتتالية  $\frac{S_n}{n}$  نحو القيمة المشتركة للتوقع  $E(X_i)=p$   $i=1, 2, \dots$  لمتغيرات الجمع.

لنأخذ بصفة أعم عوضاً عن متغيرات عشوائية  $X_i$  تأخذ القيم ( ١ ) أو ( ٠ ) متغيرات  $X_i$  تأخذ القيم  $x_i$  باحتمال  $p_1, p_2, \dots, p_k$  بالاحتمال  $p_1, p_2, \dots, p_k$  حيث  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$  أعداد موجبة أو صفرية تحقق  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$  إذا تناولنا من ثمّ بذبيبات مشاهدات  $x_1, \dots, x_k$  من الممكن استنتاج قانون J. Bernoulli للأعداد الكبيرة المذكور سابقاً في لعبة "الفا و الوجه" عندما بصفة عامة لكل  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i - E(X)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

حيث  $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k$   $X = X_i$  ( نكتب  $A = B$  حينما يعرف الطرف الأيمن الطرف الأيسر).

هذه النتيجة ما هي إلا حالة خاصة نصت في شكل مضغف القانون القوي للأعداد الكبيرة لصاحبه Kolmogorov (1930) " بشأن القانون القوي للأعداد الكبيرة".

,Comptes rendus de L' Academie des sciences Paris 191, 910-912

الذي نقدّم الآن نسخته الأعم: لتكون  $X_1, X_2, \dots$  متتالية متغيرات عشوائية مستقلة، و ذات قانون احتمال موحد، معرّف بدالة التجزئ  $F(x) = P(X_1 \leq x)$ ، عندئذ نهاية المتوسط من الدرجة  $n$  المعروف بـ  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  موجودة باحتمال واحد، إذا كان توقع القيمة المطلقة  $X = X_1$  أي:

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X| dF(x) \text{ محدودا.}$$

حينئذ عندما حتماً:

$$l = \lim \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \right\} = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

المساواة المذكورة التي تعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  تمُدُّ الأمثلة السابقة بإعطائه معنى متكامل Lebesgue –Stieljes (مسائل تعود لـ Henri – Leon Lebesgue (1875-1941) و Thomas –Joannes Stieljes (1856-1894)). طريقة واضحة لتعريف مثل هذا التكامل معطاة بالقاعدة:

$$E(X) = \int x dF(x) = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{k \rightarrow nM} \frac{1}{n} \left[ F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] \right\}$$

وما هو إلا تمديد للمتغيرات العشوائية، أيًا كانت، لتعريف التوقع للمتغيرات العشوائية ذات القيم القابلة للعد الذي يعرف كالآتي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(X = x_i)$$

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي هو إذن النهاية باحتمال 1، لمتوسط نسخ مستقلة ذات قانون مماثل للمتغير  $X$  عندما تؤول  $n$  إلى ما لا نهاية.

قانون الأعداد الكبيرة المذكور أعلاه يمكن من فهم التأويلات الخاطئة التي تعرضت لها مسألة التوقع الرياضي، في لعبة ما توقع الربح ما هو إلا نهاية متوسط الأرباح المشاهدة بعد لعب عدد مرتفع من المرات، وما يعنيه "عدد مرتفع من المرات" هو النقطة الأساسية بالتأكيد.

في المثال المذكور حيث يخاطر  $A$  بمليون يورو مع احتمال خسارة  $\frac{1}{1000}$  و  $B$  يخاطر بألف يورو مع احتمال خسارة  $\frac{999}{1000}$  توقع ربح  $A$  هو ٩٩٩ € في حين توقع ربح  $B$  هو ١٠٠٠ €. على المدى الطويل، إذن

الوضعية تناسب اللاعب B بحيث لو فرضنا أننا كررنا عدداً مرتفعاً من ألعاب مماثلة سيكون ربح B مؤكداً، ومن البديهي أنه إذا اكتفينا بعدد صغير من الألعاب سيكون الوضع مناسباً للاعب (A).

يكون من غير العدل - في هذا المجال- ألا نذكر (1787-1840) Simeon Denis Poisson الذي كتب التسمية "قانون الأعداد الكبيرة" الذي حصل في مؤلفه "بحوث في احتمالات القرارات في المادة الجنائية و المادة المدنية (1837)" على نسخة متميزة نذكرها الآن.

عوضاً عن أن نأخذ متتالية متغيرات  $X_n$  تأخذ القيمتان 1 أو 0 باحتمال p أو 1-p نسمي عادة قانون مثل هذه المتغيرات قانون Bernoulli تتوالى Poisson متغيرات مستقلة و لكن ليست بالضرورة ذات القانون نفسه حيث  $P(X_n = 1) = p_n, P(X_n = 0) = 1 - p_n$  أثبت Poisson أن نتيجة القانون الضعيف للأعداد الكبيرة تبقى صائبة حيث تعوض- في تقريره- بالمتوسط  $\bar{p}_n = p_1 + \dots + p_n$  للاحتتمالات المتتالية. بلغة أخرى نسخة Poisson من قانون الأعداد الكبيرة تثبت أنه لكل  $\varepsilon > 0$  عندما

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

بإمكاننا أن نعتقد- بشيء من السذاجة- أنه إذا كان توزيع عناصر المتتالية غير متجانس سوف يؤدي ذلك إلى عدم صحة قانون الأعداد الكبيرة، في الواقع هذا ليس صحيحاً رغم الغرابة الظاهرة فإن ما يحدث هو العكس تماماً. هذه الخاصية توضحها نتيجة لـ: (1956) Hoeffding Wassily Annals of Math Statistics 27, 715-721

نتبين أن احتمال الانحراف  $P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \bar{p}_n > \varepsilon\right)$  لكل  $\varepsilon > 0$  يكون الأكبر إذا ثبتنا  $\bar{p}_n$  عندما تكون الأعداد  $p_i$  متساوية. نجد النتيجة نفسها لو عوضنا  $X_n$  ب  $X_n - 1$ . بلغة أخرى ذبذبة الريح تكون مركزة أكثر حول التوقع إذا كانت احتمالات الريح للمتغيرات المختلفة (المستقلة) المشاهدة غير متجانسة.

هذه الخاصية غير المنظرة معاكسة للحدس، تظهر قوة قانون الأعداد الكبيرة التي تتجاوز صحتها كثيراً حالات الألعاب المتجانسة، هذا القانون إذن لا يتأثر كثيراً عندما نتناول ذبذبات ظواهر تتغير أثناء التجربة.

من المهم - في هذه الأثناء- أن نذكر أنّ التوقُّع متغيّر عشوائي ليس دائماً معرفاً، بالعودة إلى قانون الأعداد الكبيرة لهذه الملاحظة النتائج الآتية:

- (١) إذا كان التوقُّع لمتغيّر غير منتهٍ يتقارب متوسط متتالية أحداث مكررة مستقلة نحو ما لا نهاية باحتمال 1.
  - (٢) إذا لم يكن التوقُّع معرفاً (تستثنى الحالة التي يكون فيها التوقُّع غير منتهٍ) يكون متوسط متتالية أحداث مكررة مستقلة تباعدياً عندما تؤول  $n$  إلى ما لا نهاية و يتذبذب إلى ما لا نهاية باحتمال 1.
- لنعطي بعض الأمثلة:

- (١) مارتنجيل كلاسيكي : نأخذ لاعبين (A) و (B) في لعبة قفا ووجه غير متوازنة A يكسب باحتمال  $p < \frac{1}{2}$  و B يكسب باحتمال  $1-p > \frac{1}{2}$ . هذا يحدث، مثلاً، حيث يكون A مخاطراً على الزوجي أو الفردي و خصمه B هو الكازينو، هناك نظام يسمح في الظاهر للاعب (A) ببيع مؤكّد يتمثل في المخاطرة في البداية بواحد، و المضاعفة في حالة الخسارة في كل مرة، و إيقاف اللعب عند أول كسب يسجل و (تسمى هذه مارتنجيل Hawks)، نستطيع أن نلخص إمكانيات اللعب المختلفة في الجدول الآتي :

الربح	المخاطرة اللازمة	الاحتمال عدد الألعاب اللازمة لكي يكسب (A)
1	1	$p$
1	$3=1+2$	$p(1-p)$
1	$7=1+2+4$	$p(1-p)^2$
1	$15=1+2+4+8$	$p(1-p)^3$
1	$31=1+2+4+8+16$	$p(1-p)^4$
.	.	.
.	.	.
1	$2^n - 1 = 1 + \dots + 2^{n-1}$	$p(1-p)^{n-1}$
.	.	.
.	.	.

نلاحظ أنّ المبلغ المطلوب للاعب ( A ) يتزايد بسرعة كبيرة مع عدد الألعاب اللازمة قبل أن يسجل أيّ ربح؛ لهذا يصبح التطبيق الفعلي لهذه الاستراتيجية الراجعة مستحيلًا عمليًا، حيث يتوقف اللّعب إمّا لأنّ (الكازينو) يفرض مخاطر دنيا و قصوى ما يمنع (A) من مواصلة طريقته بعد حدّ معين أو أنّ ( A ) لا يستطيع أن يعطيّ مخاطراته التي تتجاوز ما يملكه. لقد استعملنا هنا مصطلح "مارتنجيل" لنسمي حسب لغة اللاعبين طريقة لعب تؤمن الربح، حسب المصطلحات الرياضيّة الكلمة تعني متتالية عشوائية  $(X_n)$  يكون توقّعها الشرطي إذا عرفنا  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$  يساوي  $X_{n-1}$ . إذا كان ذلك أكبر أو يساوي  $X_{n-1}$  نسمي المتتالية "مارتنجيل سفليّة" و في حال العكس "مارتنجيل علويّة" أي في حال يكون التوقّع أقلّ أو يساوي  $X_n$ . هكذا حسب المصطلحات العلميّة الربح المتراكم أو الخسارة المتراكمة  $X_n$  للاعب (A) تكون مارتنجيل عندما يكون اللّعب متوازنًا (في المثال  $p=1-p=\frac{1}{2}$ ) و مارتنجيل سفليّة في حال كان اللّعب لصالح (A)  $(p > \frac{1}{2})$  و مارتنجيل علويّة إذا كان اللّعب لصالح خصم (A)  $(p < \frac{1}{2})$ . توقّع المخاطر المتراكمة اللازمة قبل تسجيل أيّ ربح معطى بالقاعدة:

$$E(\text{اللازمة المخاطرة}) = \sum_1^{\infty} (2^n - 1)p(1-p)^n$$

هذه المتسلسلة تكون دائمًا تباعدية إذا كان  $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$  لهذا حتى في حال اللّعب المتوازن  $(p = \frac{1}{2})$  فأني لاعب متهور حاول بصفة متكررة تطبيق طريقة مماثلة سوف يرى من قانون الأعداد الكبيرة أنّ متوسط المخاطر اللازمة لمتابعة اللّعب تتزايد إلى ما لا نهاية. على المدى البعيد- ما يجعل إفلاسه مؤكّدا مهما كانت ثروته الأولى.

٢) قانون كوشي: لقد وصفنا الطريقة المنطقية التي تبيّن كيف يظهر القانون العادي في الطبيعة كقانون احتمال كمّ عشوائي يؤول كمجموع كبير لمتغيّرات صغيرة و مستقلّة، هذه النتيجة ليست دائما صحيحة؛ إنّها تفترض أنّ المتغيّرات العشوائية الصغيرة تحقّق بعض الشروط كافتراض مثلاً- وأن مرتعتها ذات توقّع منتهٍ (هذا الشرط يمكن إضعافه بصفة ملحوظة من ناحية أخرى).

نستطيع أن نضع- بصفة عامّة- المسألة الآتية:



إذا كان عندنا  $X_1, \dots, X_n$  متتاليات متغيريات عشوائية لها القانون نفسه - ما التوزيعات النهائية الممكنة لـ  $\frac{X_1 + \dots + X_n - b_n}{a_n}$  حيث  $a_n > 0$  و  $b_n$  عاملان غير عشوائيان يقع اختيارهما بطريقة مناسبة، نجد هنا نسخة عامة من مسألة Gauss حيث ترمز  $X_i$  للمتغيرات الصغيرة العشوائية.

هذا السؤال له أهمية؛ لأن التوزيعات التي نحصل عليها بهذه الطريقة يمكن عدّها "طبيعية"، والوسيلة التي تسمح ببنائها موجودة في ظواهر فيزيائية متنوعة. الحل لهذه المسألة حصل عليه Paul Levy (1937) بإبتكاره القوانين المستقرة، نتیجته تبين أنه إذا كان  $E(X_i^2)$  منتهياً، فقانون النهاية الوحيد الممكن هو القانون العادي، وفي غير هذه الحالة نجد قوانين تسمى قوانين مستقرة، تعبيراتها معقدة أكثر، أبسطها قانون كوشي. في شكله المعهود  $X$  يتبع قانون كوشي إذا كان احتمال أن يكون  $X$  من بين  $a$  و  $b$  معطى بالقاعدة:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{\text{Arctg } b - \text{Arctg } a}{\pi}$$

في الحالة العامة تعبير كثافة قانون مستقر معقد جداً في شكلها المختصر (باختيار وحدة تختار بعناية). كثافة قانون مستقر تتأثر بعاملين  $\alpha$  و  $\gamma$  يحققان  $0 \leq \alpha \leq 2$   $\alpha = 2$  تعطي القانون العادي  $\alpha = 1$  تعطي قانون كوشي كحالة خاصة ( $|g| \leq 1 - |a|$ )

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt \text{ سبق}$$

و إذا وضعنا  $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{-t} dt$  لكل  $r > 0$  (هذه الدالة جاما gamma لأولير Euler تحقّق من

بين خصائص أخرى)  $\Gamma(n) = (n-1)!$  لكل  $n$  عدد صحيح تكون الكثافة  $f(x)$  معطاة بالقاعدة

$$0 < \alpha < 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\prod x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(\alpha k + 1)}{k!} |x|^{-\alpha k} \sin \left\{ \frac{k\pi}{2} (\gamma + \alpha - \frac{2\alpha}{\pi} \text{Arg}(x)) \right\}$$

$$1 < \alpha < 2$$

$$f(x) = \frac{1}{\rho x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(\frac{k}{a+1})}{k!} |x|^k \sin \left\{ \frac{k\pi}{2a} (g + a - \frac{2a}{p} \text{Arg}(x)) \right\}$$

حيث نضع  $\text{Arg}x = \pi$  إذا كان  $x > 0$  و  $\text{Arg}x = 0$  إذا كان  $x < 0$ . هذه القواعد حصل عليها H Bergstrom و W Feller في ١٩٥٢.

لا تمثل هذه القواعد من ناحية الأخرى التعبيرات الأبسط التي يمكن أن نحصل عليها، حيث تحويلات Fourier تأخذ شكلاً أقل تعقيداً، نسبياً.

لقوانين الاحتمال هذه تطبيقات عديدة، وهناك أسباب قوية لاعتقاد أنها تصف فعلاً مجموعة من الظواهر الطبيعية، من بين هذه الظواهر نذكر كميات متعلقة بقياس تغيرات الطقس مثلما يمكن ذكر تغيرات في قيم الأسهم.

وقعت دراسة النماذج المتعلقة بالقوانين المستقرة في المنشورات العلمية في العقود الأخيرة إثر أعمال Benoit Mandelbrot بصفة خاصة، التي أظهرت علاقتها الوطيدة بالخاصيات الهندسية لأشكال ذات بعد غير الأعداد الكاملة (Fractals) نحيل القارئ إلى Mandelbort 1975 و Gliick(1988) و Falconer(1990). لمزيد من التفاصيل في هذا الموضوع.

فيما يتعلق بالخصائص العامة للقوانين المستقرة نحيل إلى Lukacs (1970) و فيما يخص تحليلها الإحصائي يمكن الرجوع إلى:

Adaptive Estimation of the parameters of stable Laws S.Cosorgo

Coll Math J.Bolyai 36 North Holland(1984)

الخاصية الطبيعية للقوانين المستقرة تبين أيضاً أنه من الطبيعي لبعض الكميات العشوائية ألا يكون لها توقع رياضي. الحالة الوحيدة لقانون مستقر غير عادي الذي تأخذ فيه الكثافة شكلاً بسيطاً - و نقصد هنا قانون كوشي- هي من هذا الصنف. نلاحظ بالفعل أن هذا القانون ليس له توقع، حيث لا يمكن أن نسد معنى للتكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$$

من السهل- نسبياً. أن نحكي اصطفاً متتالية المعدلات من الدرجة  $n$  لمتتالية متغيرات مستقلة تتبع قانون Cauchy نلاحظ أنه في حين- حسب قانون Kolmogorov للأعداد الكبيرة- هذه المعدلات ليست تقاربياً عندما تؤول  $n$  إلى  $\infty$ .

سلوك المعدلات محير، بما أن القيم المشاهدة مع مرور الزمن تميل نحو الاستقرار تارة؛ لتقوم بعد ذلك بقفزات في اتجاه أو في غيره بتذبذبات عنيفة و غير متوقعة. هذا الصنف من التغير مفاجئ باستمرار الذين يشاهدون لأول مرة ظاهرة من هذا الصنف. نتوقع- عادة- أنه يجب أن نشاهد في كل الحالات تقارب المعدلات نحو نهاية محدودة مع ذلك، و على الرغم من أن التقارب يحصل في أغلب الحالات، توجد حالات عديدة مصنفة، حيث لا يحدث التقارب تركيبياً. يحسن في هذه الحالة أن نجد تأويلاً صحيحاً للظاهرة دون أن نلجأ بطريقة خاطئة إلى إسناد التذبذبات لعوامل خارجة عن المشاهدة.

## الفصل الرابع

# الأساسات المنطقية لحساب الاحتمالات إنشتاين والحركة البروانية نموذج كولمو جوروف

فيما سبق، قدّمنا تفسيرات إجمالية لفكرة الاحتمال، ويجدر بنا الآن أن نكون أكثر دقة في ما يخص النموذج المستعمل لوصفه، كذلك علينا أن نفرق بدقة بين الاحتمالات كنظرية رياضية و الاحتمالات كوسيلة وصفية للعالم الذي نعيش فيه.

نقاشات عديدة حصلت في ما يخص وجود الاحتمالات في الطبيعة أو عدم وجودها، يوجد في هذا المجال " الموضوعيون " الذين يقرّون بأنّ الاحتمال موجود طبيعياً لأسباب تناظر فيزيائي، حتى وإن كنا لا نستطيع تحديد ذلك دائماً بطريقة واضحة هكذا لعب القفا والوجه والورق تقدّم أمثلة احتمالاتها معرفة بصفة موضوعية. من وجهة نظر أخرى "الذاتيون " لا يريدون رؤية احتمال مسند لكلّ حدث ممكن لظاهرة عشوائية، و لكن "درجة اعتقاد" مرتبطة بالمشاهد تعبر ببساطة برقم عن تقييمها لحظوظ حدوث ظاهرة ما، وراء كل هذا تلتصق- غالباً- معتقدات دينية أو فلسفية تهّم الجبرية و الحرية، قوّة الإله الخارقة و كثيراً من الأشياء الأخرى.

من جهة نظرنا، يمثل هذا خليطاً سيئاً يؤدّي إلى ضياع و صراعات بعيدة كلّ البعد عن النقاشات العلمية الجادة، فحساب الاحتمالات علم رياضي دقيق مثل: الهندسة، الجبر، أو التحليل، ويجب أن نفرّق بين هذا العلم و بين الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها بتطبيق نموذج احتمالي على الكون الذي نعيش فيه.

ننذكر الثورة التي أتى بها نموذج النسبية في تفسير ظواهر فيزيائية مناقضة لقوانين الميكانيكا الكلاسيكية، لكن لا يوجد أي فيزيائي جادّ قادر على إثبات أنّه لا يوجد نموذج أدقّ يؤدّي إلى فهم أفضل لتكوين المادّة أو تفسير بعض الظواهر الفلكية المستعصية على الفهم- ظاهراً- على ضوء النظريات الحالية، يحصل ببساطة أنّه في عدد كبير من الظواهر القابلة للمشاهدة توافّق النتائج التي تقرّها النظريات المشاهدات، هذا هو المقياس الوحيد لملاءمة النموذج، وإذا لم يكن كذلك فيجب بناء نموذج آخر.

مثلما أنه لا يمكننا إثبات مسلمة، فإنه دون شك - يستحيل أن نثبت أو نفى- منطقيًا- واقع أن الاحتمالات توجد خارج عقول الرياضيين، لكن من الممكن مشاهدة ملامحة النموذج لعدد كبير من الظواهر وإعطاؤه- بهذه الطريقة- شرعية تجريبية، إضافة إلى ألعاب المصادفة التي تشكل مثالاً اصطناعياً نوعاً ما، نستطيع أن نذكر- في الدرجة الأولى- حركة الجزيئات في سائل، التي تعطي صورة حيّة للحركة البراونية أو عملية (Weiner Levy) هكذا إذن إناء مملوء بالغاز يحتوي عدداً مهولاً من الذرات الهائجة في حركة دائمة تجعلها تتصادم فيما بينها و على جوانب الإناء محدثة آثاراً قابلة للملاحظة والتوقع بوساطة حساب الاحتمالات.

ليس من غير المجدي أن نذكر ببعض النقاط في هذا الموضوع التسمية " حركة براونية " تعود إلى Robert Brown عالم نبات إنجليزي شاهد في (١٨٢٧) أن جزيئات صغيرة معلقة في سائل غير متحرك تتعرض لحركات غير منقطعة و عشوائية- في الواقع- الجديد في مشاهدة Brown يتأى بصفة خاصة من طبيعة السائل الذي توجد فيه الجزيئات و استعمال المجهر، الظاهرة شوهدت في الغاز و أولت بأنها حركات تتقل. فيما يخص مشاهدة حركة جزيئات الغبار في مكان مظلم فيه شعاع ضوء فيلتأكد هذا متاح للجميع حتى أن الظاهرة مذكورة في Rerum Natura (عناصر من الطبيعة) Titus Lucrece (القرن الأول قبل المسيح Lucretius Carus ) ونقدم هنا ترجمة حرة "شاهدوا ماذا يحدث عندما تدخل أشعة الشمس غرفة مظلمة، سوف ترون جزيئات صغيرة مختلفة تتحرك في كل الاتجاهات في الفضاء المضاء، كمعركة متواصلة حيث تتصادم الواحدة مع الأخرى، صفاً وراء صف في متتالية معارك استثنائية، و من هذا نستطيع أن نتخيل قدر الذرات التي- أزلها- ترمى منها الواحدة نحو الأخرى في الفراغ اللامتناهي.

الجزيئات الصغيرة الموجودة تتحرك بسبب الصدمات المتكررة و غير المرئية للذرات، و تقذف بدورها بضرباتها الذرات الكبرى للغبار، هكذا يتكوّن الهيجان من الذرات و يظهر لحواسنا بوساطة الأجسام المتحركة بصدمات غير مرئية". لا يمكن أن نقدم تفسيراً أفضل للظاهرة من تفسير Lucrece

أما فيما يخص النمذجة الدقيقة، فلم يتم هذا إلا في عام (١٩٠٥) من قبل (Albert) (1879-1955) Einstein هذا الأخير كان مولعاً بأعمال Ludwig Boltzmann من ١٨٩٦ إلى ١٨٩٨ التي تتناول حركية الغازات. يأخذ في أطروحته، التي ظهرت في (١٩٠٥) حركة جزيء حر يتعرض للقوى المثابته من ذرات السائل الذي يتحرك فيه . سين إسقاط الحركة على مستقيم يقدم دالة  $X(t) \geq 0$

إذا فرضنا أنّ الموقع الأولي لهذا الإسقاط هو  $x_0=X(0)$  يكون الاحتمال  $P=P(x_1 < X(t) \leq x_2)$  وأنّ الموقع في اللحظة  $t > 0$  ويكون بين  $x_1$  و  $x_2$  معطى بالقاعدة:

$$P = P(x_1 < X(t) \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x_0, x, t) dx$$

حيث  $P = P(x_1 < X(t) \leq x_2)$  دالة أثبت إشتاين أنّها حلّ للمعادلة

$$\frac{\partial^2 p(x_0, x, t)}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 p(x_0, x, t)}{\partial t^2}$$

التي لها حلّ وحيد ممكن (باعتبار الشروط الحديثة) و هو كثافة قانون Gauss أو (Laplace-Gauss)

$$p(x_0, x, t) = e^{-(x-x_0)^2/(4Dt)} / \sqrt{4\pi Dt}$$

في التعبير الأعلى D ترمز لثابت قيمته لاقته للانتباه، نجد  $D = \frac{2RT}{NAf}$  حيث

وهو ثابت الغازات الكاملة الكوني يساوي أيضًا  $k_B \times N_A$  حيث  $R = 8,314472 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \pm 0.000015$

$K_B = 1.3806503 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$  ترمز لثابت بولتزمان T الحرارة و  $N_A$  عدد Avogadro

$$N_A = 6.02214179 \times 10^{23} \pm 0.00000030 \times 10^{23}$$

عدد الذرات المركبة الموجودة في mole أو ذرة مركبة جرمية قيمتها، المرجع هو عدد الذرات للنسخة ١٢ للكربون المحتواة في ١٢ جرام من الكربون. عدد Amedeo Avogadro (1776-1850) يسمّى بهذا الاسم تكريمًا له و  $f = \eta r^2 12\pi$  عامل الاحتكاك متناسب مع ضرب نصف قطر الجزيء في اللزوجة  $\eta$  للمسائل.

هذه هي القاعدة التي سمحت بتقييم تجريبي لعدد Avogadro باستعمال تجارب تهم الحركة البراونية، وهذه الأعمال التي مكنت Jean Perrin من الحصول على جائزة نوبل في (١٩٢٦).

تجارب أخرى لتحديد عدد Avogadro أتت إلى تأكيد صحة النموذج:

لنذكر بصفة عابرة أنّ نمذجة حركة جزيء بالحركة البراونية (أو عملية Weiner Levy) المتأتية من حساب Einstein ما هي إلا مقاربة. حسابات أنق طوّرت من طرف الفيزيائي البولوني Marian Von

(1872-1917) Smoluchowski لأخذ قوي خارجية يعين الاعتبار، كقوة الجاذبية، وكذلك من طرف Leonard Orstein (1880-1941) و George Uhlenbeck (1900-1980) الذين بنوا في 1930 نظرية رياضية للعملية تسمى عملية Ornstein-Uhlenbeck مقدمين نظرية أدق (G.E Uhlenbeck

(And L.S Ornstein 1930 on the Brownian Motion Phys .Rev 36, 823-841

المثال السابق لاستعمال قوانين الاحتمال لوصف حركات الجزيئات على مستوي الذرات، يبين الفترة العامة للنماذج الاحتمالية لإعطاء تأويلات كمية لظواهر فيزيائية، عدد آخر من الأمثلة المختلفة من هذا الصنف يؤدي- دون شك- إلى تأكيد- بالتجربة- استعمال هذه النماذج لمجمل علوم المادة، رغم هذا الخلافات على الطبيعة الموضوعية للاحتمالات موجودة. المقولات الآتية تبين هذا النقاش Bruno de Finelli (1985-1906)، المذكور، من الأنصار المعروفين لذاتية الاحتمالات Mark Kac (1914-1984) و Denis Victor Lindley (1923)

مذكوران بالتالي: الأول احتمالي موضوعي، و الثاني Bayesian ( مستعمل لطرق Bayes في نظرية القرار) ذاتي (1961) "M. Kac" ليس من السهل أن نقول ما نظرية الاحتمالات؟ ليس ممكناً أن نحدد إلى أي مدى يمكن التحدث عن نظرية، اعتبر أن نظرية الاحتمالات ليست فقط مجالاً من مجالات الرياضيات و لا تنحصر في مجموعة متوافقة من المسلمات و النظريات، في رأيي حساب الاحتمالات هو طريقة تفكير". (1973) "D.Y. Lindley" موضوع الاحتمالات يدرس منذ أكثر من قرنين، و من البداية هناك جدل حول معناه، في وقت ما كان هذا الجدل يقتصر على المستوى الأكاديمي، و لكن بسبب انتشار الأفكار الاحتمالية إلى عدد كبير من النشاطات الإنسانية فإن الاحتمالات أنتجت نتائج عالية المستوى. أهمية الجدل هي أيضاً زادت بنسب مشابهة، و هذا واضح بصفة خاصة في الإحصاء، حيث يعاد النظر في المبادئ الأساسية حسب النقاشات حول معنى مبدأ الاحتمال.

