علم التركيبات

لمحة تاريخية:

- يبدو للوهلة الأولى أن هذا الحقل من الرياضيات غير مهم وذلك لقلة تطرق الكتب الدراسية له، ولكن في الحقيقة أنه من أهم العلوم الرياضية في العصر الحالي وذلك لكثرة تطبيقاته في علوم الحاسب والبرمجة ونظم المواصلات وبناء المصانع ونظم المعلومات وعملياتها والهندسة الكهربائية وغيرها الكثير.
- بدأ الاهتمام بتأصيل مبادئ هذا العلم حديثا في القرن السابع عشر، ولكنه موجود قبل ذلك بكثير. أول ظهور لدراسته كان في الصين قبل عام ٢٢٠٠ قبل الميلاد حيث أخترع الصينيون المربع السحري وعرفوا التباديل أيضا عام ١١٠٠ قبل الميلاد. وظهرت التباديل في كتابات العالم الهندي سوشرات بعد ذلك، أما التوافيق فقد ذكرها إقليدس عام ٣٠٠ قبل الميلاد،
- وبشكل عام العرب والصينيون والهنود أشاروا في كتبهم إلى التوافيق والتباديل، لكنها لم تدرس بشكل كبير قبل القرن السابع عشر.
- في القرن السابع عشر درس كل من باسكال وفيرما المسائل المرتبطة بعلم التركيبات بعمق أكبر وذلك فيما يتعلق بألعاب القمار في ذلك الوقت. كذلك كانت بحوث كل منهما الحجر الأساس لنظرية الاحتمالات.
- في القرن الثامن عشر، عرف لابلاس الاحتمال بشكل دقيق وبعد ذلك أسس أويلر لنظرية الرسوم من خلال تقديم تفسير رياضي لمعضلة جسور كونيغسبرغ السبعة المشهورة وكذلك كتب برنولي أول كتاب قدم فيه طرق واستراتيجيات العَدّ.
- وفي القرن التاسع عشر تم استخدام استراتيجيات العَدّ لحل مسائل الألعاب والغاز الرياضية بواسطة هاميلتون وغيره، وطور كيرشوف نظرية الرسوم لحل مسائل الدوائر الكهربية، وكذلك استخدم سيلي استراتيجيات عَدّيَة في الكيمياء الحيوية.

فروع علم التركيبات:

علم العَدّ (Counting): هو فرع من فروع الرياضيات يُعنى بطرق العَدّ ودراسة وجود عناصر بصفات معينة في مجموعة معطاة.

نظرية الرسوم (Graph Theory): يدرس هذا العرف الرسم Graph الذي يتكون من نقط (تسمى رؤوس vertices) وخطوط تبدأ وتنتهي بنقطتين بحيث لا تتقاطع حافتين الا عند رأس (تسمى حواف Edges).

سنركز في هذه المحاضرة على علم العَدّ: مبادئه واستراتيجياته وأشهر الأمثلة عليه.

مبادئ العَدّ

أولا: مبدأ الضرب (مبدأ العد الأساسي):

إذا كان الحدث الأول يتم بـ m طريقة والحدث الثاني يتم بـ n طريقة بشكل مستقل فإن الحدثين يمكن أن يتما معاً بـ $m \cdot n$ طريقة. ويمكن تعميم ذلك لأي عدد من الحوادث المستقلة مثنى مثنى والتي تحدث معًا.

أهم تطبيقاته:

١- **عدد المجموعات الجزئية**: عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوي n عنصراً يساوي 2^n

مثال: صالة اجتماعات فيها 5 وحدات تكييف

أ- بكم طريقة يمكن تشغيل الوحدات الخمس.

ب- لنحافظ على برودة مناسبة للصالة يجب أن تكون واحدة على الأقل من الوحدات مشتغلة. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

الحل: كل وحدة لها حالتين إما مشتغلة N أو مطفأة F.

الآن يمكننا أن نعبر عن حالة وحدات التكييف باستخدام الحرفين N و F حسب أرقام الوحدات.

كمثال على ذلك العبارة $NFFFN$ تعني أن الوحدات المشتغلة هي الأولى والخامسة فقط.

أ- إذًا عدد الحالات الممكنة لتشغيل الوحدات يساوي 2^5 طريقة

ب-   ولحل هذه لدينا حالة واحدة مرفوضة وهي أن تكون جميع الوحدات مطفأة أي أن الجواب $2^n - 1$

٢- التباديل: إذا كان لدينا n من الأشياء وأردنا اختيار k منها مع مراعاة الترتيب، فإن عدد الاختيارات هو

$$_{n}P_{k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ويُقرأ العدد $_{n}P_{k}$ تباديل n عنصر مأخوذ k مرة.

