

Improper Integrals
التكاملات المعتلة
Math 111
Lecture 22

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات التكاملات المعتلة والتي قد تكون على الصورة

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

الحالة الاولى:

حالة الفترة غير المحدودة:

١) اذا كانت f متصلة على الفترة $[a, \infty)$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

٢) اذا كانت f متصلة على الفترة $(-\infty, b]$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣٢) بالنسبة للتكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ فيمكننا تعريفها كالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

مثال : أحسب التكامل التالي :

$$(1) \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

$$(2) \int_{-\infty}^1 e^{2x} dx.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

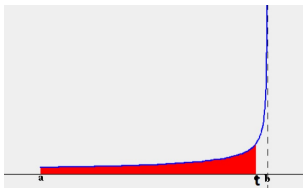
الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b)$ وكانت

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$$

اي غير محددة بجور b كما في الشكل التالي



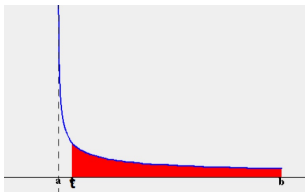
فيكون التكامل المعتل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

(٢) إذا كانت f متصلة على الفترة $(a, b]$ وكانت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور a كما في الشكل التالي



فيكون التكامل المعتل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي إذا كانت النهاية محددة أي بمعنى أنها قيمة التكامل المعتل المحدد، أما إذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فإن التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ما عدا عند النقطة $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$$

فإن التكامل المعتل هو

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

وبالمثل يكون التكامل تقاربيًا إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن تقاربيًا ويكون تباعديًا إذا كان أحدهما تباعديًا أو كلاهما.

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx.$$

$$(3) \int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx.$$

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

$$(4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(4 + x^2)} dx.$$

Thanks for listening.