Natural Logarithmic Function
الدالة اللوغاريتمية الطبيعية
Math 111
Lecture 7

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

رأينا في الباب السابق أن :

$$\int t^r\,dt = \frac{t^{r+1}}{r+1} + c,$$

حيث أن $r \neq -1$

ولكن هذه القاعدة غير صحيحة بالطبع عندما $r = -1$ فأن المقام يساوي الصفر في هذه الحالة. لذا فإننا سوف نتناول حل المشكلة في هذا الباب

.

تعريف : تعرف الدالة اللوغاريتمية الطبيعية على النحو التالي:

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

حيث أن الدالة $f(t) = \frac{1}{t} dt$ متصلة على أي فترة لا تحتوي على الصفر و لذالك فهي قابلة للتكامل على الفترة من 1 الى x

ملحوظات:

- مجال الدالة $\ln$ هو $(0,\infty)$.
- $\ln x > 0 \Rightarrow x > 1 \quad , \quad \ln x < 0 \Rightarrow x < 1$

و

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$

- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق (ومن ثم متصلة) على مجالها ويمكن آن نطبق المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

- الدالة $\ln$ تزايدية فعلا حيث أن مشتقتها موجبة على مجالها.

خصائص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل $r \in \mathbb{Q}$

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$,
- $\ln\left(a^r\right) = r \ln a$,
- $\ln\left(a^b\right)^r = \ln a^{br}$,
- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$,
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

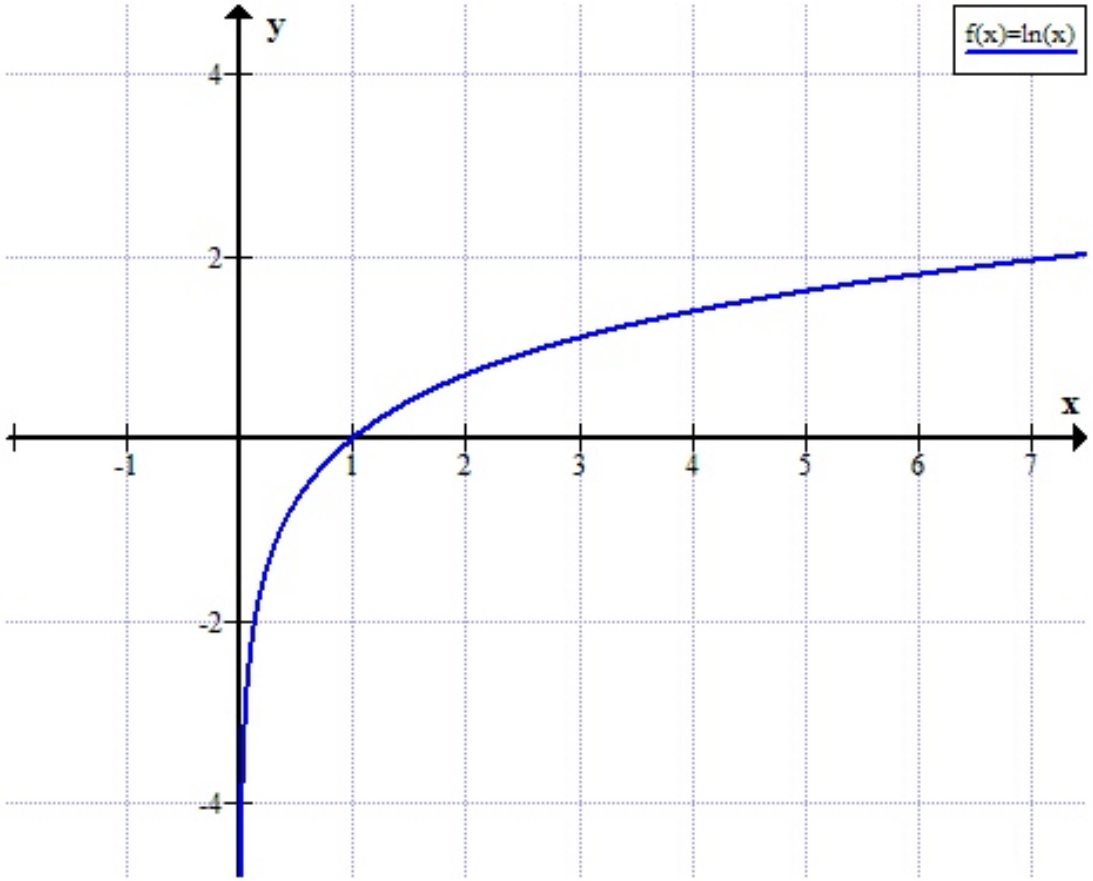

Figure: $\ln x$.

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

مبرهنة:

اذا كانت $u = f(x)$ قابلة للاشتقاق ولا تاخذ القيمة 0 على الفترة I فإن:

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \forall x \in I.$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) f(x) = \ln\left(x^4 + 5x + 4\right) ,$$

$$(2) f(x) = \ln\left(\ln x\right).$$

Example

مثال : أوجد مشتقة الدوالة:

$$y = \frac{\sqrt[5]{x^2}\sin^4 x}{x^3\sqrt{2x}}.$$

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

مبرهنة:

- $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c,$
- $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c,$
- $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c,$
- $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c,$
- $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c.$

Example

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1)\ \int \frac{x^2}{3x^3+9}dx\ ,$$

$$(2)\ \int \frac{1}{x - x\ln x}dx.$$

Exercises

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) f(x) = \frac{x^2}{\ln x},$$

$$(2) f(x) = \cos(\ln 2x).$$

$$(3) f(x) = x \ln 3x.$$

$$(4) y = (x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4.$$

Exercises

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1)\ \int_2^4 \frac{1}{9-2x}dx\ ,$$

$$(2)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx.$$

$$(3)\ \int x\cot x^2 dx.$$

$$(4)\ \int (\csc x - 1)^2 dx..$$

Thanks for listening.