حينما يكون من الصعب الجواب عن سؤال ما، يكون من الممكن أن سبب ذلك هو أن السؤال مطروح بطريقة خاطئة، و كنتيجة يستحيل الإجابة عنه، هذه هي طريقة Finetti للخروج من المأزق: مبدأ الاحتمال غير موجود، هو موجود خارج الفرد، أي ليس موجوداً بطريقة موضوعية. الاحتمال هو وصف لعدم تأكّدكم " قراء هذه الكلمات " ممّا يخص العالم . أمّا نحن فلن نأخذ موقفاً بين الذاتية و الموضوعية الموقنين بالرأي أن كلّاً من وجهتي النظر يمكن أن يكون لها أهمية، و أنه يوجد حالات حيث وجود احتمال موضوعي تابع

يبدو طبيعياً جداً بجانب حالات حيث إدخال قانون احتمال يبدو اصطناعياً، وحيث مبدأ الاحتمال الذاتي يبدو مناسباً أكثر (مثال: نظرية القرار الإحصائية) في النهاية سياق التطبيق هو المحدد.

تطوير مسلمات دقيقة للاحتمالات كنظرية رياضية أخذ قروناً. كلّ المؤسسين التاريخيين للاحتمالات منذ:

Cardan Gerolamo Cardano (1501-1576), Galileo Galilei (1564-1642), Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662), Jacques Bernoulli (1654-1705), Christian Huygens (1629-1695), Pierre Remond de Montmort (1678-1679) (في مؤلفه "محاولة تحليل لألعاب المصادفة" 1708)

George Louis Leclerc de Buffon (1708-1788) Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761) (في مؤلفه الذي ظهر بعد وفاته "محاولة لحل مسألة صدف" 1763)

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Karl- Friedrich Gauss (1777-1855), Simeon –Denis Poisson (1781-1840)

ومثل أغلب الرياضيين إلى نهاية القرن 19 اكتفوا بتعريف الاحتمالات كقسمة "عدد الحالات المناسبة" على "العدد الجملي للحالات مع اعتماد وجود حالات أولية متوازنة الاحتمالات. يبدو شيئاً فشيئاً واضحاً على ضوء ما قلّمه

Andrei Andreyevitch Markov (1856-1922), Pafnouti Tchebychey (1821-1884), Alexandre Mikhailovitch, HENRI Poincaré (1854-1912) Nikolai Lobatchevski (1793-1856), Lyapounov (1857-1918), Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

أنّ هذا التعريف غير مرضٍ، حيث لا يمكن من التعامل مع قوانين الاحتمالات (دوال التوزيع) المتصلة كقانون Laplace- Gauss كما أنّه يطرح صعوبات نظرية مختلفة. لا يوجد- في الواقع- أي مشكلة في تناول- باستعمال طرق تركيبية- الاحتمالات في الظواهر التي يكون فيها عدد الحالات الممكنة منتهياً، لكن ماذا نفعل عندما يؤول هذا العدد إلى ما لا نهاية؟



المثال الأكثر طبيعية معطى بقانون Laplace – gauss الذي رأينا برهان وجوده " الفيزيائي " عددًا بالمصادفة أو حسب المصطلح المعهود، متغير عشوائي  $X$  يتبع قانونًا عاديًا أو قانون Laplace-Gauss ذي التوقع  $\mu$  و التباين  $s^2$ ، ما يرمز له  $N(\mu, s^2)$  إذا كان لكل  $-\infty < a < b < \infty$  احتمال انتماء  $X$  إلى الفترة  $(a, b)$  معطى بالتكامل :

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

مثل هذا التكامل (انظر صورة ٤) يعرف المساحة تحت منحنى Gauss بين  $a$  و  $b$ .

مثل هذا التعبير يبدو طبيعيًا حاليًا، حيث أصبح التكامل جزءًا من الثقافة (و يدرس اليوم في التعليم الثانوي)، علينا أن نعي أن ذلك لم يكن طبيعيًا في بداية القرن ١٩، تكامل الدوال المتصلة الذي يعطي معنى التعبير السابق في الواقع وقع تقديمه في (١٨٢٣) من طرف Augustin Louis Cauchy (1789-1857) و الاساسيات النظرية بقيت غير متطورة حتى تنمية تكامل Riemann الذي أدخله George Friedrich Bernhard Riemann (١٨٢٦-١٨٦٦) في ١٨٦٧.

السؤال الذي يطرح مباشرة في المثال المذكور سابقًا، قانون Gauss ، حيث نستطيع أن نعرف احتمال أن تأخذ  $X$  قيمًا بين  $a$  و  $b$  بتكامل. إذا كانت  $A$  الآن مجموعة جزئية من  $R$  مجموعة الأعداد الحقيقية كيف يمكن تعريف احتمال أن تأخذ  $X$  قيمًا في  $A$  ؟ يمكن أن نعتقد ببساطة أن ذلك الاحتمال معرف لكل  $A$  ، لكن الواقع أقل بساطة. لكي نفهم أكثر طبيعة المشكلة من الأسهل أن نعوض قانون Gauss بقانون منتظم. هذا التوزيع هو النموذج القياسي لمصطلح "يؤخذ عدد عن طريق المصادفة في فترة". إذا  $X$  بالتعريف متغير عشوائي موزع بانتظام على  $[0, 1]$  إذا كان لكل  $0 \leq a \leq b \leq 1$

$$P(a < X \leq b) = b - a = \int_a^b dt$$

إذا كانت  $A$  أي مجموعة جزئية من  $[0, 1]$  تحديد احتمال أن تكون  $X$  منتمية إلى  $A$  بالتكامل

$$P(X \in A) = \int_A dt \text{ أو بلغة أخرى طول } A.$$

نرى أنّ حساب الاحتمالات متّصل مباشرة بحساب التكامل، و تقدم الثاني حدّد تطور الأول.

بما أنّ مشكلة تحديد طول مجموعة جزئية  $A$  من  $[0,1]$  يكافئ بدقة حساب احتمال أن يكون متغيّر عشوائي منتظم يأخذ قيمة في  $A$  من الطبيعي أن نهتمّ بالحلول التي قدّمها الرياضيون. لم يحلّ المشكل إلّا في ١٩٠١ في جزئه المهمّ من طرف Henri Leon Lebesgue (١٨٧٥-١٩٤١) مع بناء التكامل الذي يحمل اسمه. الإضافات التي قدّمت لهذا التكامل من طرف Arnaud Denjoy (١٨٨٤-١٩٧٤) و Emile Borel (١٨٧١-١٩٥٦) تبيّن مع ذلك أنّ أيّ نظريّة رياضيّة ليست أبداً نهائية.

هذه التواريخ تفسّر بنفسها لماذا- بسبب قوة الواقع- كان يستحيل على الاحتماليين تطوير أساسات قويّة لحساب الاحتمالات قبل سير القرن العشرين، كان عليهم انتظار أن تصل نظريّة التكامل إلى مستوى كافٍ من النضج للارتكاز على ذلك، فحساب الاحتمالات و الإحصاء الرياضي (التخصّص الأخير يهتم طرق تأويل معطيات المشاهدة) هما علمان معاصران نموّهما لم يحصل إلّا مؤخّراً بالأساس منذ ١٩٢٠، وهذا رغم النتائج المتميزة- غالباً- التي وصلنا إليها سابقاً في غياب الأساسات المنطقيّة التي تضمن صحّتهما بكل دقّة، يمكن التفكير في هذا النموّ حيث مسلّمات علم ما طوّرت بعد مدّة طويلة من ولادته واستعماله. حتى و إن بدا ذلك مفاجئاً فيبدو أنّ التفكير - في الرياضيات- يتبع الفعل بسهولة أكبر من أن يسبقه.

في (١٩٠٠)، في ملتقى عالمي للرياضيات في باريس قدّم الرياضي الألماني David Hilbert (1862- 1943) محاضرة مشهورة طرح فيها ٢٣ مسألة غير معروفة الحلّ. كان لمحاضراته وقع كبير، وأثر في البحث لعقود تلت، من بين المسائل المطروحة المسألة رقم ٦ التي احتوت- بالضبط- الحاجة الملحة لتطوير مسلّمات دقيقة لحساب الاحتمالات.

شهد القرن ١٩ في ما يخصّ التخصصات الأخرى في الرياضيات تقدّماً ملحوظاً في الوضوح و الدقّة. بقي حساب الاحتمالات على هامش هذا التطوّر للأسباب التي ذكرناها سابقاً، و لهذا السبب لم يكن يعدّ كجزء من الرياضيات من طرف كثير من العلماء، و لكن كجزء خاصّ من الفيزياء (في المسألة رقم ٦ من المسائل المذكورة " وضع مسلّمات للفيزياء و العلوم التابعة لها ").

أول محاولة جدية لإعطاء إطار دقيق لاحتمالات كانت من طرف Ludwig Von Mises (1881- 1973) (انظر (L. Von Mises (1964)

كانت فكرة Von Mises هي الاعتماد على قوانين الأعداد الكبيرة لتعريف قوانين الاحتمالات للمتغيرات العشوائية، وكان لا بدّ حسب مسلمته- افتراض أنّ كلّ كمّ عشوائي يمكن تكراره عدداً غير منتهٍ من المرّات، من هذه المرّات نستطيع أن نبني التركيبية العشوائية الأساسية بوساطة مشاهدة ذبذبة الأحداث، هذه وجهة نظر إحصائية بالأساس هدفها تجاوز اعتراضات بعض معارضي الاحتمالات الذين ينفون الوجود الفيزيائي للاحتمال- إذا لم يكن مبدئياً- هناك وسيلة لحسابه بصفة طبيعية، كانت فكرة Von Mises أنّ كلّ احتمال يمكن بناؤه من مشاهدة عدد غير محدود من النسخ للظاهرة المعنية.

على الرغم من أنقاة تقديم Von Mises لكن لم تكن مسلمته مرضية تماماً كنقطة انطلاق لحساب الاحتمالات (على الرغم من بقائها ملائمة). وجدت النظرية منعزلة عن تطوّر التخصصات الأخرى في الرياضيات مثل نظرية التكامل، بالإضافة إلى أنّ المسلمّات لم تخوّل إلا تناول ظواهر يمكن إعادتها بشكل غير متناهٍ دون إثبات وجودها في كلّ مرّة.

توصّل الرياضي الروسي (1903-1987) Andrei Nikolayevitch Kolmogorov

في سنة ١٩٣٣ إلى تأسيس قاعدة المسلمّات التي تطورت على أساسها الاحتمالات إلى يومنا هذا (Kolmogorov A N 1950)

(Foundations of The Theory of Probability, Chelsea, New York)

تأتي أفضلية نموذج Kolmogorov- إضافة إلى بساطته- من أنه يصل منطقياً حساب الاحتمالات بحساب التكامل كما كان يمكن أن يتوقّع، ممّا يسمح بتطبيق على- الإطار الاحتمالي- ترسانة كل النتائج والتقنيات للتحليل الرياضي.

ليس من العجب إذ أنه بعد تعريف Kolmogorov للأساسات لحساب الاحتمال تطور هذا العلم بسرعة كبيرة خلال الخمسين سنة التي تلت. هكذا- بسبب قوّة الواقع- هذا التخصص ولد بحق في ١٩٣٣ كفرع غير نمطي من الرياضيات.

تشكيل Kolmogorov يعَدُّ التركيبة الأساسية لفضاء الاحتمالات  $(\Omega, A, P)$  وهذا يفترض المعطى الأولي  $\Omega$  مجموعة الأحداث الأولية غير القابلة للتجزئ، كل حدث مثل  $\omega \in \Omega$  (تعبير يعني  $\omega$  تنتمي إلى  $\Omega$ ) يصف كلياً إمكانية نظرية لتحقّق الظاهرة المدروسة، أي حدث  $A$  يجب أن يكون منطقيّاً بحيث لكل  $\omega \in \Omega$  نستطيع القول إذا تحقّق  $\omega$ ، إذا كان الحدث  $A$  متحقّقاً أولاً، نلاحظ أنّ هذه الخاصية تمكّن من أن تكون  $A$  ممثلة مع المجموعة الجزئية من  $\Omega$  المتكوّنة من كلّ  $\omega$  تؤدي إلى تحقيق  $A$ . هكذا مجموعة كلّ الأحداث الممكنة نظريّاً تتساوى نظريّاً مع المجموعة  $P(\Omega)$  مجموعة أجزاء  $\Omega$ .

العمليات المعهودة لنظرية المجموعات مثل: الاتحاد، الفرق، التقاطع يمكن تأويلها مباشرة بمصطلح تحقّق أو عدم تحقّق الأحداث.

$A \cup B$ : اتحاد  $A$  و  $B$  الحدث الذي يتحقّق إذا تحقّق واحد على الأقل من الحدثين:  $A$  و  $B$ .

$A \cap B$ : تقاطع  $A$  و  $B$  الحدث الذي يتحقّق إذا تحقّق  $A$  و  $B$  معاً.

$A - B$ : الفرق  $B$  و  $A$  الحدث الذي يتحقّق إذا تحقّق  $A$  ولم يتحقّق  $B$ .

( $\emptyset$ ): المجموعة الخالية: الحدث المستحيل: حدث لا يتحقّق و فائدته أنّه يجعل العملية  $A \cap B$  دائماً ممكنة حتى عندما يكون  $A$  و  $B$  غير متلائمان (لا يمكن تحقيقهما معاً).

$\Omega$ : مجموعة كلّ الأحداث الممكنة نظريّاً: الحدث الذي يتحقّق دائماً.

(الملاحظة نفسها هنا للعملية  $A \cup B$  تصبح دائماً ممكنة بإدخال  $\Omega$ ) نكتب في الاتجاه نفسه  $A \subseteq B$  (محتواة في  $B$ ) إذا كان: كلّما تحقّقت  $A$  تحقّقت  $B$ .

نعطي بعض الأمثلة على هذه النمذجة.

(١) لعبة بسيطة لفا وجه توصف بالأحداث الأولية الممكنة  $F$ : الوجه  $P$ : قفا ولذلك  $\Omega = \{F, P\}$  و

الأحداث المشاهدة هي ببساطة

$$\Omega = \{F, P\}, \{F\}, \{P\}, \emptyset$$

(٢) لعبة القفا و الوجه تكرر مرتان نجد

$$\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}$$

و الأحداث الأخرى هي :

$$\emptyset, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_4\}, \{w_2, w_3\}, \{w_2, w_4\}, \{w_3, w_4\}, \{w_1, w_2, w_3\},$$

$$\{w_1, w_3, w_4\}, \{w_2, w_3, w_4\}, \{w_1, w_2, w_4\}, \Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

"كمثال الحدث " لا يظهر قفا إلا مرة واحدة يساوي  $\{w_2, w_3\}$

بعد تمثيلنا للتجربة و نتائجها بالثنائي  $(\Omega, P(\Omega))$

علينا أن نعطي معنى لتعريف الاحتمال على  $(\Omega, P(\Omega))$

نفرس كمعطي أنّ المجموعة  $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$  للأحداث القابلة للاحتمال ( أي يمكن تعريف احتمالها نسمي

جبر الأحداث إذا كانت تحقق الأحداث الآتية

(i)  $\mathcal{A}$  تحتوي  $\Omega$

(ii) إذا كان  $A$  و  $B$  في  $\mathcal{A}$  فإن  $A \cap B, A \cup B, A - B$  و  $B - A$  تنتمي إلى  $\mathcal{A}$  عند ذلك نسمي احتمالاً على  $\mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$  كلّ دالة  $P$  تأخذ قيمها في  $[0,1]$  بحيث

(i) لكل  $A$  و  $B$  في  $\mathcal{A}$  حيث  $A \cap B = \emptyset$  و  $B$  و  $A$  لا يتحققان معاً عندنا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(ii) (مسلمة الاتصال القابل للعد) إذا كانت  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \dots$  متتالية متناقصة ( للاحتماء ) من

الأحداث وتقاطعها خالٍ (لا يوجد  $\omega \in \Omega$  بحيث تحققها ينتج عنه تحقق كلّ الأحداث

عن إمكانية أخذ النهاية لمتتاليات أساسية لنموذج Kolmogorov، لأنها تسمح بربط فكرة

الاحتمال بفكرة القياس، من الممكن مناقشة ضرورة هذه المسلمة التي ليست بطريقة واضحة

طبيعية، مع ذلك فإنّ كلّ النماذج الاحتمالية البسيطة تحققها المسلمة. بالتأكيد. بديهية إذا كان  $\Omega$

منتهيًا، و هي كذلك متحققة بسبب خاصيات التكامل عندما نتناول الاحتمال المسند إلى متغير عشوائي حقيقي مثلًا.

على سبيل المثال، إذا كان  $X$  يتبع القانون العادي ( $m s^2$ )  $N$  نأخذ  $\Omega=R$  و  $\mathcal{A}$  مجموعة كل الاتحادات المنتهية لفترات (منتهية أو غير منتهية)  $R$ ، الاحتمال الذي نرمز له بالرمز  $P_X$  يعرف لكل  $A \in \mathcal{A}$  بالمساواة

$$P_X(A) = P(X \in A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A \exp\left(\frac{-(t-u)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

الأهمية الأساسية لنموذج Kolmogorov تتلّى من أنه يؤدي إلى تمديد طبيعي لاحتمال، المعرف مبدئيًا على جبر أحداث  $\mathcal{A}$ ، لمجموعة أحداث أشمل تسمى سيجما حقل أحداث مغلقة تحت العمليات المعهودة على المتاليات ( و ليس فقط عددًا منتهيًا من العمليات). نسمي بصفة عامة سيجما حقل كل جبر أحداث  $(\Omega, P)$  مغلق تحت الاتحاد و التقاطع القابلين للعدد. سيجم حقل مصطلح رياضي-  $\sigma$ - حقل، و بما أنّ  $(\Omega, P)$  سيجما حقل فمن السهل أن نرى أنه لكل مجموعة جزئية  $\beta \subset P(\Omega)$  تقاطع السيجما حقلها التي تحتوي  $\beta$  وهو أيضًا سيجما حقل. نسمي هذا السيجما حقل، السيجما حقل المولد ب  $\beta$  و نرمز له بالرمز  $\sigma(\beta)$

النتيجة الآتية لصاحبها الرياضي اليوناني Constantin Caratheodory (1873-1950) و المعروفة تحت اسم نظرية Caratheodory للتمديد أثبتت في 1918 في الإطار العام لنظرية المقياس، إذا كان  $P$  احتمالًا معرفًا على جبر أحداث  $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$  متكوّن من مجموعات جزئية من  $\Omega$  إذن تعريف  $P$  يمدّد بطريقة وحيدة للسيجما حقل  $\sigma(\mathcal{A})$  المولد ب  $\mathcal{A}$  في  $P(\Omega)$ . ليس متاحًا لنا هنا. أن نقدم برهانًا لهذه النظرية التي يجب تأكيد عدم بساطتها. النسخة المذكورة من النظرية تعود في الواقع إلى تمديد لاحتمال يحاكي نموذج تكامل Lebesgue، يمكن هذا التمديد من تعريف احتمال أحداث مثلًا: في لعبة قفا وجه متتالية و غير منتهية ("نذبة" "وجه" "تؤول إلى 1/2 عندما تؤول n إلى  $\infty$ ). دون التمديد يكون الأمر خاليًا من المعنى، كذلك بسبب هذه النظرية يمكن بناء أحداث احتمالها صفر دون أن تكون خالية. في تكرار منتهٍ للعبة القفا و الوجه الحدث الوحيد ذو الاحتمال صفر هو  $\emptyset$  الحدث المستحيل.

من هنا، فإنّه ما كان للقانون القوي للأعداد الكبيرة أن يوجد دون تمديد فكرة الاحتمال المعطاة من طرف Caratheodory، هذا يسوّغ المكانة التي منحناها لهذه التطورات رغم طابعها النظري، من المؤسف أنّه يصعب فهم النظرية العصرية للاحتتمالات دون الدخول في مثل هذه التفاصيل التي دونها لا نستطيع أن نفهم الطبيعة العميقة للأشياء.

في المحصلة علينا ذكر وجود نماذج عددية للخطأ لا تحقّق المسلّمات (بصفة خاصّة خاصية الجمع)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ إذا كان } A \cap B = \emptyset$$

واحدة من هذه النظريات التي لها نجاح نسبي لتطبيقاتها في الآلية هي نظرية المجموعات المشوشة لصاحبها- متخصّص الحاسب الأمريكي، من أصل روسي إيراني- لطفى عسكرزادة (1921) إجمالاً في النظرية الكلاسيكية للمجموعات كلّ مجموعة A تصنفها الدالة المؤشرة  $I_A(t)$  التي تساوي 1 إذا كانت  $A \in t$  و صفرًا إذا كان  $t \notin A$ ، في نظرية المجموعات المشوشة نعوض الدالة المؤشرة بدالة اعتقاد  $b(t)$  تأخذ قيمًا عشوائية بين 0 و 1 التي تصف درجة الاعتقاد التي يسندها الملاحظ للحدث  $\{t \in A\}$ ، مع ذلك رغم جوانبها النظرية المغرية النظريات البديلة تصطدم بغياب الدعم التجريبي الفيزيائي. كما سنرى الاحتمالات حاضرة في الكون و هذا يسوّغ دراستها.

## الفصل الخامس

# الإرقام العاديّة لـ Borel والتفسير الطبيعي لقانون الإعداد الكبرى في لعبة القفا والوجه

كما أسلفنا في نهاية الباب الثاني فإن قانون الأعداد الكبرى لمتتالية أحداث قفا و وجه غير منتهية يمكن تأويله بطريقة غير حدسية (مثل التوازن الطبيعي بين القفا و الوجه). إطار نظرية الأعداد، حيث حساب الاحتمالات له تطبيقات لافتة للانتباه يقدم لنا التبيان الواضح في هذا الباب و الذي يليه.

لقد ذكرنا- فيما سب-، مثالين فيزيائيين لطواهر احتمالية:

- (١) تكرار غير متناه لألعاب قفا ووجه مستقلة: كما في مسلمات Kolmogorov فضاء الأحداث الأولية  $\Omega$  هو مجموعة متتاليات  $u = (u_1, u_2, \dots)$  حيث لكل  $n=1, 2, \dots$  عنصر المتتالية  $u_n$  يساوي ٠ لوجه ١ للوجه. الجبر  $\mathcal{A}_1$  للأحداث الذي يعرف عليه مبدئياً الاحتمال  $P_1$  يتكون من  $\emptyset$  وكلّ الاتحادات المنتهية لأحداث من الشكل  $n \geq 1$

$$A = \{u \in \Omega, u_1 = \alpha_1 \dots u_n = \alpha_n\}$$

احتمال حدث مثل هذا يحدّد ب  $\frac{1}{2^n}$  حيث  $\alpha_i = 0$  أو  $1$  لكل  $i=1, 2, \dots, n$

- (٢) القانون المنتظم على  $[0, 1]$ : المتغير العشوائي الذي يتبع هذا القانون يوافق فكرة "سحب بطريقة عشوائية عددا بين ٠ أو ١". المجموعة  $\Omega$  للأحداث الأولية هي هنا  $[0, 1]$  فترة الأعداد الحقيقية بين ٠ و ١. الجبر  $\mathcal{A}_2$  الذي يعرف عليه، مبدئياً، الاحتمال  $P_2$  يتكون من كلّ الاتحادات المنتهية للفرقات المحدودة غير المتقاطعة المحتواة في  $[0, 1]$ .

حيث  $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$  حيث  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq 1$  الاحتمال  $P_2$  على  $\mathcal{A}_2$  يعرف كالتالي:  
 $P_2(A) = P(u \in A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$  في الواقع سوف نلاحظ أنّ هذين المثالين المختلفين في الظاهر هما واحد، و أنّه من الممكن المماثلة، بصفة طبيعية الأشياء العشوائية و الاحتمالات التابعة لها. حتى



نأسس هذا التماثل، يكفي أن نلاحظ أن كل عدد  $u \in [0,1]$  يمكن أن يمثل بالنشر الثنائي

$$u \in [0,1] \leftrightarrow U = (u_1, u_2, u_3, \dots)$$

حيث  $u_n = 0$  أو  $1$  لكل  $n = 1, 2, \dots$  وهذا ممكن بسبب المساواة :

$$u = j(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

الكلاسيكي) مثلاً

$$\frac{1}{3} = 0.333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

ونلاحظ أن الدالة  $U \rightarrow j(U) = u$  دالة من  $\Omega_1$  إلى  $\Omega_2$  في حين أنه لرقم  $u \in \Omega_2 = [0,1]$  معرف بالصورة العكسية

$$j^{-1}(u) = \{U \in [0,1] \mid j(U) = u\}, u \in U \hat{=} j^{-1}(u)$$

لكن هذا المقدم وحيد فقط في حالة الأعداد:  $[0,1]$  التي لا تكون من الشكل  $\frac{k}{2^n}$  حيث عدد  $k$  صحيح.

مثلاً في التعداد الثنائي يمكن المماثلة بين

$$\frac{1}{2} (1, 0, \dots) \text{ و } \frac{1}{2} (0, 1, \dots)$$

(للسبب نفسه نكتب في الترقيم العشري  $1,0000 = 0,9999 \dots$  كتابة مموّعة بأن كل عدد حقيقي  $x$

تمثّل مع  $(d_1, d_2, \dots)$  في التعداد العشري مع  $d_n = 1, 2, 3, \dots, 9$  و  $n = 1, 2, \dots$  يعرف كنهاية

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{10^i}$$

ونلاحظ في هذا السياق أن المساواة  $1 = 0,999 \dots$  أو في التعداد الثنائي، المساواة  $\frac{1}{2} = (0, 1, 1, \dots)$

ما هي إلا مثال على متناقضة Zenon d'Elée (-495, -430) التي تعود إلى القرن الخامس قبل المسيح و

فيها أن أكيل Achilles يلاحق سلحفاة و لا يستطيع أبداً اللحاق بها. التسويغ يتمثل في قول: إنه كلما وصل

Achille إلى موقع السلحفاة تكون هذه الأخيرة غير موجودة، حيث تقدّمت خطوة صغيرة في الأثناء، في الواقع Achilles يلحق دوماً بالسلحفاة لأنّ المجموع اللامتناهي للمسافات المقطوعة بين الفترات المتتالية لتحليل Zenon d'Elée تكون متسلسلة تقاربية، نتحقّق من أنّ المجموعة  $N_2$  للإعداد  $u$  من الشكل  $\frac{k}{2^n}$  حيث  $k$  عدد صحيح احتمالها  $P_2(N_2)=0$  في  $\Omega_2 = [0,1]$ . نتحقّق كذلك من أنّ  $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$  الذي يقابله في  $\Omega_1$  يتكون من المتتاليات  $U=(u_1, u_2, \dots)$  من  $0$  و  $1$  والثابتة بعد رتبة معينة احتمالها  $P_1(N_1)$  صفري.