مثال: أشترى توفيق قفلاً رقميا لدراجته يفتح باستعمال ثلاث أرقام من 1 إلى 9. بكم طريقة يمكنه أن يختار أرقام القفل على أن يستخدم الرقم مرة واحدة فقط؟

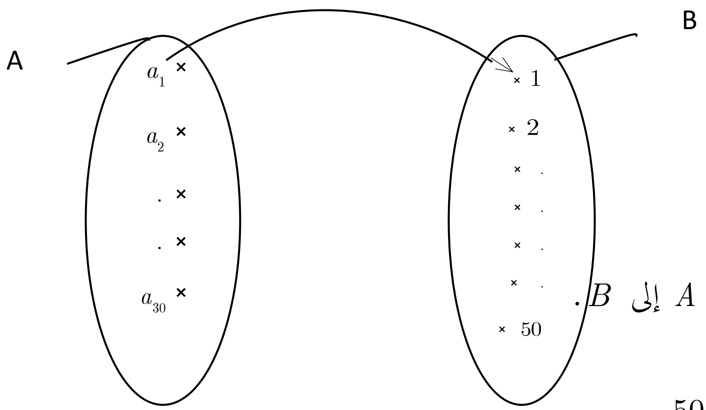
الحل: لنتصور الحل سنمثل خانات القفل كما يلي

الأولى	الثانية	الثالثة

من مبدأ الضرب نجد أن عدد الأرقام السرية الممكنة المختلفة للقفل يساوي $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ رقما.

ملاحظة: $_{n}P_{n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$ هذا العدد يمثل ترتيب n من الأشياء في صف واحد مع مراعاة الترتيب

مثال إذا كانت A مجموعة تحوي 30 عنصراً وَ B مجموعة تحوي 50 عنصراً. فكم عدد التطبيقات $f : A \to B$ ؟ ما عدد التطبيقات الأحادية؟



عدد التطبيقات من مبدأ الضرب سيوجد

$\underbrace{50 \times 50 \times \cdots \times 50}_{30\, times} = 50^{30}$ تطبيق من A إلى B.

عدد التطبيقات الأحادية فسيكون العدد $\frac{50!}{20!} = 21 \times \cdots \times 49 \times 50$.

٣- **التباديل الدائري:** عدد طرق ترتيب n من الأشياء المتمايزة حول دائرة غير مُعَلَّمَة ويساوي $(n-1)! = \dfrac{n!}{n}$

مثال١: لدى عائلة الحاج حمزة طاولة طعام دائرية تتسع ل 5 أشخاص. بكم طريقة يمكن أن يجلس عليها أبنائه الخمسة؟

الحل: لو كان جلوسهم على طاولة مستطيلة بجانب بعض فإن عدد الطرق هو $5!$. لنفرض أن الأبناء هم A,B,C,D,E . لاحظ أن الأوضاع $ABCDE, BCDEA, CDEAB, DEABC, EABCD$ كلها تمثل نفس الوضع وبالتالي كل وضع جلوس سيتكرر خمس مرات وبالتالي سنقسم الناتج من الوضع الخطي على 5 أي عدد التباديل الدائرية هو $4! = \dfrac{5!}{5}$.

٤- التباديل مع التكرار (أو التباديل ل n من الأشياء بينها أشياء متماثلة)

مثال: بكم طريقة يمكن إعادة ترتيب حروف كلمة PERMUTATION ؟

هذا مثال لتباديل مع التكرار حيث تكرر الحرف T مرتين.

عدد الكلمات الناتجة من كل التباديل الممكنة لحروف الكلمة يساوي $\dfrac{11!}{2!}$. لماذا القسمة على $2!$؟

٥- **التوافيق:** عدد طرق اختيار r من الأشياء من مجموعة بها n من الأشياء مع عدم مراعاة الترتيب ويساوي $\dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ ويرمز له بالرمز ${}_nC_r$ أو الرمز $\dbinom{n}{r}$

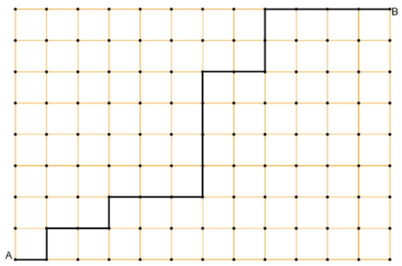
مثال: يرغب 5 من أعضاء الفريق السعودي في اختيار 3 منهم عشوائيا لتكوين لجنة نظام. بكم طريقة يمكنهم عمل ذلك؟

الحل: لحل هذه المسألة لنسمي الأعضاء A,B,C,D,E فيمكن اختيار A,B,D أو A,C,E أو أي ثلاثة منهم.

