Indeterminate Forms

صيغ عدم التعيين

Math 111

Lecture 21

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات عدم التعيين على الصورة

صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات عدم التعيين على الصورة

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0},$$

$$\infty-\infty, \quad \infty\cdot 0. \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}.$$

هذا حالات عدم التعيين والتي نحصل عليها من حساب النهاية والتي سوف نحسبها بالطرق التالية

الحالة الاولي:

صيغ عدم التعيين من التوع $\frac{0}{0}$:

اذا كان ناتج النهاية

$$\lim_{x \mapsto c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

حصلنا على حالة عدم تعيين وذلك من حساب نهاية البسط على نهاية المقام وهنا نحتاج إلى اتباع طريقة اخرى لإيجاد النهاية.

قاعدة لوبيتال:
قبل الشروع في قاعدة لوبيتال نقدم لكم مبرهنة القيمة المتوسطة لكوشي.
مبرهنة القيمة المتوسطة لكوشي:

لتكن كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$، فإن هنـــاك نقطة $c \in (a,b)$ تحقق

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

قاعدة لوبيتال:

افرض أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للاشتقاق على فترة I تحوي c (باستثناء ربما عند c) و أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I \setminus \{c\}$. إذا كان للكسر $f(x)/g(x)$ الصيغة غير المعينة $0/0$ و كانت $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$، فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدة لوبيتال تساعدنا في التعامل مع مثل هذا النهايات.

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

$$(2) \lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1)\ \lim_{x \mapsto 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

$$(2)\ \lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x-1}{x}.$$

$$(3)\ \lim_{x \mapsto 0} x \cot x.$$

الحالة الثانية :

صيغ عدم التعيين من التوع $\frac{\infty}{\infty}$:

اذا كان ناتج النهاية

$$\lim_{x \mapsto c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

فاننا نستخدم المبرهنة التالية:

إذا كانت للنهاية $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ الصيغة ∞/∞ و استوفت f و g باقي شروط قاعـــدة لوبيتال، فإن: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}.$$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}.$$

$$(2) \lim_{x \mapsto \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$

الحالة الثالثة:

صيغ عدم التعيين من التوع $0 \cdot \infty$:

نحصل على هذا الحالة من خلال حساب النهاية من الصورة التالية

$$\lim_{x \mapsto c} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty \Leftrightarrow \lim f(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim g(x) = \infty.$$

و العكس صحيح.

وهنا نقوم بتحويل النهاية إلى إحدى الصيغتين $\frac{\infty}{\infty}$ OR $\frac{0}{0}$ وذلك لتطبيق قاعدة لوبيتال بالطرق التالية

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad OR \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1) \lim_{x \mapsto 0^+} x^2 \ln(x).$$

الحالة الرابعة:

صيغ عدم التعيين من التوع $\infty - \infty$:

/ \@ / \@ \@ \@ وهنا نقوم بتحويل النهاية إلى إحدى الصيغتين $\frac{\infty}{\infty}$ OR $\frac{0}{0}$ وذلك لتطبيق قاعدة لوبيتال.

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1)\ \lim_{x\mapsto 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

الحالة الخامسة:

صيغ عدم التعيين من التوع

$$1^{\infty}, \quad 0^{0} \quad \infty^{0}.$$

Exercises

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1)\ \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{\sin 5x}{2x}\right).$$

$$(2)\ \lim_{x\mapsto 0}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln(x)}.$$

$$(3)\ \lim_{x\mapsto\infty}\left(\frac{\sqrt{9x-1}}{\sqrt{x+1}}\right).$$

$$(4)\ \lim_{x\mapsto 0^+}(\sin(x)/lin(x)).$$

Thanks for listening.