التطبيق  $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 = [0,1]$  (لنذكر أنّ  $\Omega_1$  هي مجموعة المتتاليات

$U=(u_1, u_2, \dots)$  متكونة من  $0$  و  $1$ ) يحقّق العلاقات الآتية التي تربط  $\Omega_1$  بـ  $\Omega_2$ .

$\varphi$  تطبيق شامل من  $\Omega_1$  إلى  $\Omega_2$  (كلّ عنصر من عناصر  $\Omega_2$  صورة بالتطبيق  $\varphi$  لعنصر من عناصر  $\Omega_1$  على الأقل).

$\varphi$  تقابلية من  $\Omega_1 - N_1$  إلى  $\Omega_2 - N_2$  (كلّ عنصر من عناصر  $\Omega_2 - N_2$  هو صورة لعنصر وحيد من  $\Omega_1 - N_1$  بالتطبيق  $\varphi$ ).

نستطيع إذن أنّ نمائل  $\Omega_1 - N_1$  و  $\Omega_2 - N_2$  بوضع  $A_2 = \varphi(A_1)$  لكلّ

$$A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ بما أنّ } A_1 \subseteq \Omega_1 - N_1 \text{ نلاحظ أنه لكل } A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ } 0 = P_2(N_2) = P_1(N_1)$$

$$(\Omega_2 - N_2) = P_2(\varphi(A_1))P_1(A_1) = P_1(A_1 \cap (W - N_1)) = P_2(\varphi(A_1)) \cap$$

هذه المساواة تؤدّي بصفة عامّة إلى وجود حدث  $A$  ينتمي إلى  $\Omega_1$  ممائل لـ  $A_2$  ينتمي إلى  $\varphi(\Omega_1)$  إذا كان الفرق  $(\varphi(A_1) - A_2) \cup (A_2 - \varphi(A_1))$  ينتمي إلى المجموعة ذات الاحتمال الصفري  $N_2$ . هذه العملية تبين أنّ الاحتمالين  $P_1$  و  $P_2$  المعرفين على أحداث متواحدة متساويين.

بهذه العملية نستطيع موحدة النموذجين  $(\Omega_1, \sigma(\mathcal{A}_1), P_1)$  و  $(\Omega_2, \sigma(\mathcal{A}_2), P_2)$ . إنّه الآن مهم أن نرى كيف يتحوّل إلى  $(\Omega_2, \sigma(\mathcal{A}_2), P_2)$  قانون الأعداد الكبيرة الذي حصلنا عليه على  $(\Omega_1, \sigma(\mathcal{A}_1), P_1)$  و الذي يعبر عن التقارب باحتمال 1 لمتوسط المتتالية  $u_1, u_2, \dots, u_n$  نحو  $\frac{1}{2}$ .

بالتحويل إلى  $(\Omega_2, \sigma(\mathcal{A}_2), P_2)$  قانون الأعداد الكبيرة على  $(\Omega_1, \sigma(\mathcal{A}_1), P_1)$  نحصل على :

توجد مجموعة جزئية  $A$  من  $[0,1]$  مقياسها صفر، بحيث كلّ عدد  $u$  ينتمي إلى المتممة  $A^c = [0,1] - A$  يكون له النشر الثنائي  $U = (u_1 u_2 \dots)$  من متتالية 0 أو 1 بحيث

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{2}$$

نلاحظ إذن أنّ كلّ الأعداد في  $[0,1]$  باستثناء الأعداد التي تنتمي إلى مجموعة مقياسها صفر والمعروفة سابقاً تحقّق قانون الأعداد الكبيرة المقابل للعبة " القفا و الوجه " أي أنّ معدلاتهم تزول إلى  $\frac{1}{2}$ . الأعداد من هذا الصنف المكونة للمجموعة  $A^c$  سمّيت أعداداً عادية من طرف Emile Borel (1871-1956) هذه الخاصية المثبتة في 1909 من طرف Borel تمثّل أول مثال للقانون القوي للأعداد الكبيرة قبل أن يثبت Kolmogorov الشكل العام في 1928.

سوف نعود في آخر الباب للتطوّر التاريخي لقانون الأعداد الكبرى الذي تلى اكتشاف Borel، نتناول في طريقنا تركيبية المجموعات ذات المقياس الصفري- كتتمّة لنقاشنا لهذا الموضوع- في الباب الرابع. بصفة عامة مقياس Lebesgue لفترة  $A = [a, b]$  من المستقيم الحقيقي  $R$  يتساوى مع طولها

$\lambda(A) = a - b$  كما ذكرنا في السابق، في الباب الرابع، نظريّة Lebesgue مع نظريّة Caratheodory للتعميم تسمح بتوسيع تعريف المقياس Lebesgue  $\lambda(\cdot)$  إلى أصغر سيجما حقل يحتوي الفترات، هذا السيجما حقل يتساوى مع السيجما حقل البورالي  $\beta = \beta(R)$  بصفة عامة في فضاء توبولوجي  $F$  السيجما حقل البورالي يرمز لأصغر سيجما حقل مجموعات جزئية من  $F$  تحتوي المجموعات المغلقة والمفتوحة  $\beta(R)$  يعطي مثلاً خاصاً لهذا التركيب في حال  $F = R$  نستطيع استنتاج  $\lambda(A)$  لكل  $A \in \beta(R)$ ، القيمة المناسبة

تكون منتهية إذا كانت A محدودة، تمديد المقياس من طرف Lebesgue يؤدي إلى توسيع أشمل لهذا التعريف لسيجما حفل  $a(R) \in b(R)$

لمجموعات جزئية من R تسمى قابلة لقياس Lebesgue مع هذا من الطبيعي أن نسال هل من الممكن توسيع التعريف إلى كل مجموعة جزئية؟

الجواب عن هذا السؤال هو بالنفي. نصل بسهولة إلى تناقض لو قلنا إن مثل هذا التمديد موجود.

يمكن أن نفكر - بشيء من السذاجة - أن المقياس  $\lambda(A)$  موجود لكل  $A \subseteq R$  ولتأكيد هذه الفكرة يمكن تخيل المستقيم الحقيقي كسلك حديدي غير منته يقصن إلى أجزاء لنحصل على قطع نحسب طولها بحساب الكتلة بالميزان.

في الواقع دون أن ننتبه لذلك فإن فكرة أن نحصل على مجموعة جزئية من R بقطع معين يفرض أن نكون أجرينا هذه العملية بمتتالية (قابلة للعد) ضربيات مقص.

هذا يفسر أن الجواب النهائي لمسألة التمديد للمقياس من طرف Lebesgue في (1901) أوجد تفرقة بين المجموعات القابلة للقياس و المجموعات غير القابلة للقياس، الأولى يمكن تعريف مقياس Lebesgue لتقاطعها مع أي فترة محدودة، و الثانية ليست لها هذه الخاصية، إذن نرى أن المجموعات الجزئية القابلة للقياس بتعريف Lebesgue هي سيجما حفل يحتوي الفترات (ومن ثم يحتوي السيجما حفل البورالي  $\beta(R)$  و لهذا ليس من الممكن الحصول على مجموعة جزئية من R غير قابلة للقياس بمتتالية قابلة للعد عمليات. وجود مجموعات لا تقاس بمقياس Lebesgue يمكن إثباته بوساطة مسلمة الاختيار على الرغم من عدم قدرتنا على تكوين واضح لمثل هذه المجموعات.

مجموعة N ذات قياس Lebesgue صفري تقابل الفكرة الحدسية لمجموعة جزئية ذات "كتلة خطية" صفرية على المستقيم الحقيقي، ويمكن وصفها بأن لكل  $\varepsilon > 0$  يمكن أن تحتوي في مجموعة جزئية  $A_\varepsilon$  قابلة للقياس بحيث مقياس Lebesgue  $\lambda(A_\varepsilon)$  يكون أقل من  $\varepsilon$ . الخيار الأبسط لمثل هذه  $A_\varepsilon$  اتحاد قابل للعد لفترات

ما يؤدي إلى  $A_\varepsilon = \bigcup_1^\infty [a_{n,\varepsilon}, b_{n,\varepsilon}]$  حيث  $N \subset A_\varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n,\varepsilon} - a_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

على الرغم من بساطة الصورة التي توحى بها هذه المجموعات يمكن أن يكون لها تركيب معقد، كمثال: المجموعة  $Q$  مجموعة الأعداد الكسرية، مقياسها صفر، و يوجد أمثلة كثيرة لمجموعات مقياسها صفر و غير قابلة للعد. تقدّم الكسريات طائفة مهمة لكل  $A$  مجموعة جزئية من  $R^d$  يعرف بعد Hausdorff  $dim_H(A)$  للمجموعة  $A$  كأصغر مؤشر  $\delta \geq 0$  بحيث لكل  $\varepsilon > 0$  نستطيع أن نغطّي  $A$  بمتتالية مستطيلات  $I_n$  (ضرب فترات) بحيث  $\sum_{n \geq 1} \lambda(I_n)^{\delta + \varepsilon} < \infty$  بحيث  $\lambda(\cdot)$  ترمز لمقياس Lebesgue على  $R^d$ . بعد Hausdorff فكرة ترجع لصاحبها Hausdorff Felix (١٩٤٢-١٨٦٨) تتساوى مع تعريف البعد الهندسي المعهود للمجموعات الجزئية المنتظمة (منحنيات، مسطحات) في  $R^d$ . واحدة من نتائج هذا التعريف أنّه إذا كان  $dim_H(A) < d$  فإن مقياس Lebesgue للمجموعة  $A$  صفري. تمثّل الكسريات مجموعات جزئية من  $R^d$  بعدها ليس عدداً صحيحاً، وبالتحديد بعدها يمكن أن يكون أي شيء. مثال لهذا الصنف هو مجموعة Cantor الذي قدّمه Georg Cantor (١٩١٨-١٨٤٥) و يتكوّن من الأعداد  $u \in [0,1]$  حيث نشرها في الأساس ٣ بأخذ الشكل  $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{3^n}$  أو  $2n=1,2,\dots$  أو  $u_n = 0$  مجموعة

$$\frac{\log 2}{\log 3} < 1$$

Cantor ليست قابلة للعدّ و مقياس Lebesgue صفري و بعد Hausdorff يساوي

نهتم الآن بجزئيات نتيجة Borel (١٩٠٩) فيما يخصّ الأعداد العادية. لنكتب النشر الثنائي لعدد  $x$  بين ٠ و ١ على الشكل :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)}{2^n} \text{ أو } 2 \text{ أو } u_n(x) = 0, n=1,2,\dots$$

لنتفق لتجنّب عدم الوضوح، في تعريف الأعداد  $\{u_n(x), n \geq 1\}$  في حال تكون  $x$  من الشكل  $\frac{k}{2^n}$  مع  $k$  عدد صحيح أن تكون متتالية ثابتة و تساوي واحداً بعد رتبة ما. هذا التحديد يمكن من تعريف  $\{u_n(x), n \geq 1\}$  بطريقة وحيدة لكل  $x \in [0,1]$  إذا وضعنا الآن لكل  $n=1,2,3,\dots$

$$S_n(x) = 2 \sum_{k=0}^n u_k(x) - n$$

النتيجة المذكورة سابقاً E. Borel 1909 (27,247,271) Circ. Mat. Palermo إتة تعود إلى القول إتة لكل  $x$  في  $\{ \text{مجموعة قياسها صفر} \} - [0,1]$   $N = [0,1]$  (سوف نقول: إن الخاصية تتحقق تقريباً لكل  $x$  في  $[0,1]$ ) أو أيضاً تقريباً في كل مكان في  $[0,1]$  عندما  $n \rightarrow \infty$   $S_n(x) = o(n)$  الرمز  $u_n = o(v_n)$  أو  $un=O(vn)$  يعبر عن أن  $0 \rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$  أو أن  $\left| \frac{u_n}{v_n} \right|$  محدود)

على ضوء هذه النتيجة من الطبيعي أن ندرس سرعة التقارب  $\sum_n \frac{1}{n}$  نحو صفر. إثر أعمال Borel حصل على تقديرات متتالية لهذه السرعة من طرف :

- (1913) Hausdorff الذي أثبت أنه لكل  $\varepsilon > 0$  و تقريباً لكل  $x$  في  $[0,1]$

$$S_n(x) = o(n^{\varepsilon + \frac{1}{2}})$$

- Hardy and Littlewood (1914) الرياضيين Godfrey Harold Hardy (1877-1945) و John Edensor Littlewood (1885-1977) كان لهما تعاوناً مشهوراً (أثبتا أنه تقريباً في كل  $x$

في  $[0,1]$ )

$$)S_n = O(\sqrt{n \log \log n})$$

- khintchine (1896-1959) حصل على أفضل نتيجة من الرتبة الأولى في بحث في (A khintchine 1923) Mathematische Zeitschrift 18-109-116

باستعمال نسخة خاصة من الوعاريتم المكرر  $\log \log x = \log(\log x)$  الذي يلعب دوراً مهماً في هذه النتيجة والتي تليها (هذه دالة ذات تزايد بطيء جداً). هذه النتيجة تقول إنه تقريباً لكل  $x$  في  $[0,1]$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{\sqrt{2 n \log \log n}} = 1$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{\sqrt{2 n \log \log n}} = -1$$

بلغة أخرى لكل  $0 < \varepsilon < 1$  يوجد لكل  $x$  في  $[0,1]$  باستثناء مجموعة مقياسها صفر مؤشر  $n_{\varepsilon,x}$  بحيث إذا

كان  $n \geq n_{\varepsilon,x}$  عندنا

$$-(1 + \varepsilon)\sqrt{2 \log \log n} \leq S_n(x) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{2n \log \log n}$$

و من ناحية أخرى تحت المعطيات نفسها يوجد عدد غير منتهٍ من المؤشرات  $n$  بحيث

$$S_n(x) \geq (1 - \varepsilon)\sqrt{2n \log \log n} \text{ أو } S_n(x) \leq -(1 - \varepsilon)\sqrt{2n \log \log n}$$

نتيجة Khintchine، التي سنناقشها لاحقاً في الباب ١١ توصف، في الرتبة الأولى سرعة تقارب  $\frac{S_n}{n}$  نحو

صفر وقع تحسينها في شكل أمثل في ١٩٤٣ من طرف

William Feller (١٩٠٦-١٩٧٠) انظر (١٩٤٣) W Felle

“The general form of the so-called law of iterated logarithm”

يوض Feller الدالة  $\varphi(t) = \sqrt{2t \log \log t}$  (T.A.M.S, 54, 373-402).

محددة، ويثبت أنه تقريباً لكل  $x \in [0,1]$

(a) إذا كان  $\sum \frac{\varphi(n)}{n} \exp\left(\frac{\varphi(n)^2}{2}\right) < \infty$  فإنه إذا كان  $n$  عدداً كبيراً بما فيه الكفاية فإن

$$-\varphi(n)\sqrt{n} \leq S_n(x) \leq \varphi(n)\sqrt{n}$$

(b) إذا كان  $\sum \frac{\varphi(n)}{n} \exp\left(\frac{\varphi(n)^2}{2}\right) = \infty$  فإنه لعدد غير منتهٍ من المؤشرات عندنا

$$\varphi(n)\sqrt{n} \leq S_n(x) \text{ أو } S_n(x) \leq \varphi(n)\sqrt{n}$$

و على الرغم من أن التأويل الذي يمكن تقديمه بحساب الاحتمالات لتقارب معدلات النشر الثنائي نحو  $\frac{1}{2}$ ،

مريح للتوقع، لكن هذا القانون يعبر أيضاً عن نتيجة دقيقة من نظرية الأعداد. عند وعينا بهذا ندرك إلى أي مدى تأخذ نظرية الاحتمالات جذورها بعمق في الرياضيات الأكثر أساسية، مثل هذه الأمثلة استعملت كثيراً

من طرف المدافعين عن الاحتمالات الموضوعية. الموجودة في الطبيعة. لحدس براهين الذاتية الذين يعتقدون أن الاحتمالات ليس لها وجود طبيعي.

نحن الآن قادرون على أن نحيط بالطبيعة المنطقية لتقارب المعدلات في تكرار غير منتهٍ للعبة القفا والوجه.

في الواقع التحقيق الفيزيائي للعبة مماثلة يشابه تمامًا. إذا فكرنا قليلاً. اختيار عدد حقيقي من الفترة  $[0, 1]$  بصفة عشوائية، إننا نتحدث هنا عن محاكاة فيزيائية للفكرة الثنائية النظرية لمتتالية عشوائية، حيث اختيار الأعداد بصفة عشوائية يتحقق بوساطة آلية بشرية تتمثل في رمي قطعة نقدية في الهواء.

من الصعب عامة التحقق من أن عددًا ما عادي ( أي له نشر ثانوي يحقق قانون الأعداد الكبرى) أم لا .  
نعلم في كل الحالات أن الأعداد الكسرية من الشكل  $\frac{p}{q}$

حيث  $p$  و  $q$  عددان صحيحان ليست أعدادًا عادية بسبب دورية العناصر في نشرها. انظر A Renyi (1948) (Mat Tidsskrift B 41-48)

كخاتمة لهذا الباب ليسمح لنا أن نستشهد بقول Emile Borel (1945)

(Calcul des probabilités Gauthier-Villars p 92) "لعبة القفا والوجه ذات المبدأ السهل لها طابع

شديد العمومية و تؤدي إذا درسناها بالتفصيل إلى الرياضيات ذات المستوى الشديد العلو".





## الفصل السادس

# أمثلة أخرى لحساب الاحتمالات في نظرية الأعداد Hardy و Ramanujan , Erdos , Kac و Leveque النشر في كسور متواصلة

أعمال Borel على الأعداد الطبيعية و على قانون الأعداد الكبيرة الذي عبّر عنه بطريقة النشر التثاوي الذي ذكرناه في الباب الخامس يبيّنان بوضوح الروابط بين حساب الاحتمالات و نظرية الأعداد. عندنا هنا مجال واسع جداً. أين يمكن إثبات نتائج في ظاهرها بعيدة كلّ البعد عن فكرة المصادفة ذاتها؟ وما هي إلا قوانين احتمالية معبر عنها في إطار خاص.

نحتاج إلى أكثر من كتيب لذكر هذه التطبيقات و لا نستطيع ذكر إلا مختارات قليلة.

أعداد Borel العادية أعداد حقيقية ذات التركيبة التي ليست أولية، من السهل علينا التعامل مع الأعداد الصحيحة، و سوف نكتفي فيما سيأتي بأمثلة ذات تركيبة احتمالية حاضرة بصفة طبيعية في هذه الأشياء الحسابية، ليكن  $n$  عدداً صحيحاً طبيعياً مثل  $n=252$  مثل هذا العدد له تفكيك إلى أعداد أولية من الشكل

$$1 < p_1 < \dots < p_r \quad n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

أعداد أولية مختلفة. (العدد  $p$  يكون أولي إذا كان يقسم على  $p$  و على 1 فقط)  $k_1 \dots k_r$

أعداد صحيحة غير صفرية.

$$r=3, k_3=1, k_2=2, k_1=2, p_3=7, p_2=3, p_1=2 \quad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

في 1917 الرياضيات : الانجليزي، G.H. Hardy (1877-1947) و الهندي Srinivasa Ramanujan  
lyengar (1887-1920)

تحصلاً على نتيجة مذهلة

G.H.Hardy and S Ramanujan (1917) "the normal number of prime factors of n"  
Quart J 76-92

أثبتنا أنه تقريباً لكل الأعداد الصحيحة لها ما يقارب  $\log \log n$  قاسم أولي، بصفة أدق أثبتنا أنه لكل متتالية

عددية  $\varphi(n)$  تحقق  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = \infty$  التناسب، المسند للعدد  $n$ ، للأعداد  $n = 1, 2, \dots, k$  حيث

$$\frac{|V(k) - \log \log n|}{\sqrt{\log n \log n}} \geq \varphi(n)$$

يؤول إلى 0 إذا آلت  $n$  إلى  $\infty$ .

أقل ما يمكن أن يقال هو أن هذه النتيجة تذكر بنوع من قوانين الأعداد الكبرى الحسابية، مع ذلك فإن علاقة هذه الخاصية مع حساب الاحتمالات لم توضح في الإبان لأن Hardy و Ramanujan لم يبينوا برهانها في هذا الاتجاه، وكان لا بد من انتظار بحث في 1934 (P.Turan)

"On a theorem of Hardy and Ramanujan. J. London Math soc 9,274-276. للرياضي

المجري (P. Turan (1910-1976)

حتى تتوضح الطبيعة الاحتمالية لنظرية Hardy و Ramanujan. أمكن لـ Turan إعطاء برهان ابتدائي لهذه النتيجة بتطبيق متباينة Bienaymé-Tchebychey

المعروفة من الاحتماليين التي تعود إلى (Ireneus Jules Bienaymé (1796-1878)

هذا الاكتشاف كان له صدق كبير بما أنه التطبيق الأول المهم لحساب الاحتمالات على الحساب، تبعه عدد كبير من الأعمال المشابهة التي تظهر قوة الوسائل الرياضية التي أوجدت في البداية لدراسة الظواهر العشوائية. و نراء تطبيقاتها.

يحدث أن قانون أعداد كبيرة غالباً ما يربط بنظرية النهاية المركزية كما هو الحال في مجموع متغيرات مستقلة. نظرية Hardy و Ramanujan لا تخرق القاعدة كما أثبت ذلك Mark. Kac و Pal Erdos في 1940. قانون Gauss للأخطاء في نظرية النوال الجمعية في نظرية الأعداد-62, 738 Amer.J. Math (1942). لنذكر- بالمناسبة أن الرياضي المجري Pal Erdos (1913-1996) هو شخصية علمية شهيرة

كتب مع ما لا يقل عن ٥٠٤ شريك لبحوث علمية (من بينهم كاتب هذا الكتاب). نتيجة Kac Erdos تؤدي إلى بناء توزيع Laplace-Gauss، الاحتمالي لأعلى درجة، من تعداد بسيط للأعداد الصحيحة. يجدان أنه إذا كان  $N_n(x)$  يرمز لعدد الأرقام الصحيحة  $n, 2, 1, \dots, k$  بحيث  $\frac{V(k) - \log \log n}{\sqrt{\log \log n}} \leq x$  فإنه لكل  $x$  في  $R$  إذا آلت  $n$  إلى  $\infty$  فإن القسمة  $\frac{N_n(x)}{n}$  تتقارب نحو القانون العادي  $N_{(0,1)}$  بمعنى أنه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{n} = j(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

سرعة التقارب حصل عليها في ١٩٥٨ Renyi و Turan

Alfred Renyi (1921-1970) رياضي مجري مشهور و أكد حدسية Leveque التي تعود إلى ١٩٤٩ بثبات أنه عندما تؤول  $n$  إلى  $\infty$

$$\frac{N_n(x)}{n} = \phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log n}}\right)$$

وهي سرعة لا يمكن تحسينها.

نرى هنا ظهور الدالة اللوغاريتمية المكزرة التي سبق ذكرها في نهاية الباب الخامس، أي  $\log \log x = \log(\log x)$

هذه الدالة تتزايد نحو ما لا نهاية عندما تؤول  $x$  إلى  $\infty$  و لكن ببطئ شديد بحيث  $\log \log n$  تبدو للمقياسات "الإنسانية" للأعداد تقريباً ثابتة:  $\log \log x \approx 9.3$  @  $x = 1000$

$$\log \log x \approx 4.4 \text{ @ } x = 1000000000 \text{ و } \log \log x \approx 100 \text{ @ } x = 10^{100}$$

نذكر هنا أنّ عدد الذرات في الكون (مع خطأ لا يتجاوز الأعداد) يقارب  $10^{80}$  ما يعطي فكرة عن درجة كبر  $n$  اللازمة لنحصل على دقة مقبولة في هذه النظريات. هكذا إذا أخذنا بعين الاعتبار نتائج

Leveque وRenyi وTuran (١٩٥٨) فإن نظرية Kac- Erdos (١٩٤٠) ليست لها استعمالات تطبيقية لحساب التوزيع العادي. يجب على  $n$  أن تكون كبيرة بصفة هائلة لنحصل على دقة في مستوى العشر الأول.

الدالة  $V(n)$  (عدد قواسم  $n$  الأولية) مثال لدالة جمعية حسابية، دالة عددية  $f(n)$ ،  $n=1,2$  تكون من هذا الصنف إذا كان  $f(mn) = f(m) + f(n)$  إذا كان  $m$  و  $n$  عددين أوليين (إضافة إلى  $V(n)$  مثال لدالة حسابية جمعية معطى بالدالة  $\log f(n)$  حيث  $f(n)$  دالة Euler المعرفة كعدد أرقام  $n, k=1,2$  الأولية مع  $n$ ).

Turan وRenyi (Acta Arith 4,71-84) أثبتا أن نتيجة المقاربة التي حصل عليها للدالة  $V(n)$  تبقى صحيحة لمجموعة كبيرة من الدوال الحسابية الجمعية. الأبحاث في هذا المجال إلى الآن لا تزال نشيطة.

مثال آخر لوجود تركيبة احتمالية في نظرية الأعداد معطى بالتقسيم في كسور متواصلة. كل عدد غير كسري  $x$  بين  $0$  و  $1$  يمكن أن يكتب بطريقة وحيدة في شكل كسر متواصل حسب القاعدة

$$x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{a_3(x) + \dots}}}$$

حيث  $\{a_k(x), k \geq 1\}$  متتالية بنى كالاتي بالاستقراء. لنرمز بالرمز  $[u]$  للجزء الصحيح للعدد  $u$  المعرف كأكبر عدد أقل أو يساوي  $u$ . لنضع حينئذ  $T(u) = \frac{1}{u} - \left[ \frac{1}{u} \right]$  نعرف المتتالية  $\{a_k(x), k \geq 1\}$  بالاستقراء :

$$|a_1(x) = \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$k \geq 1, a_{k+1}(x) = a_k(T(x)) = a_1(T^k(x))$$

نلاحظ أنه إذا كان  $x$  غير كسري المتتالية.  $a_k(x)$   $k=1,2,\dots$  متتالية أعداد صحيحة تحقق  $a_k(x) \geq 1$ .  
 لكن إذا كان  $x$  كسري تنف المتتالية بعد رتبة معينة. إضافة إلى ذلك إذا كان  $x$  غير كسري عندنا النتيجة النهائية.

$$x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1}(x) + \frac{1}{r_n(x)}}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1}(x) + \frac{1}{a_n(x)}}}}$$

من المهم حساب  $r_n(x) \in [1, \infty]$  المعرف بالمساواة

$$r_n(x) = a_n(x) + \frac{1}{a_{n+1}(x) + \frac{1}{a_{n+2}(x) + \dots}}$$

هذه المسألة تناولها Gauss في رسالة إلى Laplace حيث لاحظ أنه لكل  $t \in [0,1]$  مقياس Lebesque

$$\lambda(\{r_n^{-1}(\cdot) \leq t\})$$

$$\frac{1}{r_n(x)} \leq t \text{ لها نهاية عندما } n \text{ إلى } \infty \text{ معطاة}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I(r_n^{-1}(\cdot) \leq t) = \frac{\log(1+t)}{\log 2}$$

أجوبة فيما يخص هذه النهاية. فيما يخص الخطأ

$$E_n(t) = \lambda(r_n^{-1}(\cdot) \leq t) - \frac{\log(1+t)}{\log 2}$$

لا تعرف بالضبط سرعة تقاربه نحو الصفر. حصل Kuzmin في ١٩٢٩ على نتيجة تحدّد أنّ الخطأ من الدرجة  $O(q^{\sqrt{n}})$  لكل عدد  $q$  غير معروف بحيث  $0 < q < 1$ . حسن Paul Levy هذه النتيجة بإثبات الدرجة  $O(q^n)$  لعدد  $q$  يحقق  $0,7 \leq q$  في وقت لاحق في ١٩٦١ أثبت Szusz أنّه في حدّ Levy يمكن اختيار  $0,4 < q$ . تحديد الدرجة الأمثل لتقارب  $E_n(t)$  نحو ٠ يبقى إذن مسألة مطروحة ومستعصية.