لاحظ أن اختيار A,B,D مثل اختيار B,A,D وهذه الحالة تتكرر $3!$ مرة.

فلو قلنا بأنه يمكن اختيار الأول بـ 5 طرق والثاني بـ 4 طرق والثالث بـ 3 لحصلنا على التباديل ${}_5P_3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$ لكن هناك تكرار لكل اختيار 6 مرات وبالتالي سيكون جوابنا في هذه الحالة $\dfrac{{}_5P_3}{3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$

٦- عدد المسارات:



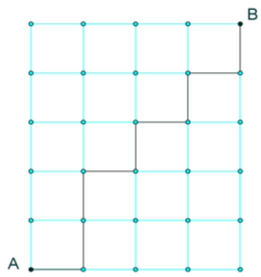
إذا كان لدينا شبكة من نوع $m \times n$ كما في الشكل

عدد الطرق (المسارات) الأقصر للوصول من النقطة A *إلى النقطة* B

يساوي $\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}$

مثال ٢: إذا افترضنا أن الشبكة من النوع 5×4 فلكل مسار نحتاج 4 خطوات أفقية و 5 خطوات عمودية أي بعدد خطوات تسع في المجموع. رمزنا للخطوة الأفقية بالرمز R والخطوة العمودية بالرمز U.

فإن المسار الممثل في الشكل يمكن كتابته كما يلي $RUURURURU$ أي أن كل مسار يمكن كتابته كمتتابعة من أربع حروف R وخمسة حروف U. من مبدأ التقابل فإن عدد المتتابعات المختلفة مساو لعدد المسارات المختلفة من A إلى B. لاحظ أن المتتابعة تختلف باختلاف مواقع الحروف R الأربعة في التسع الأماكن المتاحة لها وبالتالي عدد المتتابعات المختلفة هو $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, وهو عدد المسارات المطلوبة.



مثال: كم مسار بطول 14 خطوة يوجد على شبكة من نوع 6×8 للانتقال من النقطة في الزاوية السفلية اليمنى إلى النقطة في الزاوية العلوية اليسرى؟ على نفس الشبكة وبنفس الطول كم مسار يمر في نقطة المركز؟

الحل: للفقرة الأولى واضح أن الإجابة من أعلاه هي $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$ وذلك أن المسار ذو الطول 14 لا يحصل إلا من الاتجاه إلى اليمين والأعلى فقط. أما الفقرة الثانية فلحساب عدد المسارات ذات الطول 14 و التي تمر في نقطة المركز للشبكة نستطيع تصور أن لدينا رحلتان الأولى من نقطة البداية إلى نقطة المركز و الثانية من المركز إلى نقطة النهاية الرحلة الأولى لها شبكة من نوع 3×4 بدايتها نقطة البداية الأصلية و نهايته نقطة المركز و يمكن قطعها بـ $35 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 3 \end{pmatrix}$ مسار و الرحلة الثانية لها شبكة من نوع 3×4 بدايتها نقطة المركز و نهايتها نقطة النهاية الأصلية و لها نفس عدد المسارات و بالتالي عدد المسارات ذات الطول 14 والتي تمر في نقطة المركز يساوي 35^2.

ثانيًا: مبدأ الجمع:

مبدأ الجمع: *إذا كانت الحادثة A تحدث بـ n طريقة مختلفة والحادثة B تحدث بـ m طريقة مختلفة وكانت الحادثتان متنافيتان، فإن حدوث الحادثة A أو B ستكون بـ $m+n$ طريقة مختلفة*

مثال ١٠: كم عدد زوجي مكون من ثلاث خانات مختلفة؟

الحل:

المئات (ف)	العشرات	الآحاد(ز)
5 إمكانيات	8 إمكانيات	5 إمكانيات
مبدأ الضرب في هذه الحالة لدينا $5\cdot 8\cdot 5=200$		

المئات (ز)	العشرات	الآحاد(ز)
4 إمكانيات	8 إمكانيات	4 إمكانيات
في هذه الحالة لدينا $4\cdot 8\cdot 4=128$		

وبالتالي من مبدأ الجمع عدد الأعداد $328=128+200$ عدد

مثال: كم عدد مكون من ثلاث خانات بالضبط بحيث:

a) له خانات زوجية فقط وفيه خانتين فقط متكررة،

b) له خانة زوجية واحدة فقط.