نمجة الكسور المتصلة بوساطة الاحتمالات يمكن أن تنجز بأخذ  $\Omega = [0,1]$  كفضاء الأحداث الأولية وكمقياس احتمال، أي مقياس على  $[0,1]$ .

في الحالة الخاصة لمقياس Lebesgue نلاحظ نتيجة تقارب نحو نظام مستقر، هذا مرتبط لمقياس Gauss

$$\gamma(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

لكل  $A$  قابلة للقياس جزئية من  $[0,1]$ . إذا كان  $x$  متغيّرا عشوائيا ذا قانون معرف بمقياس Gauss أي بحيث  $P(X \in A) = \gamma(A)$  لكل مجموعة  $A$  قابلة للقياس من  $[0,1]$ ، نعرف المتتالية العشوائية  $\{a_n(X), n \geq 1\}$  المتكونة باحتمال ١ من أعداد موجبة تملك الخاصية المميزة أنّها متتالية مستقرة تحقّق ل  $k=1,2,\dots$

$$P(a_n(x) \geq k) = \gamma(\{x, a_n(x) \geq k\}) = \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log 2}$$

لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى M.Iosifescu(1978)

“Recent advances in the metric theory of continued fractions”

Trans VIII Prague . conf Vol A, 27-40

لتطبيقات أخرى لحساب الاحتمالات على نظرية الأعداد نرجع إلى Mkac(1949)

“Probability methods in some problems of  
analysis and number theory” bull .amer. Math.soc 55,1949, 641-655

أيضاً إلى (1979) P.D.T .A . Elliot “Probabilistic number theory”

Springer New York

أمثلة أخرى لمحاكاة جبرية للمصادفة معطاة من طرف (1984) J. Bass

”دوال الارتباط، دوال شبه عشوائية و تطبيقات” Paris Masson و في المؤلف (1986) L .Devroye

“Nom –Uniform Random Number Generation “

و الممكن تحميله مجاناً على الموقع New York , Springer

<http://cg.scs. carteto.ca/~Luc/ rn bookindex. html>.





## الفصل السابع

# استقلالية المتغيّرات العشوائية نظرية Kolmogorov, دوال Rademacher التبديلية ونظرية Finetti

إلى الآن تعاملنا بصفة مستمرة- دون شرح- مع مسألة الاستقلالية التي حسبها- يكون متغيّران عشوائيان هكذا- نسمي- فيما سيأتي- الأعداد التي تتبع قوانين المصادفة مستقلان إذا كان بصدوران عن ظواهر عشوائية تجعل "النتيجة المشاهدة بالنسبة للواحد ليس لها تأثير في الآخر، هذه فكرة فيزيائية و تعبيرها الرياضي الدقيق يكون كالآتي :

أولا لكل  $n \geq 2$  نقول: إن الأحداث  $E_1, \dots, E_n$  مستقلة إذا كان  
$$P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \dots P(E_{i_k})$$
 لكل المؤشرات التي تحقّق  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$   
هذا يفرض  $2^n - 1$

علاقة و نلاحظ (باستثناء  $n=2$ ) أنّ استقلالية  $E_1, \dots, E_n$  ليست متحققة بمجرد تحقّق

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \dots P(E_n)$$

بصفة عامة لكل  $n \geq 2$  المتغيّرات العشوائية المعرفة على فضاء الاحتمالات  $X_1, \dots, X_n$  نفسها تكون مستقلة إذا كان لكل  $A_1, \dots, A_n \subseteq R$  مجموعات قابلة للقياس (أي بحيث احتمال الأحداث  $E_i = \{X_i \in A_i\}$  يكون معرفاً) الأحداث  $E_1 = \{X_1 \in A_1\}, \dots, E_n = \{X_n \in A_n\}$

مستقلة. لنشرح هذا التعريف: نثبت أنّ التعريف المعطى للاستقلالية مماثل لفكرة الاستقلالية الفيزيائية لحدثين و F. إذا كان الفضاء اتحاداً منتهيًا لأحداث ابتدائية متساوية الاحتمال نجد إذا أخذنا

$$0 < P(E), P(F) < 1 \text{ العلاقات}$$

$$P(E) = \frac{\text{عدد الحالات حيث } E \text{ يتحقق}}{\text{عدد الحالات الكامل}}$$

$$P(F) = \frac{\text{عدد الحالات التي يحقق } F}{\text{عدد الحالات الكامل}}$$

أن نقول : إن F ليس لها تأثير فيزيائي في E يعود إلى قول إن القسمين:

$$\frac{\text{عدد الحالات التي يتحقق فيها } E \text{ ويتحقق فيها } F}{\text{عدد الحالات التي يتحقق فيها } F}$$

و

$$\frac{\text{عدد الحالات التي يتحقق فيها } E \text{ ولا يتحقق فيها } F}{\text{عدد الحالات التي لا يتحقق فيها } F}$$

هما متساويان . إذا استعملنا الاحتمال نكتب مساواة القسمين كالآتي :

$$\frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E \cap (\Omega - F))}{P(\Omega - F)} = \frac{P(E) - P(E \cap F)}{1 - P(F)}$$

بتوحيد المقام نجد

$$P(E \cap F) - P(E \cap F)P(F) = P(E)P(F) - P(E \cap F).P(F)$$

و هذا مكافئ بالتأكيد للتصنيف " الرياضي " للاستقلالية للحدثين E و F

$$P(E \cap F) = P(E).P(F)$$

هكذا إذن الاستقلالية " الفيزيائية " لحدثين تكافئ مساواة احتمال تقاطعهما مع ضرب الاحتمالين للمجموعتين.  
 فيما سبق فرضنا أن  $0 < P(F) < 1$ . إذا كان  $P(F) = 0$  أي  $F = \emptyset$  وإذا كان  $P(F) = 1$  أي  $F = \Omega$   
 حدثان لا يؤثر وقوعهما أو عدمه في الحدث E. نرى إذا كيف يمكن وصف الاستقلال الفيزيائية بال قاعدة

$$P(E \cap F) = P(E).P(F)$$

الحجة التي قدمناها لا تخلو من فرضيات ضمنية من بينها أن معرفة أن F يتحقق لا يقدم أي معلومة عن تحقق أو عدم تحقق الأحداث الابتدائية التي تكونه، هذه الفرضية تمكن من تعريف الاحتمال الشرطي بالقسمة (عدد الحالات المناسبة) يقسم على عدد الحالات الكامل.

مسألة الاحتمال الشرطي التي ذكرناها هي من أصعب المسائل في حساب الاحتمالات، تعرف مع ذلك-  
 كالآتي : بوساطة الأحداث، الاحتمال الشرطي  $P(E/F)$  احتمال E إذا عرفنا F معطى بـ

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

هذه القاعدة صحيحة إذا كان  $P(F) \neq 0$  لنكتب بصفة متناظرة مع الشرط  $P(E) \neq 0$

$$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

من هاتين القاعدتين نجد القاعدة المشهورة لـ Bayes التي تسمى قاعدة المقلوبية

$$P(F/E) = \frac{P(E/F)P(F)}{P(E)}$$

أو تحت شكلها المتناظر  $P(F/E).P(E) = P(E/F).P(F)$

باستثناء هذه القواعد الابتدائية لا نستطيع هنا أن نقدم عرضًا تفصيليًا للمسائل الرياضية و الفيزيائية المرتبطة بالشرطية. في ما يخص مسلماتها نحيل إلى كتاب

Foundations of Probability San Francisco A.Renyi Holden Day (1970)

التناول الرياضي للشرطية يحتاج إلى تقنيات دقيقة من نظرية المقياس مثل نظرية

Radon- Nikodym ما يصعب شرحه في مساحة صغيرة.

سوف نكتفي بسبب احتياجات ما سنطرحه بالمرجع التجريبي لمسائل الاستقلالية و الارتباط التي في النهاية يسهل فهمها في مباحثها.

سنقبل إذن- دون أشكال أخرى للعملية- مسألة الاحتمال الشرطي لمتغير عشوائي  $X$  إذا عرفنا المتغير العشوائي  $Y$ . و هذا يعطي معنى للاحتمال الذي نرمز له :

$P(X \in A | Y=y)$  أن يأخذ  $X$  قيمة في  $A$  إذا علمنا أن  $Y=y$ . هذا الاحتمال الأخير يمكن تأويله تجريبيًا (على الرغم من أن هذه القاعدة ليست دائمًا صحيحة) كنهاية للتعبير

$$\frac{P(\{X \in A\} \cap \{y - \delta y < Y \leq y + \delta y\})}{P(y - \delta y < Y \leq y + \delta y)}$$

عندما نؤول  $\delta$  إلى ٠

التوقع الشرطي للمتغير  $X$  إذا علمنا أن  $Y=y$  يمكن تعريفه كتوقع قانون الاحتمال الشرطي للمتغير  $X$  إذا علمنا  $Y=y$

معتمدين على هذه التعريفات يصبح ممكنًا بناء متتالية غير متناهية متكونة من نسخ مستقلة لمتغير عشوائي ذي قانون غير محدد، هذه النقطة لها أهميتها النظرية لأنه لا يكفي أن نقبل الفكرة الفيزيائية لوجود مثل هذه المتتالية لاستنتاج أن لها معنى كشيء رياضي متناسق مع مسلمات الاحتمال حسب Kolmogorov. (و هذا من نقاط ضعف مسلمات Von Mises الذي يأخذ هذا البناء كمسلم) هذه العملية تقع حسب المراحل الآتية:

(١) عندنا في البداية قانون احتمال متغير عشوائي  $X \in \mathbb{R}$  يمكن أن نأخذ كفضاء أحداث ابتدائية المجموعة  $R$  للأعداد الحقيقية يوجد الحدث  $\{X = x\}$  مع  $x$ ، نختار إثرها كجبر الجبر البورلي الذي يعرف كأصغر سيجما حقل يحتوي المجموعات المفتوحة والمغلقة، هذا ممكن إذا  $\beta = \beta(R)$

علمنا في البداية الاحتمالات  $P(a < x \leq b)$  لكل  $a \leq b \in R$  نحصل على فضاء احتمالات

$$(\Omega, \mathcal{B}, p)$$

(2) نعرف قوانين البعد المنتهي معرفين لكل  $n \geq 1$  قانون الاحتمال المشترك لـ

$$(X_1, \dots, X_n)$$

$$P(X \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

لكل  $A_1, \dots, A_n$  في  $\mathcal{B}$ . هذه العملية تعرف (من نظرية التمديد لـ Caratheodory انظر الباب VI) لكل  $n \geq 1$  احتمالا على  $\Omega = R^n$  مصحوبا بالجبر  $\sigma(\mathcal{B}^n)$  كما في الباب الرابع  $\sigma(\mathcal{A})$  ترمز إلى أصغر سيجماء  $\mathcal{A}$  يحوي  $\mathcal{A}$ .

(3) بتكرار الخطوة (2) لكل  $n \geq 1$  نعرف احتمال  $P$  على الفضاء  $R^N = \Omega_\infty$  حيث  $N = \{1, 2, \dots\}$  فضاء المتتاليات  $(x_1, \dots)$ . جبر الأحداث القابلة للاحتمال هو هنا الاتحاد  $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \sigma(\mathcal{B}^n)$  بحيث إذا كان

$A \in \mathcal{A}$  يوجد  $n \geq 1$  حيث  $A \in \mathcal{B}^n$  ما يسمح بالكتابة

$$P((X_1, X_2, \dots) \in A) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in A) = P_n(A)$$

نكون بهذا قد عرفنا احتمالا على  $\mathcal{A}$  بحيث إذا قيد على  $\sigma(\mathcal{B}^n)$  يتساوى مع  $P_n$ . نظرية Caratheodory للتمديد (انظر الباب VI) تؤدي إلى التمديد و بطريقة وحيدة لتعريف احتمال  $P_\infty$  على  $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\mathcal{A})$ . نصل إلى  $(\Omega_\infty, \mathcal{A}_\infty, P_\infty)$  فضاء الاحتمالات المطلوب.

الخطوات الثلاث السابقة تؤدي إلى تعريف احتمال جملي للعملية العشوائية  $(X_1, \dots, X_n)$  يمكن من حساب للاحتتمالات لأحداث تستدعي عدداً غير منته من عناصر المتتالية، بعض التفكير يبين منطقية وبساطة هذا المسار المنطقي الذي تتخلله مرحلة صعبة وحيدة تخص التمديد الوحيد التي دعماها نظرية التمديد لـ Caratheodory.

تعرف النتيجة التي تحصلنا عليها باسم نظرية التمديد لـ Kolmogorov. الطريقة الموصوفة هنا لبناء متتالية متغيرات مستقلة لها قانون الاحتمال نفسه، و يمكن استعمالها لتعريف قانون الاحتمال الجملي لأي متتالية متغيرات عشوائية، مع الشرط الوحيد أن قوانين البعد المنتهي، أي القوانين  $P_n(X_1, X_2, \dots)$  تكون كلها معرفة متناسقة.

لا تُؤدِّي نظرية الوجود لـ Kolmogorov إلى بناء سهل إلا إذا كانت المتغيرات العشوائية مستقلة،  
 وسنقدم الآن أمثلة أخرى لبناء متتالية عشوائية لا متناهية بطرق مختلفة، في هذا الاتجاه يقدّم الوصف في  
 الباب الخامس للعلاقات بين متتالية الألعاب قفا ووجه المرقمة بـ 0 و 1 و النشر الثنائي للأعداد  
 $u \in [0,1]$

بناء سهلًا (نسبيًا) لمتتالية عشوائية لا متناهية، لنذكر أنه إذا كانت  $U$  متغيرًا عشوائيًا ذا قانون احتمالي منتظم  
 على  $[0,1]$  أي أن  $P(U \leq u) = u$  لكل  $0 \leq u \leq 1$  النشر الثنائي لـ  $U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$  فإنه يقدم  
 متتالية لا متناهية  $(X_1, X_2, \dots)$  لمتغيرات عشوائية مستقلة لها القانون نفسه، حيث  
 $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$  لكل  $n \geq 1$

مثال آخر في الاتجاه نفسه: قدم في الباب VI إذا عرفنا متغيرًا عشوائيًا  $X$  يتبع مقياس Gauss على  $[0, 1]$   
 أي أن  $P(X \in x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}$  لكل  $x \in [0,1]$ . نشر  $X$  في كسور متصلة تحت الشكل:

$$X = \frac{1}{X_1 + \frac{1}{X_2 + \dots}}$$

يعرف مع احتمال 1 متتالية  $\{X_1, X_2, \dots\}$  متغيرات عشوائية قيمها في

$$N^* = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ و تحقق لكل } n \geq 1 \text{ و } k \in N^* \text{ } P(X_n \geq k) = \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2} \text{ . يمكن التحقق من أن}$$

هذه المتتالية مستقرّة، بمعنى أنه لكل  $n \geq 1$  القانون المشترك لـ  $(X_k, X_{k+1}, X_{k+n})$  لا يتأثر بـ  $k$  ولكن  
 المتغيرات العشوائية  $X_1, X_2, \dots$  ليست مستقلة.

مثال آخر لبناء جملي لمتتالية عشوائية معطى بدوال Rademacher (1892-1969):

هذه الدوال تكون متتالية  $\{R_n(x), n \geq 0\}$  دوال للمتغير  $x$  في  $[0,1]$  معرفة كالآتي:

$$R_n(x) = \text{sgn}\{\sin(2^n p.x)\}$$

$$\text{sgn}\{u\} = 1 \quad u > 0 \text{ إذا كان}$$

$$\text{sgn}\{u\} = 0 \quad u = 0 \text{ إذا كان}$$

$$\text{sgn}\{u\} = -1 \quad u < 0 \text{ إذا كان}$$

دوال Rademacher قَدّمت في (1922) H.A . Rademacher

(Math. Ann ,87, 112 - 138)

طبيعتها الاحتمالية بَيَّنّها الرياضي البولوني Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972) في السنة

نفسها H.D.Steinhaus (1922)

" الاحتمالات القابلة للعد و علاقتها بنظرية المقياس " Fund. Math 4, 286-310 الدالة  $R_0(x) = 1$

لكل  $x \in [0,1]$  توضع على حدة. كما سبق نرسم ب U للمتغير العشوائي الذي قانون احتماله منتظم على

$$[0,1] \text{ أي يحقق } P(U \leq u) = u \text{ لكل } 0 \leq u \leq 1$$

المتتالية العشوائية المعرفة بالمساواة  $X_n = R_n(U)$  لـ  $n=1, 2, \dots$  تكون متتالية متغيرات عشوائية مستقلة

و لها القانون نفسه بحيث لكل  $n \geq 1$

$$P(X_n = 1).P(X_n = -1) = \frac{1}{2}, n \geq 1$$

بلغة أخرى إذا اخترنا U بالمصادفة بين 0 و 1 (حسب قانون احتمال منتظم في هذه الفترة) المتتالية

$R_1(U), R_2(U)$  لها صفات متواعدة مع نتائج القفا و الوجه حيث ترقم النتائج الأرقام 1- و 0 . هذا التوحد

يحصل باحتمال 1 . يمكن أن نعرض على أن  $R_n(x)$  تصبح 0 بعد رتبة ما إذا كان  $x = \frac{k}{2^n}$  و k عدد

صحيح مع ذلك مجموعة الأعداد من هذا الشكل قياسها صفر و يمكن تجاهلها .

و بشكل عابر نذكر أن Rademacher درس تقارب المتسلسلات من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(U)$$

وأثبت أن التقارب يحدث باحتمال 1 ما يعني أن مجموعة x بحيث

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty \text{ لها صفري إذا فرضنا } \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(x)$$

وجب الانتظار حتى 1925 لكي يثبت Kolmogorov و Khintchine العكس.



هذه النتائج ذات السبق ألهمت Kolmogorov نتيجة أساسية معروفة باسم نظرية الثلاث متسلسلات التي تقدم شروطاً كافية و لازمة لتقارب متسلسلات متغيرات عشوائية مستقلة  
(A.N Kolmogorov (1928) Math Ann 99,309-319)

(A.N . Kolmogorov 1929 Math Ann102 ,484- 489)

من الأفكار الأساسية لحساب الاحتمالات فكرة التبديلية في حال لعبة، حيث عدد الاحتمالات الممكنة منته، ذلك هو مبدأ أنّ هذه الاحتمالات تكون قابلة مثل الكويرات المخلوطة في كيس ما يسوّغ فكرة إسناد احتمالات متساوية و اعتبار ذلك في أيّ تبيان. نقول عامة إنّ المتغيرات العشوائية

حيثما  $\{X_i, i \in I\}$  مجموعة مؤشرات ( منتهية أو غير منتهية ) قابلة للتبديل إذا كان لكلّ مجموعة  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  مؤشرات مختلفة. قانون الاحتمال المشترك لا يتأثر بخيارات معينة للمؤشرات  $i_1, \dots, i_n$  كما سنرى تركيبة متتالية متغيرات قابلة للتبديل و لا متناهية خاصة جداً، حيث لا تختلف كثيراً عن الاستقلالية .

المثال الأبسط لمتتالية غير منتهية قابلة للتبديل معطى بالمتتالية....  $Y_1, Y_2$  لمتغيرات عشوائية مستقلة و لها القانون نفسه. مع ذلك يمكن بناء أمثلة أقل بساطة بسهولة. مثلاً لكن  $\gamma$  متغيراً عشوائياً مستقلاً عن المتتالية السابقة....  $Y_1, Y_2$  . المتتالية....  $Y + Y_1, Y + Y_2$  تبقى أيضاً تبديلية مع عدم استقلالية المتتالية، لكننا لا نتبعد عن حالة المتغيرات المستقلة. بالفعل القانون الشرطي للمتغيرات

$$Y + Y_1, Y + Y_2 \dots$$

إذا علمنا أنّ  $\gamma = Y$  هو قانون  $\gamma + Y_1, \gamma + Y_2$  التي تمثل متتالية مستقلة لها القانون نفسه ، وإذا فرضنا أنّ  $E(Y_i) = \mu$  موجودة فقانون الأعداد الكبيرة يُفرض باحتمال 1 أن

$$Y = -\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (Y + Y_i)$$

تعبير يؤدي إلى أنّ  $\gamma$  محدّدة كلياً بمشاهدة قيم المتتالية  $Y + Y_1, Y + Y_2, \dots$

في ١٩٣٧ طَوَّرَ الرياضي الإيطالي Bruno de Finetti (١٩٠٦-١٩٨٥) ممثل مشهور للمدرسة الذاتية (انظر الباب لرابع) هذه الفكرة في إطار عام (B de Finetti 1937) " التوقع قوانينه المنطقية و مصادره الذاتية " (Ann. Inst. Henri. Poincaré 7,1-68)

بإثبات النظرية الآتية:

تكون متتالية لا منتهية  $X_1, \dots, X_n$  لمتغيرات قابلة للتبديل إذن و فقط إذا كانت مستقلة شرطياً، أي أن يكون القانون الشرطي ل  $X_1, \dots, X_n$  تحت شرط ما قانون متتالية عشوائية لمتغيرات مستقلة لها القانون نفسه. يجدر بنا هنا أن نبيّن نوعية الشرط المستعمل نضع لكل  $x \in R$  و  $n \geq 1$

$$X_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i, E\}}$$

حيث  $I_A = 1$  إذا كان  $A$  متحققاً و  $I_A = 0$  إذا لم يتحقق  $A$  و هي الدالة المؤشرة للمجموعة  $A$ . من الممكن إثبات باحتمال ١ أن متتالية الدوال  $\xi_n(x)$  تتقارب بصفة منتظمة على  $R$  نحو نهاية (عشوائية)  $\xi(X)$ . إضافة الى ذلك القانون الشرطي ل  $X_1, \dots, X_n$  إذا علمنا  $z(x)$  هو قانون متتالية متغيرات عشوائية مستقلة لها القانون نفسه.

الأهمية النظرية لنتيجة B.Finetti كبيرة جداً، حيث إنها تبني علاقة وطيدة بين الاستقلالية و التبديلية. من هنا إذا شاهدنا تحقيقاً خاصاً للمتتالية غير منتهية و تبديلية، فهذا يعود الى تثبيت قيمة  $X(x)$  ضمنياً لهذه التجربة و المتتالية المشاهدة يكون لها بالنسبة للمشاهد كل خصائص متتالية متغيرات عشوائية مستقلة لها القانون نفسه. لتوضيح هذه الخاصية نأخذ لعبة القفا و الوجه، و هذا يحقق متتالية ألعاب تبديلية بمجرد أن ترمى القطعة النقدية بالطريقة نفسها في كل مرة. هذا يقدم متتالية نتائج ليست مستقلة في ما بينها إلا أنها مرتبطة بطريقة اللعب.

نستطيع أن نحقق متتالية ألعاب مختلفة لو كان هناك لاعب آخر يشارك في الرمي.

نحصل في هذا المثال على بيان كيف تتدخل كيفية اللعب في متتالية تبديلية لا متناهية. شرطياً بالنسبة للاعب متتالية ألعاب قفا و وجه تكون إذن متكونة من متغيرات مستقلة لها القانون نفسه.



## الفصل الثامن

# قوانين الصفر أو الواحد للمتتاليات المستقلة Hewitt-Savage و Kolmogorov, Borel-Cantelli مانوية قوانين الحظ، المارتينجيلات

الوسيلة الأساسية لإثبات قوانين الأعداد الكبيرة هي تمهيدية Borel . Cantelli (1909-1917) التي تنص أنه إذا كانت  $\{A_n, n \geq 1\}$  متسلسلة أحداث عندنا:

(1) إذا كانت  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$  فإنه باحتمال واحد لا يوجد سوى عدد منتهٍ من الأحداث ضمن  $\{A_n, n \geq 1\}$  متحقق في الوقت نفسه.

(2) إذا كان في حال العكس  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  وبالإضافة كانت الأحداث  $\{A_n, n \geq 1\}$  مستقلة فإنه يوجد عدد غير منتهٍ من الأحداث المتحققة في الوقت نفسه و باحتمال واحد. تمهيدية Borel . Cantelli مطبقة على الأحداث المستقلة تنص على خاصية " الكل أو لا شيء". أي أنه لا يوجد وضع بيني حيث للعدد  $0 < p < 1$

عدد محدود من الأحداث  $\{A_n, n \geq 1\}$  يتحقق باحتمال  $p$  و عدد غير منتهٍ يتحقق باحتمال  $1-p$  لأنه في الواقع ليس للمتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$  غير خيارين: إما أن تتقارب أو تتباعد. برهان التمهيدي بسيط جداً. إذا كان  $\sum_{m \geq n}^{\infty} P(A_n) < \infty$  فإن  $\sum_{m \geq n}^{\infty} P(A_n) \rightarrow 0$

إذا آلت  $n$  إلى  $\infty$  و لذلك  $P(U_{m=n}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m \geq n} P(A_m) \rightarrow 0$  نستنتج أن  $P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{m=n}^{\infty} A_m) = 0$  في المقابل إذا كانت الأحداث  $\{A_n, n \geq 1\}$  مستقلة و تحقق  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  نجد

$$1 - P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} (\Omega - A_m)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{m=n}^k (1 - P(A_m))$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{m=n}^k P(A_m)\right)$$

و نستنتج أن  $[P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n) = 1]$

تمهيدية (1909 E-Borel-Cantelli) ("عناصر نظرية الاحتمالات" F. Cantelli Paris , Hermann

Su due applicazioni di un teorema di G.Boole , Rendi conti della Acad . Naz .dei. lincei , 26, 39-45

هي من أول نظريات حساب الاحتمالات الذي تبين مسألة أن مجموعة كبيرة من الأحداث النهائية المرتبطة بمتغيرات عشوائية مستقلة الاحتمال لا يكون إلا 0 أو 1 .

Francesco Paolo Cantelli (1875-1966) استعمل في برهانه في 1917 طرقاً استعملت سابقاً من طرف Borel في 1909 لإثبات نسخة من نسخ القانون القوي للأعداد الكبيرة . أفكار Borel كانت مكتوبة بشكل أولي، و يرجع الفضل لـ Cantelli الذي وضعها في شكل يجعلها صالحة للاستعمال في إطار موسع. فكرة أنه بصفة عامة بعض الأحداث لا تكون إلا مؤكدة أو مستحيلة باحتمال واحد كتبت بطريقة واضحة و نهائية من طرف Kolmogorov

A.N. Kolmogorov (1933) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung , Berlin, Springer .

كان Kolmogorov قد لاحظ

A.N.Kolmogorov (1929 ) , Uber das Gesetz Der

iterierten Logarithmus , Math, Ann 101, 126-136

"في القانون القوي للأعداد الكبيرة" (CR. Acad .Sci Paris (1930 ) A.N. Kolmogorov (1919,910-930)

بأنه بالنسبة لمتتالية متغيرات عشوائية مستقلة كلما كان قانون ضعيف للأعداد الكبيرة صحيحاً يكون القانون صحيحاً في شكله القوي. مثلاً النسخة الضعيفة لتقارب المعدلات هي لكل  $\varepsilon > 0$

$$P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \right| > \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

$$P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \right| \rightarrow 0 \right) = 1 \text{ أن:}$$

نسمي أحداث ذيل مرتبطة بمتتالية متغيرات أحداثاً محددة بمشاهدة المتتالية كاملة و لا تتأثر بتغيير عدد من تلك العناصر . مثلاً الحدث

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \right\}$$

حدث ذليلي حيث لا يتأثر بالقيم التي تأخذها  $X_1, \dots, X_k$  وذلك لكل  $k \geq 1$  مثبتة.

نفي- بوضوح- مجموعة الأحداث الذيلية بإدخال السيجما الحقل الذي نرمز له بالرمز

$$\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

لكل الأحداث المشاهدة بعد  $n$  (أي أنها توصف بمعرفة  $\dots, X_{n+1}, X_n$ ) نعرف بعد ذلك السيجما حقل  $\mathcal{A}_\infty$  للأحداث الذيلية  $\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$  قانون 0 أو 1 لـ Kolmogorov ينص أنه بالنسبة لمتتالية متغيرات عشوائية و مستقلة  $\dots, X_2, X_1$  لكل حدث ذليل لا يكون احتمالها إلا 0 أو 1 برهان هذه النتيجة العميقة جداً بسيط جداً.

يتمثل البرهان في أن نتحقق من أن حدثاً ذليلاً  $Q \in \mathcal{A}_\infty$  ينتمي حتماً إلى كل  $\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$

لذلك  $Q$  مستقل عن كل الأحداث المشاهدة المنتمية إلي  $(X_{n-1}, \dots, X_n)$

و هذا يؤدي إلى أن  $Q$  مستقل عن السيجما حقل المولد بهذه الأحداث، أي

$$\sigma\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \sigma(X_n, \dots, X_{n-1})\right) = \mathcal{A} \supset \mathcal{A}_\infty$$

و هذا يؤدي إلى أن  $Q$  مستقل عن نفسه، و إثر مرور هذه المفاجأة أمام وضع غير معهود نلاحظ أن ذلك يعني

$$P(Q \cap Q) = P(Q) = P(Q)^2$$

و هذا لا يمكن إلا إذا كان  $P(Q) = 0$  أو  $P(Q) = 1$  نص قانون 0 أو 1 لـ Kolmogorov يبين أهمية تناول سيجما حقل الأحداث في البراهين. إضافة إلى الأحداث الذيلية يمكننا أيضاً أن نهتم بالأحداث اللأ متغيرة التي تتكون من أحداث  $A$  بحيث إذا تحقق  $A$   $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  أيضاً يتحقق لـ

$$X_1 = x_2, \dots, X_n = x_{n+1}$$

حقل الأحداث القابلة للتبديل: التي تتكون من أحداث  $A$  تحقق الآتي: إذا كان  $A$  متحققاً لـ

$X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  فإن  $A$  متحقق أيضاً لـ  $X_1 = x_2, \dots, X_n = x_{n+1}$  لكل تبديل

$$(1, \dots, n) \perp (i_1, \dots, i_n)$$

كمثال الحدث  $\{X_{2n} \in A \text{ لكل } n \text{ كبير}\}$  حدث ذلي، و لكن ليس لا متغير. كذلك حدث مثل  $\{\sum_{i=1}^n X_i \in A \text{ لكل } n \text{ كبير}\}$  حدث قابل للتبديل، و لكن ليس ذلياً. بعض التفكير يبين أن كل حدث لا متغير ذلي و كل حدث ذلي قابل للتبديل.

أضعف خاصية يمكن إدراجها للأحداث النهائية هي إذن خاصية القبول للتبديل، مع ذلك يبدو واضحاً أن هذه الخاصية مهمة فقط في حالة المتتالية القابلة للتبديل، مهمة فقط في حالة المتتالية القابلة للتبديل ومن نظرية B. Finetti أيضاً في حالة متتالية متغيرات عشوائية ذات القانون نفسه والمستقلة شرطياً. من نظرية B. Finetti (انظر الباب الثامن) متتالية المتغيرات العشوائية ذات القانون نفسه والمستقلة شرطياً. هذا يترك المجال للاعتقاد أن تمديد قانون  $\sigma$  أو  $\lambda$  لـ Kolmogorov إلى حالة الأحداث القابلة للتبديل المرتبطة بمتتالية متغيرات مستقلة لها القانون نفسه.

(E. Hewitt and , L.J . Savage 1955 ) Hewitt et Savage

(symmetric measures on Cartesian products .TA.M.S 80,470– 501

أثبتنا أن هذه الخاصية صحيحة وأنه إذا كانت  $X_1, \dots, X_n$  متتالية متغيرات مستقلة لها القانون نفسه فإن أي حدث قابل للتبديل على هذه المتتالية احتمال  $\sigma$  أو  $\lambda$

( Edwin Hewitt (1920–1999) و Leonard Jimie Savage (1917–1971) احتمالان أمريكيان).

النتيجة العامة التي يمكن أن نستخلصها من هذا هي أنه في مجمل نظريات النهايات الاحتمالية علينا أن نتوقع مشاهدة- في كل الحالات- قوانين قوية من الصنف "هذه الخاصية أو تلك صحيحة باحتمال  $\sigma$  أو  $\lambda$ ". إن هذه الحالة عامة ما يجعل أنه تقريباً لا يحدث أبداً أن نحصل على نتيجة من النوع "هذه المتتالية أو تلك تتقارب نحو نهاية باحتمال  $\rho \in (0,1)$ "

يمكن القول بشكل ما إن القانون الطبيعي لقانون الاحتمالات هو أن يولد يقيناً في إطار حدوده الخاصة. على الرغم من أن قوانين  $\sigma$  أو  $\lambda$  لـ Kolmogorov Hewitt – Savage يبقى منصوحاً عليها في الحالة الخاصة لمتتالية مستقلة يمكن تمديدها في أغلب الحالات ذات الأهمية، ما يعطي طابعاً كونياً لقانون  $\sigma$  أو  $\lambda$ . هذا يعبر عن خاصية مانوية لقوانين المصادفات (كثير من التوليدات الفيزيائية أو الأخرى قُدمت لجعل هذا الاعتقاد المانوي قانوناً أساسياً للطبيعة.

لن ندخل في مثل هذا النقاش مكتفين بالنص الرياضي للقوانين. لقد ذكرنا سابقاً في الباب III مبدأ المارتنجيل. نعيد تناول هذه التركيبية في شكل مبسط إذا كانت  $X_1, X_2, \dots$  متتالية عشوائية نقول إنها مارتنجيل إذا كان لكل  $\dots, n = 2$

$$E(X_n / X_{n-1} \dots X_1) = X_{n-1}$$

مارتنجيل سفلية إذا كان لكل  $\dots, n = 2$

$$E(X_n / X_{n-1}, \dots, X_1) \geq X_{n-1}$$

مارتنجيل علوية إذا كان  $E(X_n / X_{n-1}, \dots, X_1) \leq X_{n-1}$  لكل  $\dots, n = 2$

يمكن أن نحفظ بالفكرة الحديثة أن المارتنجيل السفلية "تميل إلى الصعود" و العلوية " تميل إلى النزول. إذا كان  $X_1, \dots, X_n$  متتالية متغيرات عشوائية مستقلة لها القانون نفسه و التوقع المنتهي نفسه  $\mu = E(X)$  من السهل أن نرى أن  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  تعرف مارتنجيل سفلية إذا كان  $\mu \geq 0$  و مارتنجيل علوية إذا كان  $\mu \leq 0$  و مارتنجيل إذا كان  $\mu = 0$ . بالطريقة نفسها مبلغ كسب لاعب إثر  $n$  لعبة، إذا كان يلعب متتالية ألعاب مستقلة ذات توقع الكسب لصالح خصمه مارتنجيل علوية. النتيجة الأساسية في هذه النظرية هي نظرية تقارب المارتنجيلات التي أثبتت في شكلها الأساسي من طرف Doob في 1940

(J.L. Doob 1940)

"خصائص انتظام بعض مجموعات متغيرات الحظ" (TAMS, 47,455-486). هذه النظرية تبين أن مارتنجيل تقارب دوماً نحو نهاية محدودة، إذا كانت متتالية التوقعات محدودة. فكرة الانطلاق للبرهان بسيطة جداً. نأخذ مارتنجيل سفلية  $\dots, T_2, T_1$  (تجريبياً لها ميل للصعود) و نأخذ فترة محدودة

من  $0 \leq a \leq b < \infty$  نعرف  $R^+ = [0, \infty)$  عدد التقاطعات الصاعدة بين  $a$  و  $b$  كعدد المرات التي تمرّ فيها المتتالية  $T_1, \dots, T_n$  من قيمة أقل أو تساوي  $a$  إلى قيمة أكبر أو تساوي  $b$ . نثبت أن

$$bE(\beta_n) \leq E(T_n)$$

بما أن  $T_n$  مارتنجيل سفلية  $E(T_n)$  غير متناقصة لذلك إذا كانت  $E(T_n)$  محدودة فإن  $E(T_n) \lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n)$  موجودة و منتهية نستنتج أن العدد  $\beta = \lim \beta_n$

عدد التقاطعات الصاعدة للفترة  $[a, b]$  منه باحتمال واحد. بتغيير  $a$  و  $b$  نستنتج أنه:



إذا كانت  $T_1, T_2, \dots, T_n$  مارتنجيل سفلية موجبة بحيث  $\sup E(T_n) < \infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  موجودة و منتهية باحتمال واحد. بالإضافة :

$$\forall \epsilon > \lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) \leq E(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n)$$

هذه النتيجة تعمم إلى أي مارتنجيل سفلية  $T_1, \dots, T_n$  بملاحظة أن

$$\sigma_n = \max(T_n, 0)$$

هي أيضا مارتنجيل سفلية نستعمل كذلك مسألة أنه إذا كانت  $S_1, S_2, \dots$  مارتنجيل فإن  $|S_1|, |S_2|, \dots$  تعرف مارتنجيل سفلية موجبة و نستنتج نظرية تقارب المارتنجيلات التي تنص على أنه :

إذا كان  $S_1, S_2, \dots$  مارتنجيل بحيث  $\sup E(|S_n|) \leq K < \infty$  فإن النهاية  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  موجودة و منتهية باحتمال 1. بالإضافة النهاية تحقق المتباينة  $E(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n) \leq K$  وراء كل هذه التطورات النظرية في الظاهر، تختبئ فكرة اللعب. تأول المارتنجيل السفلية الموجبة بأنها مبلغ الكسب في لعبة رابحة. نظرية تقارب المارتنجيلات تبين أن هذا المبلغ يتقارب دوماً نحو نهاية ما عندما يبقى توقعه محدوداً.

نستنتج أنه في متتالية ألعاب بين لاعبين يملكان ثروتين محدودتين، و على شرط أن يبقى اللعب متوازناً من البداية إلى النهاية يكون اللعب في صالح اللاعب نفسه، مع احتمال 1 بأن تنتهي اللعبة دائماً بإفلاس أحد اللاعبين.

لنبين قوة الطرق التي أساسها المارتنجيلات، نذكر أنه من الممكن استنتاج قانون الأعداد الكبيرة المعهود من نظرية تقارب المارتنجيلات نأخذ  $X_1, \dots, X_n$  متتالية متغيرات مستقلة ممركرة  $E(X) = 0$  و إذا وضعنا  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  المتتالية  $S_1, \dots, \frac{S_n}{n}, \dots, \frac{S_n}{2}, \dots, \frac{S_n}{n}$  مارتنجيل. بتطبيق نظرية تقارب المارتنجيلات نستنتج إذا كانت  $E(X)$  موجودة أن  $\frac{S_n}{n}$  تقاربية باحتمال 1 و النهاية لا يمكن إلا أن تكون ثابتة و مساوية  $E(X)$  من نظرية 1 أو 1. Kolmogorov .

منذ ظهور أهمية المارتنجيلات الراجع لـ Josef Leo Doob 1910–2004 (انظر J.L.Doob "العمليات العشوائية" (New.York, Wiley (1952) استعمال التقنيات المرتبطة تعمم إلى حساب الاحتمالات إلى أن أصبح الوسيلة الأساسية. في الواقع أغلب قوانين الأعداد الكبيرة الكلاسيكية في حساب الاحتمالات يمكن إثباتها بفضل هذه الطرق

## الفصل التاسع

# النظرية المسرانية والطابع الكوني لتقارب معدلات المتتاليات المستقرة

النظرية المسرانية الاحتمالية هي دراسة تحويلات فضاء أحداث إلى نفسه تترك الاحتمال لا متغير. فكرة المسرانية ولدت بعيدا عن حساب الاحتمالات في دراسة الظواهر الميكانيكية .

إذا أخذنا نظامًا محافظًا. أي يتغير بطريقة معزولة عن الخارج، و لهذا يحافظ على طاقته دون ضياع - نستطيع أن نصف طابعه المحافظ بوساطة إحدائياته المعممة للموقع  $x = (x_1, \dots, x_N)$  إذا كان للنظام  $N$  درجة حرية و عزم  $p = (p_1, \dots, p_N)$  إذا كان  $H = H(x, p)$  يرمز للهاميلتونيان للنظام ممثلًا الطاقة، تحول النظام مع الوقت إلى محكوم بالمعادلات الهاميلتونية

$$1 \leq i \leq N \quad \text{و} \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

كمثال حركة نقطة ذات وزن (أو صلب نقطة كتلته  $m$ ) يتعرض إلى قوتَي: توصف الجاذبية و الحركية في محور إحداثيات عمودي بالمعادلات الجاذبية و الحركية توصف في محور إحداثي عمودي بالمعادلات.

١- الطاقة الجميلية = {الطاقة الحركية} + {الطاقة الكامنة}

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx =$$

حيث  $v$  السرعة  $\frac{dx}{dt}$ ،  $X$ : الموقع العمودي

g ثابت الجاذبية = ٩,٨١ م/ث<sup>٢</sup>

٢) نضع في المعادلات السابقة  $x = x_1$  و  $p_1 = mv$  و  $N=1, p = p_1$  نتثبت من أن المعدلات الهاميلتونية متحققة بما أن

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial (mv)} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = v$$

$$\frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} = -mg = m \frac{d^2x}{dt^2}$$



حركة نقطة تحت تأثير الجاذبية

إذا تحول النظام يمكن أن نصفه بتحول نقطة  $R^{2N} \in (x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N)$

تتغير في فضاء ذي  $2N$  بعد و مع الوقت. إذا أخذنا تغيرات  $w(t)$  بالنسبة إلى موقعها الأولي  $w(0)$  التحويلية  $w(t) \rightarrow w(0)$  تُعرف دالة  $\tau_t$  تتأثر بالوقت من الفضاء  $\Omega = R^{2N}$  إلى نفسه معرفة كالآتي:

$$\tau_t: w(0) \in \Omega \dots \rightarrow w(t) = \tau_t(w(0)) \in \Omega$$

طبيعة التحويلية  $\tau_t$  توضح بنظرية Liouville الذي تثبت عدم تغيير مقياس Lebesgue في  $\Omega = R^{2N} \dots$  تحت هذا التطبيق. في المثال لنقطة ذات وزن نثبت من نظرية Liouville في  $R^2$  بملاحظة أن المعادلات الهاميلتونية للحركة تختصر بالنسبة لموقع أولي  $x_0$  و سرعة أولية  $v_0$  إلى

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + v_0mv = mgt + mv_0$$

هكذا في المثال التحويلية  $\tau_t$  تُعرف في  $R^2$  كالآتي:

$$\tau_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + t\frac{v}{m} + \frac{1}{2}gt^2 \\ v + mgt \end{pmatrix}$$

تحويلة من  $R^2$  إلى نفسه تحافظ بالفعل على مقياس Lebesgue. دراسة الأنظمة الحافظة للطاقة يقابل إذن دراسة التحويلات التي ترتبط بالوقت من  $\Omega = R^{2N}$  إلى نفسه، التي تحافظ على مقياس Lebesgue. من هنا جاء الاسم "النظرية المسرائية" (الطاقة=ergos. في الاحتمالات، نبدأ بمتتالية مستقرة معرفة كمتتالية متغيرات  $X_1, X_2, \dots$  معرفة على فضاء الاحتمالات نفسه  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  حيث

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{R}^{\{1,2,\dots\}}$$

نعرف تحويلية تحافظ على الاحتمال بالتعريف

$$w \rightarrow \tau_1(w)$$

$$(x_1, \dots, x_n, \dots) \otimes t_1(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots) \dots W$$

العملية مستقرة إذا كان قانون  $(x_k, x_{k+1}, \dots)$  مستقلاً عن  $k$  هذا الطابع المستقر يوصف بأن التحويلة  $\tau_1$

$$\text{تحقق لكل } A \in \mathcal{A}, P(\tau_1(A)) = P(A)$$

أبسط مثال على متتالية مستقرّة معطى بمتتالية متغيّرات مستقلّة لها القانون نفسه. مثال آخر ذكر في الباب السادس معطى بالعناصر المتتالية للنشر في كسر متواصل لعدد بين 0 و 1. من متتالية مستقرّة أولى  $\{Y_n, n \in Z\}$  مؤشراتها  $Z = \{0, \pm 1, \pm 2\}$  نبي بسهولة متتاليات أخرى مستقرّة بمعادلات متحركة من الشكل

$$n \in Z \text{ لكل } X_n = \sum_{k=-M}^M a_k Y_{n-k}$$

في حال وصف تحوّل سائل في حركة المعادلات الهاميلتونية التي تصف النظام كدالة في الوقت غير قابلة للاستعمال بسبب أنها تدمج عددًا مرتفعًا من المتغيّرات (العدد نفسه للجزيئات التي تكوّن السائل) يستحيل فيزيائيًا تحديد كلّ مواقعها الأولى. إذا أردنا مع ذلك وصف النظام إجمالًا يأخذنا هذا إلى قياس كميات مرتبطة بالظاهرة. إذا كانت  $w \in \Omega$  ترمز للنقطة الجارية للنظام نهتم بالذالة الحقيقية  $X(w)$  المحددة بهذه النقطة بما أنّ  $X(w)$  ليست قابلة للمشاهدة مباشرة نبحث عن إمكانية حساب "قيمة متوسطة" بتعبيرات مثل:

$$\frac{1}{n} \{X(w) + X(t(w)) + \dots + X(t^{n-1}(w))\}$$

التي تمثل معدلات مشاهدات مختارة على فترات منتظمة من الوقت. اضطر الفيزيائيون إلى افتراض أنّ المعدّلات السابقة المحسوبة بدلالة الوقت تتقارب نحو نهايات متساوية مع ما نحصل عليه عندما. في لحظة معطاة. نحسب المعدلات نفسها لكل المكونات الفردية للسائل.

ما ذكرناه الآن ببساطة هو ما يسمّيه الفيزيائيون "الفرضية المسرائية". أهميتها تكمن في مسألة أنه في أغلب الاستنتاجات التي تؤدي إلى إثباتها تؤكدتها التجربة. إذن هي نظرية لها نجاعة حيث النموذج يتأقلم مع المعطيات. مع ذلك، و بعيدًا عن كلّ تناول فيزيائي، و بعيدًا عن ميكانيكا السوائل نلاحظ أنّ هذه الفرضية تعود في النهاية إلى تقرير تقارب المعدلات الاحتمالية من نوع

$$\text{حيث } \Omega \rightarrow \Omega. \rightarrow \tau \text{ تحويلة تدع غير متغيّر قانون الاحتمال في}$$

$$\frac{1}{n} \{X(w) + X(t(w)) + \dots + X(t^{n-1}(w))\}$$

الفضاء  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  و الرمز  $X(W)$  متغيّرًا عشوائيًا محدّدًا بقيمة الحدث الابتدائي  $w \in \Omega$ . نلاحظ مع هذه الكتابة أن الفرضية المسرائية مكافئة لقول أن المتتالية المستقرّة للمتغيّرات العشوائية  $\{n \geq 1, X(\tau^n(w))\}$  تحقق قانون أعداد كبيرة (بمعنى التقارب للمعدلات نحو نهاية).

تحت أي شروط يكون لنا قانون نهاية؟ إذا كان عندنا  $X_1, X_2, \dots$  متتالية عشوائية مستقرّة معرفة على فضاء احتمالات  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  من الممكن تعريف لهذه المتتالية، السجما حقل للأحداث اللا متغيّرة (انظر الباب الثامن)

حدث  $A$  من  $\mathcal{A}$  لا متغيّر و فقط إذا كان  $\tau(A) = A$ . لنذكر (انظر الباب VIII) أنّ أي حدث لا متغيّر هو حكمًا حدث ذيلي. النظرية الأساسية المسرائية لمثل هذه المتتالية أثبتها Birkhoff في 1931

(Proof of Ergodic theorem Proc. Nat. Acad. Sci. Etats Unis 17)

و عَمَّها من بين آخرين (١٩٣٣) Khintchine (1945-47) Riesz دون أن ننسى أعمال  
Dunford, Kakutani, Yosida, VonNeumann

. Doob و Miller و Hartman, Ryll – Nardzewski

النتيجة نكتب، لمتتالية مستقرّة  $\{X_n, n \geq 1\}$  مع الشرط  $E(X) = X_1$  موجود أنّه باحتمال واحد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X/A_1)$$

النهاية تساوي التوقع الشرطي  $E(X/A_1)$  للمتغير  $X = X_1$  ، إذا عرفنا السيجما حقل  $\mathcal{A}_1$  للأحداث  
اللامتغيرة على  $\{X_n, n \geq 1\}$ . في حال كانت متغيرات المتتالية تقاربياً مستقلة، أي تحقّق لكل A و B في  
 $\mathcal{A}$  ،  $P(A \cap \tau^n(B)) = P(A)P(B) \rightarrow 0$  عندما تؤول n إلى  $\infty$  يمكن أن نثبت أن أحداث  $\mathcal{A}_1$  تحقّق  
قانون ١٠ أو ١ في هذه الحالة  $E(X/A_1) = E(X)$  باحتمال ١، و نجد قانون الأعداد الكبيرة الكلاسيكي.

الطرق المستعملة في النظرية المسرائية خاصة جداً، و تجعل من هذا المجال جزءاً منفصلاً من حساب  
الاحتمالات. النتيجة التي ذكرناها تعطي فكرة جزئية جداً عن النتائج العميقة التي أمكن استنتاجها من الفكرة  
المسرائية الأولية. يبقى أنّه من اللافت للانتباه- حيث يثبت تحت الشرط أن التوقعات للمتغيرات منتهية- أن  
التقارب للمعدلات يبقى دائماً صحيحاً لمتتالية مستقرّة لمزيد التفاصيل انظر:

M. Loeve (1977) Probability Theory , Springer

## الفصل العاشر

### قوانين اللوغاريتم المكرر Hartman – Wintner و, De Strassen

لنكن...  $X_1, X_2, \dots$  نسخ مستقلة من المتغير العشوائي  $X$ . تحت شرط وجود العزم من الدرجة ٢ لنعرف المعدل  $\mu$  و التباين  $\sigma^2$  للمتغير  $X$  كالآتي :

$$\mu = E(X), \sigma^2 = \text{var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

نظرية النهاية المركزية ( انظر (Math. Zeit 15, 211-225 (1922) J.Lindeberg و

(W .Feller 1935) Math Zeit 40, 521. 559)

تبيّن أن دالة التوزيع  $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$  حيث  $\sigma > 0$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ أي } N(0,1) \text{ لقاتون عادي}$$

لنثبت  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  و نرمز بالرمز  $v_\varepsilon$  المتغير العلوّي للقاتون العادي  $N(0,1)$  المعروف كالثابت الوحيد الذي يحقق  $\phi(v_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$ . كنتيجة مباشرة لنظرية النهاية المركزية نجد أنّه لكل  $0 < \varepsilon < 1$  يوجد  $n_\varepsilon$  بحيث لكل  $n \geq n_\varepsilon$  عندنا

$$P\left( \left| \frac{1}{n} \sum X_i - \mu \right| \geq \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{n}} \right) \leq \varepsilon$$

حيث  $C_\varepsilon$  ثابت موجب يمكن أن يأخذ مساوياً لـ  $\sigma v_{\varepsilon/4}$

هذا يبين أن سرعة التقارب للقاتون الضعيف للأعداد الكبيرة لـ Bernoulli هو  $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  و النتيجة هي الأمثل، حيث لا يمكن أن توجد سرعة أكبر لهذا التقارب.

و بصفة أوضح النتيجة تبيّن أنّه لكل  $0 < \varepsilon < 1$  و كلّ  $n \geq n_\varepsilon$  يوجد حدث  $E_{n,\varepsilon}$  بحيث  $P(E_{n,\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$  و على  $E_{n,\varepsilon}$  عندنا

$$\left| \frac{1}{n} \sum X_i - \mu \right| \leq \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

ماذا يمكن القول فيما يخص سرعة التقارب للقانون القوي للأعداد الكبيرة؟ نتوقع بصفة طبيعية سرعة تقارب أبداً من  $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  حيث إن هذه السرعة لا تتحقق إلا على  $E_{n,\varepsilon}$  الذي احتمالته أقل من واحد. كما أسلفنا في الباب الخامس المسألة أجاب عنها Khintchine في 1923م في الحالة الخاصة لمتغيرات Bernoulli التي تحقق  $p \in (0,1)$  و  $p = P(X = 1) = 1 - P(X = 0)$ . نتيجته تبين أن التقارب باحتمال 1 هو

$$O\left(\sqrt{\frac{\log \log n}{n}}\right)$$
 على الشكل

كان لا بدّ من الانتظار حوالي ٢٠ سنة من الجهد حتى يتوصل

Aurel Wintner و Philip Hartman في 1941م إلى نتيجة عممة (انظر K. L. Chow, H. Teicher (1988), Probability, Theory, New York Springer .Chow

K.المزيد من التفاصيل).

حتى نقدّم النتيجة نذكر بالتعريفين الكلاسيكيين :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{m \geq n} u_m \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{m \geq n} u_m \right\}$$

قانون اللوغاريتم المكرر P.Hartman و (1941) Wintner (169-176, M 63 .A.J.