الحل: a) من مبدأي الجمع والضرب عدد الأعداد $48=16+16+16$.

b) من مبدأي الجمع والضرب سيكون لدينا $350=125+125+100$ عدد.

ولمبدأ الجمع تطبيقات عدة أهمها

مبدأ التضمين والإقصاء:

إذا كانت هناك حادثتين A و B فإن حدوث الحادثة A أو B سيكون بـ

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{طريقة}$$

حيث يمثل $|A|$ عدد طرق حدوث A

مثال: في أحد ملتقيات التدريب خُيِرَ أعضاء الفريق السعودي للناشئين بين لعب كرة القدم والسباحة في الوقت المخصص للرياضة وقد كان عدد أعضاء الفريق 20 طالباً. فأختار 12 طالب أن يلعبوا كرة قدم وأختار 10 منهم السباحة فإذا علمت أن 8 من الطلاب قد اختاروا النشاطين معاً فكم عدد الطلاب الذين لم يختاروا أي نشاط؟

الحل: لاحظ أن عدد الطلاب الذين اختاروا كرة القدم 12 و عدد الذين اختاروا السباحة 10 و مجموعهما 22 و لكن عدد الطلاب الإجمالي 20 و هذا يفسر بأن هناك طلاب قد اختاروا النشاطين معا فنحن قد حسبناهم مع المجموعة الأولى و كذلك حسبناهم مع المجموعة الثانية مرة أخرى و بالتالي لنحصل على عدد الطلاب الذين يشاركوا في أحد النشاطين أو كلاهما لابد أن نطرح المتكرر وهو 8 طلاب الذين اختاروا النشاطين معا لنحصل على $12 + 10 - 8 = 14$ طالب مشاركين و بالتالي لدينا 6 طلاب لم يختاروا أي نشاط

استراتيجيات عَدّ:

١- **حذف العَدّ الزائد:** عند حل بعض المسائل نعَدّ بعض الحالات الزائدة وذلك إما بتكرار جميع الحالات بنفس العدد أو زيادة حالات غير مرغوبة أو لا تنطبق عليها شروط المسألة ونتخلص عادة من العد الزائد إما بالطرح أو القسمة كما في المثالين القادمين.

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن تشغيل التكييف في صالة كبيرة بها 6 وحدات تكييف بشرط أن تشتغل اثنتان منها على الأقل؟

عند تجاهل الشرط نجد أن عدد الطرق لتغيل الوحدات العشر يساوي 2^{10}

ولكن حالة أن تطفئ جميع الوحدات مرفوض وعدد الحالات واحدة وكذلك أن تعمل وحدة واحدة فقط مرفوض أيضا وعددها 10 وبالتالي العدد المطلوب يساوي $2^{10}-11=1013$

وأمثلة القسمة عند وجود عد زيادة كما هي العلاقة بين التوافيق والتباديل: $\binom{n}{k}=\frac{P_k^n}{k!}$

وذلك ان كل $k!$ حالة من التباديل هي حالة متطابقة بالنسبة للتوافيق لأن الترتيب غير مهم.

٢- **حساب المتممة:** بكون حساب المتممة في بعض المسائل أسهل من حساب الحالات المطلوبة.

مثال: كم عدد صحيح موجب مكون من أربع خانات مختلفة بشرط أن يحوي العدد الرقم 6 مرة واحدة على الأقل؟

الحل: نوجد عدد الحالات بدون الشرط

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة من أربع خانات مختلفة، من مبدأ الضرب، يساوي $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$.

ثم نوجد عدد المتممة وهو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة من أربع خانات مختلفة التي لا تحوي الرقم 6 يساوي

$$8\cdot 8\cdot 7\cdot 6=2588$$

إذا العدد المطلوب يساوي $4536-2588=1948$

٣- **إستراتيجية النجوم و الأشرطة Stars and Bars** : أحد أهم التطبيقات على هذه الاستراتيجية هي حل المسائل التي تتطلب حساب عدد الطرق التي يوزع بها n عنصر متماثل على k قسم (جزء متمايز). ونضرب مثال بسيط لتتضح الفكرة.