يبين مع المعطيات المذكورة أنه باحتمال 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\sigma \log \log n}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\sigma \log \log n}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right\} = -1$$

هذا القانون المعروف باسم قانون اللوغاريتم المكرر بسبب الدالة

$\log \log n = \log(\log n)$  يظهر خصائص مميزة للسلوك النهائي للمجموع الجزئي

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

من الدرجة  $n$  من المشاهدات. مثلما هو الحال في نظرية النهاية المركزية، في قانون اللوغاريتم المتركز تنبذبات  $S_n$  لا تتأثر أساساً إلا بكمي  $\mu$  (متوسط التوقع) و  $\sigma^2$  (التباين) "مجاهلة" باقي خصائص توزيع  $X$ . من ناحية أخرى قانون اللوغاريتم المتركز يثبت أنه باحتمال 1 المجموع الجزئي المتركز  $S_n - n\mu$  يقطع عدد غير منته من المرآت المستوى 0 و في الوقت نفسه يقطع عدداً غير منته من المرآت لكل  $0 < \varepsilon < 1$  مثبتة المستويات القصوى  $\sqrt{2n \log \log n}$   $\mp(1 - \varepsilon)\sigma$

وجب الانتظار 20 سنة أخرى بعد أعمال Hartman و Wintner حتى مكن التطور العلمي من فهم أفضل للتركيب العميقة لنذبذبات المجموع الجزئي  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  بمقارنة هذه النذبذبات بنذبذبات الحركة البراونية بفضل مبادئ اللاتغير. قبل ذكر هذه النتائج يجدر أن نعيد الحنيث عن الحركة البراونية المنكورة في الباب الرابع أو عن تمثيلها الرياضي عملية Wiener Levy الأشياء العلمية سميت هكذا احتراماً لـ Paul Norbert Wiener (1894-1964) و Levy (1886-1971).

إذا طلبنا من كثير من الرياضيين و الفيزيائيين تعريف عملية Wiener، لوجدنا كثيراً من الأجوبة المختلفة حيث هناك طرق عديدة لتحقيق هذه العملية. عملية Wiener دالة عشوائية بحيث لكل خيار  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  الزبذبات  $w(t_1) - w(0), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$  تعرف متغيرات عشوائية مستقلة تتبع قوانين عادية ذات الوسطاء المعرفة بـ:

$$E(w(s)w(t)) = \min(s, t), s, t \geq 0, E(W(t)) = 0$$

$$E((w(t) - w(s))^2) = |t - s|$$

استقلالية الزبذبات لعملية Wiener على فترات متتالية تسمح بإعادة تعريفها إلى التعريف على فترة. يكفي أن نوضح الخصائص العملية  $w(\cdot)$  على  $[0, 1]$  لكي نستنتج الخصائص على الفترة  $[0, \infty)$ . يمكن إذن أن نصف  $\{w(t), 0 \leq t \leq 1\}$  كمتغير عشوائي ذي قيم في الفضاء  $C[0, 1]$  فضاء الدوال المتصلة على  $[0, 1]$ . هذا الفضاء مصحوب بتوبولوجيا التقارب المنتظم فضاء متجهات معيّر و كامل (فضاء Banach). إذا أصبحناه بالسيجما حقل البورالي  $\beta$  أصغر سيجما حقل يحتوي المجموعات المفتوحة و المغلقة قانون احتمال  $W(t)$  على  $(C[0, 1], B)$  يعرف دون صعوبة تقنية و يمثل مقياس Wiener. من الممكن أيضاً تعريف عملية Wiener بالنشر في متسلسلة دوال متعامدة عواملها عشوائية. هذا النشر المسمى نشر (Karhunen-Loeve) معطى على  $[0, 1]$  بالمتسلسلة (المنتظمة التقارب باحتمال 1)

$$0 \leq t \leq 1, w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\{(k-1/2)\rho\}} \sqrt{2} \sin((k-1/2)\rho t)$$



حيث  $Y_1, \dots, Y_n$  متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ذات قانون واحد  $N(0,1)$  متركزة و مختصرة. الفيزيائي سوف يختار القول إن عملية Wiener هي تقريباً ما نحصل عليه في حركة براونية مسقطه، أي بلغة أخرى  $w(t)$  يتغير، باختصار، مثل  $S_{[nt]}$  حيث  $[u]$  الجزء الكامل من  $u$  و  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  مجموع جزئي لمتغيرات صغيرة عشوائية مستقلة كل منها توقعه صفر و تباينه ١. على الرغم من أن هذا التعريف تنقصه الدقة، و أن الفكرة التي وراءه قيمة حيث استعملت بنجاح من طرف Einstein (1905) الذي وضعه في الشكل الرياضي، و استعمله كوسيلة قوية لدراسة المتتاليات العشوائية فإنه لا يعود لأكثر من عقود عدة.

في ١٩٦٤ ملهما بأعمال الرياضي الروسي (1930) Anatoly Volodymyrovych Skorohod قدم  $V$ . Strassen برهاناً مميزاً لقانون اللوغاريتم المكرر مستعملاً تقنية جديدة جداً للمقاربة القوية  $(V$ . Strassen (1964) « An invariance principle for the law of iterated Logarithm » Z.Wahrscheinlichkeitstheorie 3,211-226

طريقة Strassen تتمثل في بناء عملية Wiener  $w(t)$  على فضاء الاحتمال نفسه (الذي يمكن تكبيره لجعل العملية ممكنة) الذي تعرف عليه المتتالية الأولية. إذا كانت  $X_1, X_n, \dots$  متغيرات عشوائية مستقلة لها القانون نفسه حيث  $E(X_i) = \mu = 0$  و  $V(X_i) = \sigma^2 = 1$  أثبت Strassen أنه يمكن بناء عملية Wiener  $w(t)$  بحيث باحتمال ١ حين نؤول  $t$  إلى  $\infty$

$$|S_{[nt]} - m - s w(t)| = O(\sqrt{t \log \log t})$$

برهان قانون اللوغاريتم المكرر ل  $S_n$  يتبع ببديها من أنه صحيح بالنسبة لعملية Wiener. في نفس البحث في ١٩٦٤ أثبت  $V$ . Strassen شكلاً دالياً لقانون اللوغاريتم المكرر. باستعمال الرموز نفسها يأخذ متتالية الدوال

$$f_n(t) = \frac{S_{[nt]} - \mu t}{6\sqrt{2n \log \log n}}, 0 \leq t \leq 1$$

يبين أنه، باحتمال ١ كل متتالية جزئية  $[f_{nk}, k \geq 1]$  من  $\{f_n, n \geq 3\}$  تحتوي متتالية جزئية متقاربة بانتظام على  $[0,1]$  نحو نهاية  $f$ . المجموعة، التي نرمز لها بـ  $S$ ، لكل النهايات المحصول عليها بهذه

الطريقة لها بناء متميز. هي مجموعة كل الدوال المتصلة مطلقاً على  $[0,1]$  و التي تحقق  $f(0) = 0$  و مشتقاتها  $f'(t)$  حسب تعريف Lebesgue, تحقق المتباينة  $\int_0^1 f'^2(t) dt \leq 1$

هذه النتيجة تبيّن، بلغة أخرى، أن المجاميع الجزئية "من بعيد" تتذبذب قريباً من مجموعة نهاية لدوال غير عشوائية، معرفة تماماً بهذه القواعد. تطبيق خارق للعادة لهذه القواعد يؤدي إلى الحصول على مجموعة كبيرة من القوانين النهائية. نأخذ لهذا الغرض دالة  $\theta(f) \rightarrow \theta$  التي تسند لكل دالة محدودة  $f$  على  $[0,1]$  قيمة عددية. نفرض أن  $\theta$  متصلة بالنسبة لتبولوجيا التقارب المنتظم .

كنتيجة لقانون اللوغاريتم المكرر الدالي ل Strassen نجد أنه باحتمال واحد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \theta(f_n) = \sup \theta(f) \quad f \in S$$

نجد بهذه الطريقة عدداً كبيراً من قوانين الأعداد الكبرى مثل: عدد الدوال  $\theta$  و حساب الجانب الأيمن من المعادلة السابقة يحصل عليه بطرق تحليلية بحتة (حيث ليس هناك احتمال) مرتبطة بالإطار العام لحساب التغيرات.

طرق Strassen منذ ذلك الوقت طوّرت في اتجاهات مختلفة باستعمال مبادئ لا تغير أو مقاربات قوية.

هكذا إذا فرضنا أنّ  $E(\exp(tX_1)) < \infty$  لكل  $t < \epsilon$  صغير بما فيه الكفاية، فالرياضيَّان المجريَّان

Tusnady و Kolmos, Major أثبتا في 1976-1976 أنّه يمكن مقارنة  $S_{[nt]}$  بعملية Wiener مع

خطأ منتظم في  $[0,1]$  لا يتجاوز Clogn، باحتمال، 1 و  $C > 0$  ثابت مناسب. هذه الشروط متحقّقة

لمتغيرات Bernoulli. لهذا في حالة  $P(X_1 = 1) = p$

$P(X_1 = 0) = 1 - p$  نستطيع مقارنة  $S_n$  بـ  $np + \sqrt{p(1-p)}w(n)$  بخطأ درجته  $O(\log n)$  (إذا آلت  $n$

إلى  $\infty$  باحتمال 1). نحيل لمزيد من التفاصيل إلى:

"M.Csorgo an P.Revesz 1981" Strong approximations in Probability and Statistics"

\* Academic Press 1981 . وكذلك للكتاب

G.Shorack et J.A.Wellner (1986) Empirical processes With Applications to

Statistics ,New York , Wiley



## الفصل الحادي عشر

# قوانين أخرى للأعداد الكبيرة استقرار القيم العظمي العادية نظريّة Glivenko-Cantelli

تقارب المعدلات ليس النظرية الوحيدة المميزة لحساب الاحتمالات، و نتائج مثل قوانين ٠ أو ١ لـ Kolmogorov و Hewitt -Savage تنفع للاعتقاد بوجود كُماً آخر من "قوانين أعداد كبيرة" تصف سلوكيات مؤكدة للمتتاليات العشوائية.

من بين الإحصاءات المفيدة التي يمكن القيام بها على متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ذات القانون نفسه  $X_1, \dots, X_n$ ، إضافة إلى المعدلات التي -كما رأينا- تتقارب باحتمال واحد، نحو التوقع المشترك  $E(X)$  إذا كان منتهياً، يجب أن ننكر بالدرجة الأولى القيم القصوى

$$Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \text{ و } V_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

إذا كان معروفاً منذ Gauss et Laplace أنّ توزيع المعدلات حول التوقع يؤول إلى التوزيع العادي إذا كان التباين للمشاهدات منتهياً، فإننا لا نعلم - إلا نادراً أنّ القيم القصوى تقاربياً لمعظم القوانين البسيطة المعروفة (باستثناء التوزيعات المتقطعة) نحو قوانين نهاية (يعبر عنها بالنسبة للقيمة القصوى  $Z_n - \frac{b_n}{a_n}$  بتغيير مناسب للسلم و التقارب يكون نحو التوزيع لمتغير عشوائي Z)

- قانون Frechet

$$a > 0 \quad P(Z \leq x) = \varphi_a(x) = \exp(-x^{-a}) \quad x > 0$$

- قانون Weibull

$$a > 0 \quad P(Z \leq x) = \psi_a(x) = \exp(-(x)^{-a}) \quad x < 0$$

- قانون Gumbel

$$P(Z \leq x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$$

هذه النتيجة وضعت في شكلها النهائي في ١٩٤٣ من طرف الرياضي الروسي

Boris Vladimirovitch Gnedenko(1912-1995)

« sur la distribution limite du maximum d'une serie aleatoire Ann Math , 44,423-453

The Asymptotic Theory J.Galambos 1987 المونو جراف إلى: المونو جراف

Of Extreme Order Statistics (1981), Malabar Florida , Krieger

و كتب H. David « Order statistics » (1981), NewYork Wiley

لنتناول الحالة الخاصة للأكابر الجزئية لمتتالية عادية  $X_1, \dots, X_n$  حيث المتغيرات العشوائية مستقلة، و ذات القانون نفسه العادي الممركز والمختصر  $N(0,1)$ ، حيث لكل  $n \geq 1$

$$P(X_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

نجد إذن كتطبيق للنظريات النهائية إذا كان  $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  فإن

من غير المتوقع أن يظهر  $\log 4\pi$  هنا. من ناحية أخرى العامل  $\sqrt{2 \log n}$  يؤدي إلى أن المتتالية تتركز بالمقارنة على المتتالية الثوابت

$$c_n = \sqrt{2 \log n} + \frac{\log \log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2 \log n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{2 \log n} \left\{ Z_n - \sqrt{2 \log n} + \frac{\log \log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2 \log n}} \right\} \leq x) = \exp(-e^{-x}) \quad R$$

بطريقة أوضح يمكن أن نثبت أنه لكل  $0 < \varepsilon < 1$  و مع احتمال واحد لكل  $n$  كبير بما فيه الكفاية، الحصر

$$\frac{(1-\varepsilon) \log \log n}{2\sqrt{2 \log n}} \leq Z_n - \sqrt{2 \log n} \leq \frac{(1+\varepsilon) \log \log n}{2\sqrt{2 \log n}}$$

هذه النتيجة هي أفضل ما يمكن الحصول عليه بالمعنى أنه غير متحقق إذا كان  $\varepsilon = 0$  ينتج عن هذا مباشرة أنه باحتمال ١

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{Z_n - \sqrt{2 \log n}\} = 0$$

مثل هذه النظرية قد تبدو كتناقض أنها تسمح بالفعل- إلى حد - ما بالتنبؤ بالقيم الفردية المتتالية  $X_1, \dots, X_n, \dots$  بعد درجة معينة  $n$  من المشاهدة. إذا كانت  $n$  أكبر  $n_0$  من الذي من بعده عندنا

$$|Z_n - \sqrt{2 \log n}| < 0.01$$

نستطيع التنبؤ- بكل تأكيد- أنه ما بين اللحظة  $n$  للمشاهدة واللحظة  $n+k$  المعرفة بالمساراة

$$\sqrt{2 \log n + k} - \sqrt{2 \log n} = 0,02$$

سوف يكون- حتماً- أحد عناصر المتتالية  $X_n, \dots, X_{n+k}$  قد تجاوز المستوى  $\sqrt{2 \log n}$ . نستطيع المخاطرة على حدوثه مع احتمال الريح مساو لـ 100%.

لكن بما أن متغيرات المتتالية مستقلة، يجب أن يكون مستحيلًا التكهن بمثل هذا الحدث و كذلك تأكد الريح يبدو مشبهاً بصفة طبيعية. في الواقع ليس هناك تناقض حيث إن المخاطرة صحيحة فقط في حال  $n$  أكبر من  $n_0$ . هذا الشرط يؤثر على تحقق المتتالية و يسمح بتنبؤ ليس له قيمة مؤكدة بدونه.

مثل هذه الأمثلة تبين أنه ليس عبيثاً أن نبحث عن قوانين أعداد كبيرة تؤدي "بعد رتبة معينة من المشاهدة"، باحتمال 1، إلى التنبؤ بسلوك العناصر الفردية لمتتالية عشوائية. لكن بعض التفكير (انظر نتائج الباب الآتي) تبين أنه من الادعاء الاعتقاد أنه يمكن بناء إستراتيجية رابحة في اللعب على مثل هذه الخواص. فعلاً نعوض حدسية ( $n$  تتجاوز  $n_0$ ) بيقين (مشاهدة بعض القيم القليلة للتوقع إذا كانت المخاطرة قد كسبت).

علينا أن نكون قادرين على تقييم خطر الحدسية (المقاسة هنا باحتمال أن  $n$  يتجاوز  $n_0$ ) لتحديد ما إذا كان "اللعب تسوّغ العزيمة" أم لا.

القانون العادي ليس التوزيع الاحتمالي الوحيد الذي بالنسبة له القيم القصوى لمتتالية عشوائية من المتغيرات المستقلة، ذات القانون نفسه، تحقق قانون نهاية، باحتمال 1، من الأوصاف المذكورة القيم القصوى  $\{X_1, \dots, X_n\}$  التي تحقق  $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow Z_n - b_n$  تسمى مستقرة (المتتالية الثانية هنا غير عشوائية و تختار بعناية).

كانت موضوع أعمال عديدة انظر (Geffroy(1958) و (Resnick and Tomkis (1973) مثال آخر غريب لقانون الأعداد الكبيرة يرجع إلى

Renyi و Erdos (J.Erdos et A.Renyi(1970)) « On a new law of large numbers » Journal d'analyse mathématique 22,103-111

هؤلاء الكُتّاب يأخذون متتالية متغيرات عشوائية مستقلة، ذات القانون نفسه، بحيث تكون الدالة  $\phi(t) = \exp(tX_1)$  منتهية لكل  $|t| < \varepsilon$  مع  $\varepsilon > 0$  عدد صغير بما فيه الكفاية. يهتمون بسلوك التعبير

$$M_n(k) = \max\{S_{m+k} - S_m, 0 < m \leq n - k\}$$

في الحالة الخاصة  $0 < k, c > 0$  ثابت  $S_0 = 0$  و  $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1$  كما في السابق هنا  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة، لها القانون نفسه. القانون الجديد للأعداد الكبيرة

ل Erdos et Renyi يبين أنه، باحتمال 1، عندما تؤول  $n$  إلى  $\infty$ ,

$$\alpha \rightarrow M_n([c \log n]) / ([c \log n]) \text{ حيث } E(x) > \alpha \text{ هي حل المعادلة}$$

$$\exp\left(-\frac{x}{c}\right) = \inf\{\phi(t)e^{-t\alpha}\}$$

الصعب استنتاج نتائج تأخذ شكلاً ليس بعيد المنال. مثال لهذا التطبيق نحصل عليه في حالة خاصة للعب القفا (المرقم ٠) أو الوجه (المرقم ١) مفترضين أن المتغيرات تحقق

$0 < p < 1, P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p$  نستنتج من نظرية Erdos و Renyi، بثمن حساب ابتدائي نسبياً، بأن متتالية  $L_n$  للمتسلسلات المتتالية للوجه المشاهدة من بين  $n$  مشاهدة أولى  $X_1, \dots, X_n$  هي بحيث، باحتمال  $\rightarrow 1$  إلى  $n$   $\frac{Ln}{\log n}$   $-\log p$

لهذا نستطيع التنبؤ بطريقة دقيقة نسبياً بعدد " التمريرات الرابعة " ( انظر لمزيد التفاصيل P.Deheuvels Annals of Probability (1363-1386) et L .Devroye (1987)

مثلاً للعبة  $n$  مرة قفا ووجه نجد توقع  $6.6$  أي تقريباً  $7$  بالمقارنة للأعداد الصحيحة بالنسبة إلى  $L_n$ . علينا إذن أن نتوقع في مكان من متسلسلة

المشاهدات  $X_1, \dots, X_n$  سلسلة من  $\gamma$  (تقريباً) وجوه متتالية. بلغت الانتباه إلى أن قانون احتمال  $L_n$  هو بسيط نسبياً انظر ; P.Erdos P.Révez

"On the length of the longest head-run" Topics in information theory .Coll .Math .Soc .J.Bolyai ,16,219-228)

$$P(L_n \geq k) = P(M_n(k) = n) = \frac{n-k+2}{2^{k+1}} \quad k = 1, \dots, n$$

واحدة من القوانين للأعداد الكبرى تأخذ مكاناً استثنائياً في تطبيقات حساب الاحتمالات، هي نظرية Glivenco - Cantelli توصل إليها في 1933

Valerii Ivanovitch Glivenko (1879-1940)

و Francesco Paolo Cantelli (1875- 1966)

نأخذ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ولها دالة التوزيع نفسها

$$F(x) = P(X_1 \leq x)$$

لكل  $n \geq 1$  نعرف الدالة التوزيعية التجريبية كالاتي:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} = \frac{\text{number of } X_i \leq x}{n}; \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)| \right\} = 0 \quad \text{نظرية Glivenko-Cantelli تبين أنه باحتمال ١}$$

هذه النظرية تسمى أحيانا النظرية الأساسية للإحصاء؛ لأنها تبين أن مشاهدة عدد كاف من عناصر متتالية يؤدي، بدقة غير محدودة، إلى بناء قانون احتمال المتغيرات (مبدئيًا غير معروف) الذي يوصف بالدالة  $F(x)$ . سرعة التقارب لهذه النظرية حددت في ١٩٤٩ من طرف الرياضي الأمريكي الصيني Kai Lai Chung (ولد في ١٩٤٧) الذي أثبت أنه في حالة اتصال  $F$ ، باحتمال ١، عندنا

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2 \log \log n}} \left\{ \sup |F_n(x) - F(x)| \right\} = 1/2$$

مؤخرًا أثبت (1980) A.A. Mogulskii

"On the law of the iterated logarithm for function spaces" Theor Prob . App  
24,405-413

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sqrt{2n \log \log n} \left\{ \sup |F_n(x) - F(x)| \right\} = \frac{\pi}{2} \quad \text{أنه باحتمال ١}$$

نتيجة غير متوقعة بالمرّة بسبب وجود  $\pi$  في الجانب الأيمن من المعادلة. نوقف هنا أمثلتنا لأعداد الكبيرة لأن الموضوع شاسع لمتل هذه المساحة.

P.Revesz(1968) " the Laws of large numbers" Academic Press 1968

W.Stout (1974) « Almost sure Convergence" Academic Press

G.R.Shorack and J.A Wellner (1968) Empirical Processes with Applications to  
Statistics NewYork Wiley

لنتائج مشابهة من هذا الصنف





## المسار العشوائي ومسألة إفلاس اللاعب

نرجع هنا إلى الدراسة بالمصطلحات الاحتمالية- لألعاب المصادفة و خاصة تلك التي يكون تقدمها ممثلاً بالنتائج المتراكمة لأشواط مستقلة، في مسار عشوائي.

يمكن الرجوع إلى الكتب:

Espitzer (1964) "Principles of Random Walk " Princeton , Van Nostrand

W.Feller (1966) ; " An introduction to Probability

Theory and its applications" Vol II New York Wiley

لوصف هذه الأشياء العشوائية. لنذكر كذلك مونوجراف:

(1990) P.Revesz

"Random Walk in Random and Non-Random Environments" Singapour World

Scientific.

المرجع الأخير يحتوي تطورات مبدعة تغطي حالة المسارات العشوائية التي لا تحقق الفرضيات المعهودة. (انظر الأسفل)

المسار العشوائي الأبسط نحصل عليه من متتالية ألعاب قفا ووجه مستقلة. ننبئ التأويل الآتي: سائر على مستقيم غير منتهٍ ينطلق في اللحظة  $t=0$  من المصدر و يقوم بخطوة أولى إلى الأمام كل مرة تقع فيها القطعة النقدية على الوجه، و يقوم بخطوة إلى الوراء كل مرة تقع فيها القطعة على قفا. إذا عرفنا  $S_n$  موقع السائر في اللحظة  $n$  و إذا وضعنا  $X_n = 1$  عندما تظهر القطعة وجه و  $X_n = -1$  عندما تظهر قفا .

المسار العشوائي  $\{S_n, n \geq 0\}$  يعرف كالاتي  $S_0=0$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad n \geq 1$$

في هذا النموذج  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة ذات القانون نفسه المعرفة كالاتي :

$$X_1 = 1, \frac{1}{2}$$

باحتمال  $X_n = -1, 1/2$

نستطيع أن نسد لهذا المسار العشوائي تأويلات متعدّدة، مثلاً الكسب المتراكم إذا خاطرنا دائماً بالمبلغ نفسه في متتالية ألعاب متوازنة (اللاعبون عندهم فرص الكسب نفسها في كلّ لعبة مفردة). المسار العشوائي المبني هكذا ينتمي إلى طائفة من عمليات Markov (التي سميت إكراماً لـ Markov).

Andrei Andreyevitch Markov (1856–1922)

التي تصفها الخاصية أن تطور  $S_{n+2}, S_{n+1}$  إذا عرفنا  $S_0, S_1, \dots, S_n$  لا يتأثر إلا بـ  $S_n$ . بلغة أخرى في مثل هذا النموذج، المستقبل إذا علمنا الماضي، لا يتأثر إلا بالحاضر المباشر. نستطيع تعميم هذا المثال مقترضين أن اللعبة ليست متوازنة، حيث احتمال الكسب يصبح  $p$  و  $1 < p < 1$  في هذه الحالة نعرف قانون  $X_n$  كالآتي:

باحتمال  $X_n = 1$   $p$

باحتمال  $X_n = -1$   $1 - p$

في حال توقف اللعب عندما تصل قيمة الكسب  $S_n$  إلى مستوى محدد  $N \geq 0$  نحصل على مسار عشوائي محدود.

نمثل مثل هذا المسار بسحب المصدر - إذا لزم الأمر - من  $S_n = 0$  إلى  $S_n = k$

بالعلاقات الاستقرائية الآتية (المبلغ الأولي للثروة للاعب)  $S_0 = k$

إذا كان  $S_n = 0$  و  $n \geq 0$  فإن  $S_{n+1} = 0$

إذا كان  $S_n = N$  و  $n \geq 0$  فإن  $S_{n+1} = N$

إذا كان  $0 < S_n < N$  فإن

باحتمال  $S_{n+1} = S_n + 1$   $p$

باحتمال  $S_{n+1} = S_n - 1$   $1 - p$

يمكن تعميم هذا النموذج أيضاً بافتراض أن اللاعب - في بعض الحالات - يحتفظ بكسبه دون تغيير.

يعود هذا إلى اعتبار العلاقات الاستقرائية الآتية:

المبلغ الأولي لثروة اللاعب  $S_0 = k$

-إذا كان  $S_n = 0$  فإن  $n \geq 0$   $S_{n+1} = 0$

-إذا كان  $S_n = N$  و  $n \geq 0$  فإن  $S_{n+1} = N$

- إذا كان  $1 \leq S_n \leq N - 1$  فإن  $S_{n+1} = S_n + 1$  مع احتمال  $P$

مع احتمال  $Q$   $S_{n+1} = S_n$

مع احتمال  $R$   $S_{n+1} = S_n - 1$

حيث إن  $P, Q, R$  ثابت موجبة تحقق  $P+Q+R=1$

سوف نرى في الباب الثالث عشر أنه باحتمال 1 أي مسار عشوائي محدود ينتهي:  
إما بمشاهدة:

$S_n = 0$  إفلاس اللاعب

أو بمشاهدة:

$S_n = N$  إفلاس الخصم.

احتمال الواحد أو الآخر من بين الحدين لا يتأثر إلا بالقسمة  $\frac{P}{P+R}$  لهذا التقدم النهائي للعبة السابقة مماثل  
للعبة تصفها العلاقات الاستقرائية الآتية (المبلغ الأولى للثروة للاعب)  $S_0 = k$

-  $S_{n+1} = 0$  إذا كان  $S_n = 0$   $n \geq 0$

-  $S_{n+1} = N$  إذا كان  $S_n = N$  و  $n \geq 0$

- إذا كان  $1 \leq S_n \leq N - 1$  فإنه باحتمال  $\frac{P}{P+R}$   $S_{n+1} = S_n + 1$ ,

باحتمال  $\frac{R}{P+R}$   $S_{n+1} = S_n - 1$

بسبب هذه الخاصية، إضافة احتمال  $Q$  لا يغير التقدم النهائي للعبة مع أنه يساهم في تأجيل نهايتها. كمثال: إذا  
عرضت عليكم لعبة حيث يكون لكم:  
١٥% فرصة للكسب.

٦٠% فرصة للمحافظة على ما عندكم .

٢٥% فرصة للخسارة .