مثال: لدى عبد الله 6 ريالات و يريد أن يوزعها على أربعة من إخوته محمد, أحمد , فهد , سلطان. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

الحل: لحل هذه المسألة سنمثل الـ 6 ريالات بـ 6 نجمات ****** ونستخدم ثلاث أشرطة للفصل بين نصيب كل من الإخوة وذلك باعتبار النجوم على يمين الشريط الأول من اليمين نصيب محمد والنجوم بين الاول والثاني نصيب أحمد والنجوم بين الثالث والرابع نصيب فهد ثم النجوم على يسار الشريط الرابع من نصيب سلطان. وبالتالي عدد طرق التوزيع الممكنة هو نفس عدد الأوضاع الممكنة لمواقع الأشرطة والتي يمكنها التحرك في تسع أماكن. فمثلا حالة أن يكون نصيب محمد ثلاث ريالات وأحمد ليس له ريالات وفهد ريال وسلطان ريالان، تمثل كالتالي ***||*|**. وبالتالي عدد التوزيعات الممكنة يحسب بالتوافيق كالتالي $\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ وهو المساوي لـ $\begin{pmatrix}6+4-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

إلى هنا يمكننا بسهولة استنتاج الحالة العامة.

عدد التوزيعات الممكنة لـ n عنصر متماثل على k علبة متمايزة = $\begin{pmatrix}n+k-1\\n\end{pmatrix}$

مثال : أراد ناصر شراء طبق من الحلويات هدية لأخته هدى فوجد علبة تكفي لثمان قطع من الحلويات وفي المحل يوجد أربعة أنواع من الحلويات فقرر أن يشتري ثمان قطع منها لوضعها في العلبة. فبكم طريقة مختلفة يستطيع أحمد أن يقدم الهدية؟

الحل: نعبر عن قطع الحلوى الثمان بـ 8 نجوم ونضيف ثلاثة شرائط لتقسيم للحلويات كما هو موضح |||********

بالنظر إلى جميع الأماكن التي يمكن أن تشغلها الأشرطة يمكننا إيجاد عدد الطرق الممكنة لاختيار أنواع الحلويات ونظراً لوجود 11 موقع ممكن و 3 شرائط فإن عدد طرق توزيع الشرائط على الأماكن المتاحة هو طريقة

$$\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}=\frac{11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3}=165$$

وبالتالي فانه يمكن اختيار أنواع البسكويت بهذا العدد من الطرق.

مثال:

a) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $x_1+x_2+x_3+x_4=60$ ؟

b) كم عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x_1+x_2+x_3+x_4=60$ ؟

الحل:

a) لاحظ أن الحل لهذه المعادلة هو أربعة أعداد حاصل جمعها 60 فيمكننا أن نتصور أن لكل متغير علبة و العلب مصفوفة في صف واحد و بذلك نكون حولنا المسألة إلى 60 نجمة مطلوب توزيعها على أربع علب أي يمكن استخدام ثلاث أشرطة للفصل بين العلب و بالتالي من إستراتيجية النجوم والأشرطة فإن عدد الحلول يساوي $\binom{60+4-1}{60}=\binom{63}{60}=\binom{63}{3}$

.

b) لاحظ أن الشرط هنا الأعداد x_1, x_2, x_3, x_4 أعداد صحيحة موجبة أي أن $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1$. سنتدخل هنا جبرياً لنحول المسألة كما في الفقرة الأولى نضع $y_i = x_i - 1$ لكل i. و منها $y_i \geq 0$ لكل i و تصبح المعادلة على الصورة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60 \Rightarrow y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 = 60$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 56$$

و يكون عدد الحلول من إستراتيجية الأشرطة و النجوم للمعادلة الجديد هو $\binom{56+4-1}{56}=\binom{59}{3}$ الذي هو نفس عدد الحلول للمعادلة الأصلية.

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن لـ9 طلاب الجلوس على طاولة مستديرة؟ إذا لم يقبل أثنين منهم الجلوس بجانب بعض فبكم طريقة يمكنهم الجلوس؟

الحل: بالنسبة للطلاب في الحالة الأولى فيمكنهم الجلوس حول الطاولة المستديرة بـ $8!$ طريقة. أما إذا رفض اثنان منهم الجلوس بجانب بعض فيمكن حساب عدد الأوضاع الممكنة للجلوس عندما يكون الطالبين بجانب بعض ثم نطرح العدد من العدد الكلي لطرق الجلوس لـ 9 طلاب. يمكن أن نعتبر الطالبين شخص واحد في حال جلوسهم متجاورين بالتالي سيكون عدد طرق جلوس الطلاب بحيث يكون الطالبين المعنيين متجاورين هو $7!$ وحيث أنهم أثنين فلهما وضعين للجلوس بجانب بعضهما. ويكون بذلك عدد طرق الممكنة لعدم جلوس الطالبين بجانب بعض هو $8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7!$

عبدالعزيز بن عبدالله بن عبيد

AZEEEZ1391@hotmail.com