سوف تحدث الأمور كما لو كان عندكم :

$$37,5\% \text{ فرصة للكسب } \frac{15}{15+25}$$

$$62,5\% \text{ فرصة للخسارة } \frac{25}{15+25}$$

اللاعب البسيط أو المتفائل، سوف يحتفظ في النسخة الأولى من اللعبة بأنَّ له 75% نسبة الكسب أو المحافظة على ماله. يجب الحذر من هذه الأوهام مثل أوهام دور اللُّعب التي تقدِّم تعويضات لكثير من التذاكر، مع تحديد كبير لاحتمالات الربح الحقيقي. مثل هذه العمليات تعطي الانطباع للأعين بالربح في كثير من الحالات، في حين أنَّ احتمالات خسارة كلِّ ما يملكون- في وقت قد يطول نسبيًّا. تبقى مرتفعة.

المسار العشوائي المحدود، يسلك مثل مسار عشوائي غير محدود قرار إيقاف تقدِّمه ابتداءً من نقطة انطلاق  $k$  إذا وصل إلى مستوى  $N$  أو المستوى  $0$ .

من المهمَّ تحديد الخصائص الاحتمالية لمثل هذه اللعبة، و خاصةً احتمال إفلاس اللاعب الذي يقابل وجود وقت  $n$  تكون بعده  $S_n = 0$ .

في الباب الثالث عشر سوف تقدِّم بعض النتائج من هذا الصنف، تهم المسارات العشوائية، التي يمكن أن يبدو بعضها مفاجئة.

## الفصل الثالث عشر

### تجنب الخسارة في المتدرج و اللعب

لنأخذ أولاً حالة المسار العشوائي المحدود (انظر الباب ١٢) التي نذكر بفرضياتها في شكل لعبة. تلعب دائماً بالمبلغ نفسه  $S=1$  ضد خصم وحيد في متتالية ألعاب متتابعة مع احتمال  $p$  للربح و  $1-p$  للخسارة في كل لعبة.

تبدأ بثروة أولية مبلغها  $k$  و من المقرر اللعب حتى وصول المبلغ  $N$  أو الإفلاس أثناء المحاولة. خصمك سوف نفترض أنه أغنى منك، و يملك من المال ما يكفي لأن يجعله قادراً على الدفع في كل الحالات. في هذه الحالة يتوقف اللعب باحتمال  $1$  في وقت محدود، احتمال الربح  $P_G$  معطى بالقاعدة :

$$P_G = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, p > q$$

$$P_G = \frac{k}{N}, p = q$$

احتمال الخسارة هو  $P_R = 1 - P_G$  هذه النتائج قديمة جداً (Christiaan Huygens 1629-1695) حصل عليها في 1657 لـ  $k=12$  و  $\frac{q}{p} = \frac{5}{9}$ . اثبت Jacques Bernoulli في ١٦٨٠ النتيجة العامة بإثبات أعد تناوله Abraham de Moivre في 1711 (انظر)

L.Takacs (1977) Combinatorial Methods In The theory of Stochastic Processes  
Dekker p.18 )

لنقدّم مثلاً على تطبيق هذه القواعد للعبة المتدرجة. في هذه اللعبة نرمي كوبرة على عجلة أفقية في وضع دوران. حيث تقف في إحدى الخانات الحمراء أو السوداء التي تحمل أرقاماً من ١ إلى ٣٦ مع خاتة إضافية خضراء تحمل رقم ٠ (العجلة الأوروبية) أو خانتين تحملان الرقمين ٠٠ و ٠٠٠ (في حالة العجلة الأميركية) وهي خانات خاسرة يوماً للأعب (مع قواعد تتغير من حالة إلى أخرى انظر ما سيأتي لاحقاً)

اختراع العجلة المتدرجة ينسب دون أن يكون ذلك مؤكداً إلى Blaise Pascal (1623-1662). أتى بها إلى باريس في 1765 و إلى مونتري كارلو في 1863).

قاع اللعبة في الحالة الكلاسيكية له الخانات (انظر البيان المقابل ← ريمان بيانيان ص ١٠٢ و ص ١٠٣) المكاسب تحسب حسب قواعد متعدّدة. القانون الآتي يطبق في فرنسا.

(أ) ملآن: المخاطرة توضع على رقم واحد. يكسب اللاعب ٣٥ مرة قيمة المخاطرة إذا تحقّق الرقم.  
(ب) العارضة: المخاطرة توضع على الامتداد الخارجي لصف أفقي لثلاث أعداد. يكسب اللاعب ١١ مرة مخاطرته إذا تحقّق واحد من الثلاثة أرقام.

(ج) بين بين: توضع المخاطرة بين رقمين و يكسب اللاعب ١٧ مرة مخاطرته.

(د) الستية: توضع المخاطرة على الخط الخارجي على تقاطع صفتين أفقيين، أي ٦ أرقام و يكسب اللاعب ٥ مرّات مخاطرته إذا ظهر أحد الأرقام المعنّية.

(ذ) المربّع: توضع المخاطرة على تقاطع ٤ أرقام و يكسب اللاعب ٨ مرّات مخاطرته.

(م) الفرص البسيطة: توضع المخاطرة على: الأحمر أو الأسود أو على زوجي أو على فردي أو على الأعبور (الأرقام من ١ إلى ١٨) أو على العبور (الأرقام من ١٩ إلى ٣٦) يربح اللاعب مبلغ مخاطرته في حال الكسب. مع التوضيح أنّه في حال ظهور ٠ المخاطر على الفرص البسيطة تفقد نصف قيمتها.

(ن) الاثنا عشر: المخاطرة توضع على الثلاث مناطق الأتية كلّ منها يحتوي ١٢ رقمًا. الاثنا عشر الأولى (من ١ إلى ١٢)

(ف) الاثنا عشر الثانية: (الاثنا عشر الوسطية) الاثنا عشر الأخيرة (من ٢٥ إلى ٣٦) يكسب اللاعب ضعف مخاطرته في حال الربح، إذا ظهر ٠ يفقد كلّ مخاطرته.

(ق) الاثنا عشر بين بين: توضع المخاطرة على خط التقاطع بين الاثنتي عشر و اثنتي عشرة أخرى و تحتوي ٢٤ رقمًا. يكسب اللاعب نصف مخاطرته إذا ظهر أحد الأرقام.

(ك) العمود توضع المخاطرة في أسفل إحدى الأعمدة التي تحتوي ١٢ رقمًا. لكنّ منها يكسب اللاعب ضعف مخاطرته إذا ظهر ٠ الأعمدة خاسرة.

(ل) العمود البين بين: توضع المخاطرة على تقاطع عمودين محتوية ٢٤ رقمًا، يكسب اللاعب نصف مخاطرته في حال الربح.

خصائص المتدرجة تحتم أن يكون ٠ و ٠٠ أرقامًا خاسرة (لمصلحة البنك) حسب تقسيم مختلف حسب الحالة.

احتمال الكسب يقارب  $\frac{1}{2}$  في حال الفرص البسيطة (الاحتمال يتغيّر حسب القواعد المعمول بها في كلّ مؤسسة) في ما يلي سوف نفترض قواعد حساب يمكن أن تحتاج إلى تغييرات بسيطة تفصيليّة. يمكن الرجوع إلى الموقع.

<http://www.casino.zen.com/mises-gains-roulette.html>

للمراجع و التحديث و قواعد لعب الكازينو. نجد  $p = \frac{18}{37} = 48,64866486\%$  للعبة الفرنسية.

للتبسيط سوف نأخذ هنا حالة اللّعب و المخاطرة على زوجي فردي (أو أحمر- أسود أو عبور - لا عبور) لنفرض أنّ لاعبًا ما يملك ثروة 10000€ و يلعب بأضعاف 100€ في هذه الحالة يجدر أن تعطى 100€

دور وحدة المخاطرة و الثروة الأولية هي  $k=100$  وحدة  $100\text{€}$ . نفرض أن اللاعب يقرّر أن يقف بمجرد أن تصل أرباحه إلى ثروة ترتفع إلى  $N > K$  وحدة  $100\text{€}$  لنحسب احتمال الكسب حسب  $N$ . بتطبيق القاعدة السابقة نجد الجدول الآتي (جدول 1) (انظر ص ١٠٥ من الكتاب) لنفرض أنه في مرحلة ثانية يريد اللاعب أن يحصل على ثروة  $11000\text{€}$  و أن يكفّ عن اللّعب في حال النجاح ( ربح  $1000\text{€}$  يمكن أن يبدو مهمًا، و لكن إذا لم يكن الحال كذلك يكفي ضرب هذه الأرقام بعامل متناسب يختار بعناية) يستطيع اللاعب كذلك أن يخاطر بوحدات  $500\text{€}$  أو  $1000\text{€}$  أيهما أفضل ؟ بالنسبة لـ  $500\text{€}$  يجب أن نأخذ  $k=20$  و  $N=21,22$  نجد النتائج الآتية:



اللاعب يخاطر بوحدة ١٠٠ € إذا وصلت ثروته إلى يتوقف	احتمال الربح
€١٠١٠٠	94,17%
10200	89,71%
10300	84,97%
10400	80,48%
10500	76,23%
10600	72,21%
10700	68,39%
10800	64,78%
10900	61,36%
€11000	12,58%

اللاعب يخاطر بوحدة ٥٠٠ € و يتوقف عند وصول ثروته إلى	احتمال الربح
10500€	92,25%
11000€	85,27%
11500€	78,96%
12000€	73,24%
12500€	68,04%

مقارنة بسيطة بين هذه الأرقام. تبين أنه من مصلحتنا أن نلعب في كل مرة أكبر خيار مريح ممكن حتى نصل إلى الحد الذي وضعناه في أسرع وقت ممكن. على كل حال من الممكن أن نثبت أنه في متتالية ألعاب مستقلة بين لاعبين بحيث يكون احتمال ربح (A) أكبر أو يساوي 1/2 في كل لعبة توقع الكسب بالنسبة للاعب (B) بعد n لعبة يجب أن يبقى سالبًا أو صفرًا. لذلك مهما كانت

احتمال الربح	وحدة المخاطرة ١٠٠٠ يورو ويوقف اللاعب عند وصول ثروته إلى
88,26%	11000 يورو
78,53%	12000 يورو
70,34%	١٣٠٠٠ يورو

استراتيجية اللعب لكسب 1000€ مع المخاطرة بخسران 10000€ علينا أن نحترم العلاقة:

$$10000 \leq 0 * \{ \text{احتمال الخسارة} \} - \{ \text{احتمال الربح} \} * 1000$$

لهذا عندما نلعب للحصول على ١١٠٠٠€ يوضع ١٠٠٠٠€ للعب لا نستطيع أن نتوقع احتمال كسب أكبر من  $\frac{10000}{11000} = 90,91\%$  احتمال الربح في الاستراتيجية المقترحة سابقًا، لمخاطرات فردية لـ 1000€ هو هنا 88,26% و هذا ليس سيئًا. سنرى الآن أنه يمكن أن نحصل على أفضل من هذا حيث أفضل استراتيجية ممكنة تحقق احتمال كسب يساوي 89,94%.

يلعب لاعبو الكازينوهات دائمًا بالحصول على مارتنجيل (تعرف كنظام لعب يدعى الربح المؤكد بزيادة المخاطر بصفة تدريجية)؛ لتأمين الغنى في اللعب. من الواقع المثبت أنه ليس ممكنًا تأكيد الربح للاعب كازينو إلا في حال كانت العجلة غير متوازنة، وسوف نتناول هذا لاحقًا. مع ذلك نستطيع أن نطرح السؤال الآتي: إذا كان لدينا مبلغ معين و تحت رغبة ملحة لمضاعفة المبلغ (إلى درجة الرغبة في اللعب) إلى مبلغ آخر محدد، أي استراتيجية ننتهي بحيث نحصل على الاحتمال الأكبر للربح؟ في حال اللعبة التي ذكرناها (زوجي- فردي، أحمر- أسود) هذه المسألة تم حلها من طرف Lester Dubins et Leonard Savage في ١٩٥٦ (سوف نحيل- عوضًا عن البحث الأصلي- إلى

كتاب "Inequalities for stochastic processes." How to gamble if you

Must" Leonard Savage et Lester Dubins London. Dover)

الذين أثبتنا أن الاستراتيجية المثلى هي التي نحصل عليها بـ ( اللعب الجري) الذي يتمثل في المخاطرة بالمبلغ الذي يؤدي- أو يقارب إذا تعرّ ذلك- إلى الهدف المنشود من أول لعبة. نصف هذه الإستراتيجية في حال لاعب يملك 10000€ و يريد الوصول إلى مبلغ 11000€ نجد في هذه الحالة احتمالاً يساوي 89,94% للوصول إلى هدف 11000€. لن نضيف أكثر في مسائل الاستراتيجية المثلى للعب، وسوف نعود لاحقاً إلى ذلك عند حديثنا عن أوقات الإيقاف لنثبت ( و هو ما يبدو بديهياً لكل شخص عاقل ) أنه من بين كل الإمكانيات، الخيار الأكثر اقتصاداً هو أن لا نلعب مطلقاً. الاستراتيجية المثلى تتعلّق دائماً بفكرة أنه إذا كان لا بدّ من اللعب فمن مصلحتنا أن نبقى على طاولة اللعب أقل وقت ممكن. لنذكر مع هذا بالنقاط الآتية :

❖ حسب علمنا إذا كانت كل الإمكانيات للعب متاحة الاستراتيجية المثلى في لعبة العجلة غير معروفة

إذا حدّدنا إمكانيات اللعب إلى مخاطر وحيدة الاستراتيجية المثلى معروفة، نحصل عليها باللعب بصفة متكررة على الخانات التي تؤمن الريح الأوفر و بحساب المخاطر، إذا أمكن ذلك، بحيث يتحقّق الهدف في أول كسب مسجل. هذا يدفع بالطبع إلى المخاطرة الكاملة على الأعداد من ١ إلى ٣٦ أفضل من أي شيء آخر. مع ذلك الكسب منقوص ( ٣٥ إلى ١ عوض ٣٦ إلى ١ ) و هذا أقلّ أفضلية من لعب الفرص البسيطة. من ناحية أخرى مخاطرة دنيا دائماً تفرض من طرف الكازينو ما يؤدي إلى أن كل المخاطر يجب أن تكون أضعاف هذه الوحدة الأساسية. هذا يربك النتيجة السابقة التي تفترض أن الاستراتيجية المثلى تبنى بمخاطر تتغير بصفة متصلة.

لنأخذ حالة لاعب يملك 10000€ و يرغب في الوصول إلى 11000€. إذا فرضنا أن هذا اللاعب يستطيع أن يخاطر بأي مبلغ، بنجاعة ٣٦ إلى ١، الاستراتيجية المثلى تتمثل في وضع على الطاولة المخاطر المتتالية، 28€, 29€, 30€, 31€,..... 37€ مثل هذه الاستراتيجية تعطي اللاعب إمكانية أن يخسر 10000€ في ٨٦ شوطاً، إذا لم يكسب في تلك الأثناء، وفي لعبة واحدة الكسب المطلوب 1000€.

احتمال الكسب يكون إذا في هذه الحالة  $90,52\% = 1 - \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{86}$  و هو ما يقارب الحد الأقصى النظري 90,91% بالتأكيد إذا كانت النجاعة ٣٥ إلى ١ و المخاطر أضعاف مبلغ 10€ نلعب بالترتيب (من اليسار إلى اليمين ثم من الأعلى إلى الأسفل)

£٣٠	£٣٠	£٤٠	£٤٠	£٤٠	£٤٠	£٤٠	£٤٠	£٤٠
£٤٠	£٤٠	£٥٠	£٥٠	£٥٠	£٥٠	£٥٠	£٥٠	£٥٠
£٦٠	£٦٠	£٦٠	£٦٠	£٦٠	£٦٠	£٧٠	£٧٠	£٧٠
£٧٠	£٧٠	£٨٠	£٨٠	£٨٠	£٨٠	£٩٠	£٩٠	£٩٠
£٩٠	£١٠٠	£١٠٠	£١٠٠	£١٠٠	£١١٠	£١١٠	£١١٠	£١٢٠
£١٢٠	£١٢٠	£١٣٠	£١٣٠	£١٣٠	£١٤٠	£١٤٠	£١٥٠	£١٥٠
£١٥٠	£١٦٠	£١٦٠	£١٧٠	£١٧٠	£١٨٠	£١٨٠	£١٩٠	£١٩٠
£٢٠٠	£٢٠٠	£٢١٠	£٢٢٠	£٢٢٠	£٢٣٠	£٢٤٠	£٢٤٠	£٢٥٠
£٢٦٠	£٢٦٠	£٢٦٠	£٢٧٠	£٢٨٠	£٢٩٠	£٢٩٠	£٣٠٠	

طريقة اللّعب تبقى في نهايتها £٢٧٠ إذا لم يكسب في تلك الأثناء، هناك ما يقارب ٧٩ إمكانيةً للكسب هنا أي احتمالاً للكسب يقارب  $88,51\% = (1 - \frac{1}{37})^{79}$ . 1. مثلما نرى في هذه الأمثلة اللّعب على الأرقام يؤدي إلى نتيجة أقل نجاعة من لعب الفرص البسيطة من نوع زوجي فردي، بالإضافة فإنّه يجعل الخسارة تأخذ وقتاً طويلاً ما يجعلها مؤلمة دون شكّ. يدرك القارئ أنّ هذه الأرقام هي أبعد ما تكون عن التحريض على لعب العجلة. الهواة الذين على الرغم من كلّ شيء يميلون إلى اللّعب يجدر بهم أن يقوموا ببعض التجارب الأولية باختبار حظهم في لعبة الزهر بالمخاطرة ضد السّنة (احتمال ظهورها 16,66%) و التخيّل أنّهم في كلّ مرة تظهر فيها السّنة، لو كانوا في الكازينو لسلبوا الملايين. مع ذلك هل من الممكن الكسب المنتظم في الكازينوهات إذا استثنينا الغشّ الهمجي. يوجد عدد كبير من الطرق التي يعرضها المسمّون "المختصون" و التي تقدّم على أنّها تضمن للاعب ربحاً مؤكداً ( نذكر من بين طرق أخرى لن نتناولها هنا مارتينجيل Hawks المارتينجيل الكبيرة، خاطفة الذباب، طريقة

Whittaker, هرم D'Alembert, عكس La paroli, D'Alembert المارتينجيلات الأمريكية و الإنجليزية)

علينا التأكيد هنا أنّ هذه الطرق لا تصمد أمام المنطق. رأينا أيضاً أنّ الاستراتيجيات المثلى في الحالات الكلاسيكية معروفة و أنّه ليس من الممكن أن نحصل على أفضل. لنأخذ على سبيل المثال مارتينجيل Hawks" الكلاسيكية التي تتمثل في مضاعفة المخاطرة عند كل خسارة. يحدث أنّه في البداية تتماثل هذه الطريقة مع الاستراتيجية المثلى للعب زوجي- فردي و تؤمّن في الظاهر ربخاً مؤكداً . بالفعل إذا خاطرنا بـ ١ في اللعبة الأولى و ٢ في اللعبة الثانية و ٤ في اللعبة الثالثة إلى آخره عندما تكسب يكون الكسب دائماً ١. مع ذلك تصبح الأرقام كبيرة بسرعة و الريح لن يكون مؤكداً إلا في حال كانت الثروة الأولية غير محدودة ( انظر الباب الأول ). بالإضافة إلى أنّ الكازينوهات تحدّد سقفًا للمخاطرات (هذا هو الحال في فرنسا حيث المخاطرة الدنيا هي 2€ و قد تكون أكبر، و المخاطرة الكبرى لا تتجاوز ٣٠ مرّة المخاطرة على رقم كامل أو ١٠٠٠ مرّة المخاطرة على فرصة بسيطة ) و هذا لا يمكن من متابعة اللعب بعد حدّ معيّن. (انظر الموقع)

<http://www.casino.zen.com/mises-gains-roulette.html>

فكرة أدنى تتمثل في البحث عن نواقص اللعبة المتأتمية من :

- إما عدم تناظر آلة اللعب .
- عادات من يدير اللعب .

لتجنّب إمكانية أن يستطیع لاعب التقطن إلى هذه النواقص- بملاحظة طولات العجلة- تعيّر الكازينوهات الكبيرة العجلات و العاملين على الطاولات باستمرار، ما يجعل الملاحظة لمدة كافية لكي تكون مفيدة صعبة التحقيق. نذكر مع ذلك مثال المهندس الانجليزي William Jagers (١٨٣٠-١٨٩٢) الذي حقّق في ١٨٧٣ ربخاً نهائياً بمبلغ \$325000 ( مبلغ فلكي في تلك الفترة ) في لعبة العجلة في

Monte-Carlo باستفادته من النواقص الموجودة. استعمل William Jagers ستة مساعدين لأخذ الأرقام التي تظهر في الطاولات المختلفة للعجلة ما جعله يستنتج أن بعض الأرقام تظهر بطريقة مرتفعة غير عادية. حقّق بعد ذلك متسلسلة ألعاب رابحة، قبل أن يجدد الكازينو أجهزته، و يضع حدّاً لنجاحه.

لنرفض مباشرة الطرق المسماة " طرق التعويض" التي تتمثل في اللعب باستمرار على الأرقام التي لم تظهر منذ وقت طويل. سوف نرى لاحقاً بصفة دقيقة إلى أي مدى يكون هذا عيباً و خطيراً للاعب. طريقة مقبولة و طبّقت بنجاح من طرف William Jagers (انظر (Epstein, (Opt.cit114) تتمثل في الذهاب إلى كازينو و ملاحظة الطاولات إلى أن تميّز واحدة يكون عيب العجلة فيها يعوّض ما يأخذه الكازينو. يستطيع من يملك ما يكفي من المال حينئذ- و باللعب لمدة طويلة- أن يكسب بسبب عدم توازن اللعب لصالحه مبلغاً سيوّغ السفر. من الخطأ الاعتقاد أنّ دور اللعب تجهل هذه المخاطر، إنهم يعملون كلّ ما في وسعهم للتعرف إلى اللاعبين و الطاولات " غير العادية".

أما من ناحية الوقت المقضى، فإنّه يستحقّ العناء بصعوبة كبيرة. لنقل ببساطة بأنّ ذلك ممكن.

طريقة أخرى، فيها حيلة تتمثل في الحساب الاستباقي للخانات التي يمكن للكرة أن تسقط فيها، باستعمال سرعة دوران العجلة و سرعة الكرة. بين العشرين ثانية التي تفصل بداية الحركة و إيقاف

المخاطر من الممكن التنبؤ بسقوط الكرة بدقة و المخاطرة على ضوء ذلك. مع ذلك يبدو غير محتمل أن يسمح الكازينو للاعب أن يضع تجهيزات إلكترونية تسمح بذلك.

ندعو القارئ للتمرين على حساب الاحتمالات بعمل حسابات مشابهة للسابقة في حالة لعبة الكرة (تسعة أرقام من ١ إلى ٩ الخمسة لا رصيد له و الأرقام الباقية تكسب ٧ للواحد و الألعاب زوجي فردي (٩-٣-٧-١) و (٨-٤-٦-٢) أو يعبر لا يعبر (٤-٢-٣-١) أحمر أسود (٨-٦-٣-١) (٩-٧-٤-٢) تكسب مبالغ مساوية للمخاطرة

نحيل لمزيد من التفاصيل إلى :

L Dubins and L Savage (1965) "Inequalities for Stochastic Processes How to

Gamble If You Must" London, Dover

B.Epstein (1977) "The theory of Gambling and Statistical Logic", New York

Academic Press

نعود الآن لدراسة مسار عشوائي غير منتهٍ و نذكر بتعريفه العام نضع  $S_0 = 0$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

حيث  $X_1 \dots X_n$  متتالية متغيرات عشوائية لها القانون نفسه بحيث :

$$P(X=1) = p \quad P(X=-1) = 1-p \quad 0 < p < 1$$

نلاحظ أنه يمكن أن نغير عن  $S_n$  بوساطة العدد  $N_n$  عدد تحقق الحدث  $X_k = 1$  و  $k$  بين ١ و  $n$ . فعلا

$$S_n = N_n - (n - N_n) = 2N_n - n$$

أو

$$N_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$$

كذلك إذا عرفنا متغيرات عشوائية جديدة

$$Y_n = \frac{1}{2}(X_n + 1) \quad N_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

نلاحظ أن  $Y = Y_1, Y_2, \dots$  متتالية متغيرات مستقلة لها القانون نفسه  $P(Y=0) = 1-p, P(Y=1) = p$

نستطيع أن نتناول، دون فرق، Sn، مجموع مكاسب اللاعب منذ البداية أو  $N_n$  عدد الألعاب التي كسبت في الفترة نفسها. في ما يلي يحسن أن نضع  $q=1-p$ . القانونان الأتيان يطبقان مباشرة على هذا النموذج كنتيجة لنظريات عامة ( أنظر الباب ٣ و الباب ٥ ) .

(١) قانون الأعداد الكبيرة: عندنا باحتمال ١ عندما نؤول  $n$  إلى  $\infty$   $E(X) \frac{S_n}{n} \approx p-q=2p-1$  أو

$$p=E(Y) \frac{N_n}{n} \rightarrow$$

(٢) التقارب نحو قانون Laplace-Gauss (نلاحظ أن  $4p(1-p)$ )  $Var(X)=4pq$

$$\lim P\left(\frac{S_n - n(p-q)}{2\sqrt{npq}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

او بطريقة مكافئة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{N_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

هذه النتائج المعروفة يجب تكميلها بقوانين أخرى غير معروفة التي أدت جهلها أكثر من لاعب إلى الإفلاس. أو لا إذا شاهدنا لمدة طويلة المسار  $S_0, S_1, \dots, S_n$  في حالة لعبة متوازنة ( $p=q=1/2$ ) باحتمال واحد سوف تمر  $S_n$  عدد غير منته من المرات بأي رقم صحيح معطى مهما كان صغره أو كبره. هذه النتيجة تصبح أدق بقانون اللوغاريتم المتكرر ( أنظر الباب ١٠) الذي ينص على الآتي: باحتمال واحد لكل  $0 < \varepsilon < 1$  يوجد عدد لا متناه من المؤشرات  $n$  بحيث

$$S_n - n(p+q) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{8npq \log \log n}$$

و عدد لا متناه من المؤشرات  $n$  بحيث  $S_n - n(p+q) \leq (1-\varepsilon)\sqrt{8npq \log \log n}$

بالإضافة إلى ذلك باحتمال ١ لكل  $0 < \varepsilon < 1$  يوجد  $n_\varepsilon > 0$  بحيث لكل  $n \geq n_\varepsilon$ .

$$-(1+\varepsilon)\sqrt{8npq \log \log n} \leq S_n - (p+q)n \leq (1+\varepsilon)\sqrt{8npq \log \log n}$$

نتيجة مباشرة لهذا، في، حال متتالية ألعاب متوازنة بين لاعبين (A) و (B) لهما احتمال الكسب نفسه  $p=q=1/2$  إذا كان اللاعب (B) له ثروة كبيرة مقارنة باللاعب (A)، إذا باحتمال ١ اللاعب الأقل غنا يفلس في النهاية. هذا هو المبدأ أي لاعب يتابع متتالية ألعاب ضد الكازينو سوف يكون خاسراً في النهاية، حتى وإن كانت الألعاب متوازنة. للحصول على فرص مقبولة لتجنب هذا القدر والاستطاعة "تفجير البنك" يجب أن يمتلك اللاعب ثروة أولية على الأقل من نفس درجة ثروة البنك. لا شك في أن هذه حالة صعبة المنال. نحصل

أيضًا على نتيجة مهمة تخص عودة  $S_n$  إلى مستوى 0 باحتمال 1، هذا يحدث في لعبة متوازنة ( $p=q$ ) عدد غير منتهٍ من المرات خلال اللعب .

-وفي لعبة غير متوازنة ( $p \neq q$ ) عدد منته من المرات. هذا يعطي تفسيرًا تجريبيًا للأسباب التي من أجلها يكون من مصلحتنا، في حال لعبة غير متوازنة ( $p < q$ ) أن لا نخاطر بمخاطر صغيرة متكررة و لمدة طويلة و لكن بدل ذلك، بمخاطر كبيرة و بسرعة. نتصرف بهذه الطريقة حتى لا ندع المجال لقانون الأعداد الكبيرة أن يطبق.

لنعط مثالًا عدديًا :

إذا أخذنا سلسلة ألعاب قفا و وجه , طويلة جدًا و متوازنة ( $p=q=1/2$ ) لأعداد  $n$  بحيث يمكن أن نقبل أن قانون الأعداد الكبيرة متحقق تقريبًا.

$$\text{إذا كان } n=1000000 \text{ فإن } \sqrt{8np \log \log n} = 2291,63$$

$$\text{إذا كان } n=1000.000.000 \text{ فإن } \sqrt{8npq \log \log n} = 77862,15$$

هذا يعني أنه خلال تحقيق المسار العشوائي،  $S_n$  سوف تتذبذب حول 0 مع إمكانية أخذ قيم مهمة مثل 2000 (أو 2000-) على 1000000 لعبة أو 70000 (أو 70000-) على 1000000000 لعبة. لنوضح أكثر مساحة هذه التذبذبات.

في حال لعبة متوازنة، نحصل بسهولة على قانون نهاية  $M_n/\sqrt{n}$  حيث  $M_n = \text{Max}\{0, S_1, \dots, S_n\}$

نلاحظ بصفة عابرة أن  $M_n$  تتبع قانون الاحتمال نفسه  $m_n$  حيث  $m_n = \text{max}\{0, -S_1, \dots, -S_n\}$

دائمًا في حال لعبة متوازنة مع  $p=q=1/2$  نحصل على قانون  $M_n$  باستعمال مبدأ الانعكاس (انظر - Desiré

André(1887)

W.feller(1957) An Introduction to Probability Theory and its Applications New York Wiley t1 p70

M.Loeve (1977) Probability Theory, New-York, Springer )

هذا المبدأ السهل الفهم يتمثل في قول إنه إذا كان عندنا المتتالية  $S_0 = 0, S_1, \dots, S_n$  وأكبرها  $M_n$  مع افتراض  $M_n \geq a$  و تحققها عند  $M_n = S_k$  يمكن بعد  $M_n = S_k$  تعويض كل المتغيرات



$$X_n, \dots, X_{k+1}$$

بأضدادها  $-X_n, \dots, -X_{k+1}$  والحصول على متتالية لها السلوك نفسه بالنسبة للاحتمالات. نستنتج

$$P(M_n \geq a, S_n < a) = P(M_n \geq a, S_n > a)$$

$$P(M_n \geq a) = 2P(S_n < a) + P(S_n = a)$$

بما أن قانون نهاية  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  هو العادي من نظرية النهاية المركزية نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0 \leq i \leq n} S_i \leq x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

لكن  $x \geq 0$

هذه النتيجة تنص أن  $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$  لها قانون النهاية مماثل لقانون  $|X|$  حيث  $X$  تتبع قانون عادي  $(N(0,1))$

( Gauss-مركزة و مختصرة ) توقع 0 و تباين 1. هذا يتمثل في تحديد مستويين  $a_n, b_n$  بحيث

$$P\left(\max_{0 \leq i \leq n} S_i \geq a_n\right) = P\left(\max_{0 \leq i \leq n} S_i \leq b_n\right) = 10\%$$

بأخذ المستويين المقابلين كما في القيمة المطلقة لقانون عادي  $N(0,1)$  نختار إذن :

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \sim 0,12566 \text{ et } \frac{b_n}{\sqrt{n}} \sim 1,64485$$

دائمًا في لعبة القفا والوجه لنحدد الأرقام أكبر أو أقل من 10% لتوزيع  $M_n$  مع المقاربة المحصول عليها

بالقانون النهاية السابق. يعطي هذا المنطق الآتية لم  $M_n$

$$P(M_n \geq a_n) \sim P(M_n \leq b_n) \sim 10\%$$

<b>N</b>	$a_n$	$b_n$
100	1	<b>16</b>
1000	4	<b>52</b>
10.000	13	<b>164</b>
100.000	40	<b>520</b>
1.000.000	126	<b>1645</b>
1.000.000.000	3973	<b>52015</b>

كما نرى، تنبذات  $S_n$  حول المصدر تميل إلى أن تكبر أكثر فأكثر. مع ذلك صغر  $a_n$  بالنسبة لـ  $b_n$  لاقت للانتباه. لنأخذ مثالاً لتوضيح الظاهرة. نأخذ هنا لعبة قفا و وجه ( أو أي لعبة أخرى متوازنة) طولها ١٠0 مرة. هل من العادي أن يتجاوز أحد الخصمين خصمه بخمس عشرة نقطة؟ احتمال أن يحدث هذا هو 13,36% ما يجعله حدثاً غير معهود و لكن مع ذلك ممكن ( تقريباً مساوٍ لاحتمال ظهور ٦ في لعبة الزهر  $\frac{1}{6} = 16,66\%$  ) هل من الطبيعي في الاتجاه المعاكس أن لا تتجاوز أسبقية أي من الخصمين نقطتين ؟ احتمال حدوث ذلك يساوي 15,85%، ما يجعله حدثاً نادر الحصول و مع ذلك ممكن. هذه الأرقام تنتج شيئاً فشيئاً مبدأ قديماً قدم العالم نفسه الذي لا حاجة إلى أن نكون رياضيين لمعرفة. قانون السلاسل أو ترسب الحظ ( جيّداً كان أم سيئاً).



## الفصل الرابع عشر

### إصرار الحظ أو سوء الحظ

فرضنا دائما- إلى حد الآن- أننا نحقق متتالية  $X_1, \dots, X_n$  ألعاب متوازنة مستقلة من صنف قفا و وجه (مرفقة ٠ و ١ بالترتيب) مع احتمال ربح و خسارة متساويين مع  $\frac{1}{2}$ . في هذه الحالة إذا كان  $S_0 = 0$  و  $S_n = X_1 + \dots + \dots + X_n$  تمثل المبلغ الاجمالي للأرباح بعد  $n$  لعبة، في شوط غير منته، باحتمال ١ المتتالية  $S_n$  يمر عدد غير منته من المرات بالمستوى ٠. نستطيع إذا أن نعرف المتتالية

$T_1, T_2, \dots, T_k$  للأوقات التي تفصل عبورين متتاليين لـ  $S_n$  بالصف بالمعادلات

$$S_0 = S_{T_0} = 0, S_j \neq 0, T_0 < j < T_1, S_{T_1} = 0$$

$$S_j \neq 0, T_1 < j < T_2, S_{T_2} = 0$$

لأسباب بديهية  $T_1, T_2, \dots, T_k$  متتالية عشوائية مستقلة لها القانون نفسه، من ناحية أخرى لا يمكن العودة إلى الصفر إلا بعد أن تتساوى المكاسب و الخسائر، و لذلك قيم متتالية  $T_1, \dots, T_k$  لا يمكن أن تكون إلا أعدادا زوجية (تقسم على ٢) التوزيع الاحتمالي لهذه المتغيرات هو: (أنظر p76 cit W FELLER OP .cit معطي بالمعادلات

$$P(T = 2n) = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \binom{n}{2n-1} = \frac{(2n-1)!n}{(n!)2^{2n}}$$

حيث نستعمل الرموز المعهودة

$$n! = n(n-1) \dots \dots 2.1$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

نحصل على القيم العددية لهذه الاحتمالات ( في شكل نسب) انظر الجدول :

	$P(T=2n)$	$P(T \geq 2n)$	$P(T=2n/T \geq 2n-2)$
$n=1$	50	50,00	<b>50,00</b>
2	12,50	62,50	٢٥
3	6,25	68,75	<b>16,67</b>
4	3,91	72,66	<b>12,50</b>
5	2,73	75,39	<b>10,00</b>
6	2,05	77,44	<b>8,33</b>
7	1,61	79,05	<b>7,14</b>
8	1,31	80,36	<b>6,25</b>
9	1,09	81,45	<b>5,56</b>
10	0,93	82,38	<b>5,00</b>

العمود الأخير يعطي الاحتمال أن تكون  $T=2n$  إذا علمنا أن  $T \geq 2n-2$ . يمكن الميل إلى الاعتقاد أن هذا العدد يكبر مع  $n$  ولكنه ينقص مع  $n$ . بالفعل هذا منطقي لأنه لو تزايد الرقم فهذا يعني إمكانية  $n$  كبيراً بما فيه الكفاية. التنبؤ باللعبة الآتية. لكننا نعلم أن ذلك مستحيل، وهذا يبين إلى أي مدى أنه غير معقول، كما نراه للأسف باستمرار عند لاعبي الكازينوهات، المخاطرة، بطريقة منتظمة، على الأرقام التي ظهرت

الأقل في الماضي. حين نؤول  $n$  إلى  $\infty$  نجد المكافئ الآتي:

$$\left( \frac{U_n}{V_n} \rightarrow 1 \leftrightarrow U_n \sim V_n \right)$$

$$P(T = 2n) \approx \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\rho n}} \approx \frac{1}{2n\sqrt{\rho n}}$$

و هذا يبين أن توقع  $T$  لا متناهٍ، بما أنه معرف بالقاعدة  $E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n P(T = 2n) = \infty$  والخاصية الأخيرة ينتج عنها بأنه باحتمال 1 حين يؤول  $n$  إلى  $\infty$ ،  $\frac{1}{n}(T_1 + \dots + T_n) \rightarrow \infty$

هذه النتيجة تبدو متناقضة، حيث إننا نميل إلى الاعتقاد أن توقع الوقت الذي يفصل عبورين لـ  $S_{2n}$  بالصفر يمكن أن يكون محدوداً، و لكن العكس هو ما يحدث. هذا يعني أن أوقات إقامة  $S_n$  في المنطقة  $\{S_n > 0\}$  أو  $\{S_n < 0\}$  التي احتمال قصرها ليس صغيراً، يمكن خاصة أن تكون طويلة جداً مع احتمالات مرتفعة. هكذا إذن في لعبة متوازنة و طويلة الأمد الحظ يميل إلى التفضيل و بصفة مستمرة و لفترات طويلة لأحد اللاعبين. هذا يوضح مبدأ إصرار الحظ.

هذه النتيجة الغريبة، يمكن أن نقم لها وصفاً أفضل بقانون Arcsin (معكوس الجيب) الذي نتحدث عنه في الباب الخامس عشر. في مصطلحات اللعب، إذا سمينا تعويضاً كل مرة تمر فيها  $S_n$  بالصفر، عدد التعويضات المشاهدة في المدة  $1, 2, \dots, n$  يتزايد بسرعة أقل بكثير من  $n$  بمعنى آخر التعويض يصبح أكثر ندرة حين تزيد مدة المشاهدة !

هل في هذا تناقض؟ ما نميل إلى اعتقاده هو الآتي: إذا شاهدنا الفترة  $1, 2, \dots, n$  ثم الفترة  $n+1, \dots, 2n$  عدد التعويضات التي نشاهدها لها القانون نفسه، و لذلك سوف يكون هناك في المتوسط في  $1, 2, \dots, 2n$  ضعف ما هناك في  $1, \dots, n$  هذا يعني أننا نسينا أن التعويض معرف من نقطة الانطلاق  $S_0 = 0$  و بسبب ذلك عدد التعويضات في  $1, \dots, 2n$  (حيث نقطة الانطلاق ليست صفراً بالضرورة) ليس له التوزيع نفسه في  $1, \dots, n$  مطلقاً (أين فرض أن  $S_0 = 0$ ). يكفي أن نأخذ  $n=2$  لنلاحظ أن  $p(S_n = 0)$  تتغير مع  $n$  نجد القيم العددية

$$P(S_2 = 0) = 50\%, P(S_4 = 0) = 37,5\%$$



## الفصل الخامس عشر

# قانون معكوس الجيب أو الغياب الأساسي للعدل في الطبيعة

اسم هذا القانون يعود الى معكوس الجيب  $\sin^{-1} x$  المستمّر Arcsin المرموز له بالرمز

Arcsin ( أو أحياناً  $\sin^{-1} x$  أو أيضاً Arcsin ). هذه الدالة تعرف بالتكامل :

$$\text{Arcsin } x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

سوف نستعمل هذه الدالة بعد تغييرات بسيطة. لنذكر أنها تحقق:

$$\sin(\text{Arcsin } x) = x, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

نأخذ كما في الباب الثاني عشر، متتالية ألعاب قفا ووجه مستقلة و متوازنة  $S_n$  ترمز لربح اللاعب بعد  $n$  لعبة. نرمز بـ  $\varepsilon_{2n}$  لعدد العناصر  $S_j$  من بين  $S_1, \dots, S_{2n}$  بحيث إما  $S_j < 0$  أو  $S_j = 0$  و  $S_{j-1} < 0$  من ناحية أخرى نرمز بـ  $K_{2n}$  لـ  $K_{2n} = \max\{k, 0 \leq k \leq n, S_{2k} = 0\}$  موقع اخر مؤشر  $k \leq n$  بحيث  $S_{2k} = 0$  نجد

$$P(\theta_{2n} = 2k) = P(K_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-k}{2n-2k}$$

$$k=0, 1, \dots, n$$

حين نؤول  $n$  إلى  $\infty$  القسم  $\frac{K_{2n}}{2n}$  للوقت المنقضي لـ  $S_1, \dots, S_{2n}$  في المنطقة الموجبة بالنسبة لـ  $2n$  لعبة نؤول نحو النهاية

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\theta_{2n}}{2n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{K_{2n}}{2n} \leq x\right) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin } \sqrt{x}, 0 < x < 1$$



كثافة هذا القانون، أي  $0 < x < 1$ ، هي  $f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{p} \text{Arcsin} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{p \sqrt{x(1-x)}}$  غير محدودة عند 0 و 1. ما

يثبت عكس المعقول الذي يريد أنه في حالة لعبة طويلة فإن فترات الربح لكلا اللاعبين "تكون متقاربة ما يحدث هو أن أحد اللاعبين يكون في غالب الوقت في حالة ربح و الآخر يمكث في حالة خسارة".

نسَمي A متغيرًا عشوائيًا يتبع قانون نهاية  $\frac{K2n}{2n}$  لنقط بعض القيم العددية لتوزيع A بالاكتهاف بحالة

$0 \leq A \leq \frac{1}{2}$  التي تقابل بقاء  $S_n$  في أغلب الوقت موجبة. في هذه الحالة نجد الاحتمالات الآتية:

$\alpha = 0,001$	$P\left(A \leq \alpha/A \leq \frac{1}{2}\right) = 4,03\%$
0,005	9,01%
0,01	12,75%
0,05	28,71%
0,1	40,97%
0,2	59,03%
0,25	66,66%
0,30	73,80%
0,40	87,18%
0,50	100,00%

هذا يفسر قليلاً بعض الوضعيات، في ألعاب متوازنة، حيث نلاحظ أنه تقريباً في كل الحالات يستحوذ أحد اللاعبين على كل فرص النجاح بعيداً عن كل منطق مساواة.

نترك للفلاسفة و علماء الاجتماع استخلاص النتائج التي يريدونها من هذا القانون المدهش و غير المتوقع.  
قانون Arcsinus اكتشف من طرف

Paul levy (1939) Sparre- Andersen (1949), Kac et Erdos (1947) et Chung  
Feller (1950)

من النتائج لهذا- يمكن أن تكون في لعبة بين خصمين، و بفرص للكسب متساوية- من المحتمل أن واحداً من  
الاثنتين يكسب " كل الوقت" و (ليس بالضرورة الأفضل بما أنهما نظرياً متساويان )



## الفصل السادس عشر

# نظريّة التوقف الأمثل والبرهان الرياضي إنّه من الأفضل عدم اللعب في الكازينو

من بين الأسباب التي من أجلها تلقى ألعاب المصادفة نجاحًا كبيرًا هو أنّها تعرض اللاعبًا لصالح دور اللعب و لكن اللاعب يحتفظ بالحرية الدائمة لاستراتيجيته و قبول أو رفض المخاطرة، هنا تحدُّ بين نسبة الاحتمال و نكاه اللاعب و كثيرون يميلون إلى رفع التحدي.

مشكلات أخرى لا علاقة لها باللعب تنطبق على هذا النموذج. من بين هذه المسائل يمكن أن نذكر مسائل صناعية مرتبطة بالقرارات الإحصائية في إطار مراقبة الجودة. هذه المسائل أهم من مجرد أسئلة بسيطة عن استراتيجيّة اللعب في الكازينو.

كمثال لنأخذ حالة ووسط يعرض عليه بيع حمولة غلال. يكون أمامه خيار من الصنف الآتي: إذا كانت نسبة الغلال غير الصالحة أقل من 10% يكسب €10000. إذا كانت النسبة أكبر من 10% هناك احتمال أن لا يبيع الحمولة و تكون خسارته €20000 قراره يجب أن يؤخذ بالاعتماد على عيّنة مأخوذة من الحمولة التي تكلفته التحليل الكامل لها تساوي €1000 لكل عيّنة و تقدّم له النتيجة في الشكل " هناك حبة غير صالحة من بين  $Y_n$  حبة في العينة  $n$  "

أي استراتيجية يتبناها الوسيط في مثل هذا الإطار؟ يمكن أن يقرّر عدم الشراء أو الشراء أو يطلب عيّنة إضافية على حسابه. من الطبيعي أن نبحث عن طريقة القرار التي يجب تبنيها للحصول على الكسب الأكبر. نجد في شكل مختلف مسألة لعب ( المخاطرة أو عدم المخاطرة و بأي طريقة ) مثل هذه المسائل حلّت على المستوى الرياضي في عدد كبير من الحالات.

سوف نكتفي هنا بذكر حالة معروفة أكثر من غيرها حالة التوقف الأفضل المنتهي.

نأخذ في هذه الحالة، متتالية متغيرات  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_N$  نعرف تركيبها الاحتمالية، و نأولها بأنّها تمثل الأرباح المتتالية للاعب في متتالية ألعاب متكررة. في كل مرحلة من اللعب، للاعب الخيار أن يواصل اللعب أو أن يتوقف. شكليًا، بعد لعب  $k$  لعبة و معرفة  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$  للألعاب السابقة يأخذ اللاعب قراره إما بمواصلة اللعب أو التوقف و الحصول على  $S_k$ . استراتيجية توقّف مثل هذه مكافئة لأن نعطي وقت توقّف  $\tau$ ، يأخذ قيمة بين 0 و  $n$  و حيث المعطى  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$  يحدّد إذا كان الحدث  $\{\tau = k\}$  سيحقّق أم لا. بالتأكيد يتأثر وقت التوقف بالأعداد العشوائية  $S_0, \dots, S_N$  وهو أيضًا متغيّر عشوائي. المسألة الأساسية تكمن في تحديد- من بين كل الخيارات الممكنة- وقت التوقف  $\tau$  الذي يحقّق شرط الأمثلية مرتبطًا بمجموع المشاهدات قبل  $\tau$ . مثال قياسي لشرط الأمثلية معطى بتوقّف الكسب  $E(S_\tau)$  عند وقت التوقف. سوف نسعى إلى أن نحصل على توقّع الكسب الأكبر. المسألة مطروحة بهذا الشكل حلّت كليًا في 1963 من طرف

Chow and Robbins ( K. L.Chow H.Robbins 1963 On optimal stopping rules .z. Wahrscheinlichkeits – theorie 2, 33–49

(D.Siegmund (1967)

Some problems in the theory of optimal stopping rules Ann .Math. Statistics ,38,1627–1640 )

K.L.Chow, H.Robbins and D.Siegmund

Great expectations: the theory of optimal stopping Houghton – Mifflin

لا نستطيع هنا أن نصف بناء وقت التوقف الأمثل الذي نادرًا ما يكون تعبيره بسيطاً و مرتبطاً بـ

$S_0, \dots, S_1, \dots, S_N$  . سوف نكتفي بإعطاء تطبيق لنتائجه نحصل عليها في حالة خاصة. نتحدث هنا عن لعبة كلاسيكية ذات المخاطر المتكررة و المتساوية. في هذه الحالة المكسب عند اللعبة  $n$  هو المبلغ المتراكم لمسار عشوائي  $S_n = S_0 + \dots + X_n$  حيث  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة و ذات القانون نفسه بحيث  $P(X = 1) = p$  ( احتمال الريح ) و  $P(X = 0) = 1 - p$  ( احتمال الخسارة ) ما هو إذن وقت التوقف الذي يجعل توقع الكسب الأكبر ممكناً ؟ الجواب هو - مطابق للمعقول- أنه من بين كل الاستراتيجيات الممكنة للعب الأفضل على الإطلاق هي أن لا نلعب بالمرّة هذه النتيجة يمكن استنتاجها من تمهيدية Wald التي تبين أنه ( تحت بعض شروط الانتظام )

$$E(S_p) = E(X)E(\tau) = (p - q)E(\tau)$$

كتطبيق لهذه القاعدة إذا كانت للعبة خاسرة ( $p < q$ ) أو متوازنة ( $p = q = 1/2$ ) نلاحظ أن  $E(S_p) \leq 0$  و هذه القيمة سالبة إذا كان  $E(\tau) > 0$  و  $p < q$  . لكي نجعل  $E(S_p)$  الأكبر حل واحد يفرض نفسه، و هو أن نختار  $\tau = 0$  و هذا يعني عدم اللعب أصلاً. علينا أن نذكر أن هذه النتيجة تبقى صحيحة ( مع بعض التغيرات ) إذا كانت المتغيرات  $X_1, X_2, \dots, X_n$  مستقلة و لكن ليس لها القانون نفسه انظر (1947) New-York Wiley « Sequential Analysis » Wald

هكذا إذن الدليل- أنه ليس عقلاً أن نلعب- موجود. مع ذلك لا نعتقد أن مثل هذه الحجة يمكن أن تغير موقف محبّي البساط الأخضر. البحث عن الربح الأفضل ليس دون شك الشرط المتحكم في استراتيجية تودّي للأسف، غالباً إلى الإفلاس. ليس من غير المهم أن نسوق الملحوظة هنا أن أغلب التطورات التي ذكرناها هي حديثة جداً، بل و معاصرة إلى حد ما. لذلك ليس من المفاجئ أن تبقى- غالباً- بعيدة عن اهتمام الناس. نأمل أن تكون قد ساهمت في نشر هذه التطورات.

## المحتويات

٥	توطئة
٦	مدخل
٩	الفصل الأول: استحالة مشاهدة أحداث غير محتملة
١٥	الفصل الثاني: بدايات حساب الاحتمالات
٢١	الفصل الثالث: توقّع الربح في لعبة المصادفة
٣٥	الفصل الرابع: الأساسات المنطقية لحساب الاحتمالات
٤٧	الفصل الخامس: الأرقام العادية لـ BORE و التفسير الطبيعي
٥٧	الفصل السادس: أمثلة أخرى لحساب الاحتمالات
٦٥	الفصل السابع: إستقلالية المتغيّرات العشوائية
٧٥	الفصل الثامن: قوانين الصفر أو الواحد للمتتاليات المستقلة
٨١	الفصل التاسع: النظرية المسرانية والطابع الكوني
٨٥	الفصل العاشر: قوانين اللوغاريتم المكرر
٩١	الفصل الحادي عشر: قوانين أخرى للأعداد الكبيرة
٩٧	الفصل الثاني عشر: المسار العشوائي ومسألة إفلاس اللاعب
١٠١	الفصل الثالث عشر: تجنّب الخسارة في المتدرج واللّعب
١١٥	الفصل الرابع عشر: إصرار الحظ أو سوء الحظ
١١٩	الفصل الخامس عشر: قانون معكوس الجيب
١٢٣	الفصل السادس عشر: نظرية التّوقف الأمثل والبرهان الرياضي

## عن الكتاب:

يتناول الكتاب مسألة المصادفة واليقين ويربطهما بالنظرية الرياضية للاحتتمالات التي شهدت تطورا كبيرا في أواخر القرن التاسع عشر والنصف الأول من القرن العشرين. ينطلق الكاتب من ألعاب الحظ المختلفة كلعبة الزهر ولعبة المتدرج ليقدم المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات مثل: الاحتمال والتوقع والمتغيرات العشوائية وتوزيعاتها. يبين الكاتب أنه في صورة تكرار لعبة ما عدد غير منته من المرات يصبح التأسيس الرياضي ضروري للحديث عن التوقع والاحتمال، ولاحتواء ما يمكن أن يبدو منسجما أو متناقضا مع الحدس. يتطرق الجزء الأكبر من الكتاب إلى نظريات تقارب معدلات المتغيرات العشوائية وعلاقتها بالتوقع وتوزيع نهاية المعدلات في حالة التقارب ومختلف التطورات التي حصلت لهذه النظريات عبر التاريخ. يتطرق الكتاب أيضا للتطبيقات المختلفة لهذه النظريات في مجالات مثل: الفيزياء ونظرية الأعداد. يتضمن الكتاب مراوحة بين التناول للإطار التاريخي الذي تدرجت فيه أسس نظرية الاحتمالات ومختلف المساهمين في تطويرها- وبين الذكر الدقيق للنظريات وربطها بالألعاب لتبسيطها وتقديمها لعامة القراء غير المتخصصين وهو الهدف المنشود من الكتاب.

## المؤلف:

بول دوهوفيلز: أستاذ من الدرجة الاستثنائية بجامعة بيار وماري كوري بباريس، مدير مركز بحث الإحصاء النظري والتطبيقي منذ سنة 1982م، إضافة إلى عضوية عدد من الجمعيات والمؤسسات الأكاديمية.

## المترجم:

د. حسين صدرأوي: أستاذ مساعد بقسم الرياضيات جامعة الملك سعود، حاصل على الدكتوراه في الرياضيات من جامعة يوردو Purdue بالولايات المتحدة الأمريكية سنة 1992م.

## Que sais-je? LA PROBABILITÉ, LE HASARD ET LA CERTITUDE



Paul Dehervels

pufl



مدينة الملك عبدالعزيز  
للعلوم والتقنية KACST

تعمل مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية على توفير المعرفة للقارئ العربي. فقامت في هذا الإطار بنشر سلسلة من الكتب والمجلات العلمية وأتاحها للقراء دون مقابل بصيغتها الرقمية والورقية. فجميع إصدارات المدينة متاحة على موقعها الإلكتروني ليتمكن المتصفح من تحميلها أو قراءتها على الإنترنت.

www.kacst.edu.sa  
publications.kacst.edu.sa  
awareness@kacst.edu.sa

الموقع الإلكتروني،  
إصدارات المدينة،  
البريد الإلكتروني

هاتف: ٠١١ ٤٨٨٣٤٤٤ - ٠١١ ٤٨٨٣٥٥٥  
فاكس: ٠١١ ٤٨٨٣٧٥٦  
ص.ب. ٦٠٨٦ الرياض ١١٤٤٢  
المملكة العربية السعودية  
مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية

