الإختبار النهائي لمقرر111 ريض الفصل االثاني: 1439 / 1440 هـ الزمن: 3 ساعات	كلية العلوم - قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University

ملاحظة : ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

الجزء الأول (7 درجات):

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x+2$ على الفترة $[1,3]$. (3 درجات)

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=\cosh^2\left(1+\sqrt{x}\right)$. (درجتان)

(2) $y=\sinh^{-1}(\cos(x))$. (درجتان)

الجزء الثاني (15 درجة) : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (درجتان)

(2) $\int \frac{\cosh(\ln(x))}{x}\,dx \quad , \quad x>0$ (درجتان)

(3) $\int 3^x\, 4^{3^x}\,dx$ (درجتان)

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^{16}}}$ (درجتان)

(5) $\int x\cos x\,dx$ (درجتان)

(6) $\int \sin^3 x\,\cos^5 x\,dx$ (درجتان)

(7) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$ (3 درجات)

الجزء الثالث (18 درجة):

(1) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{3x^2}$. (3 درجتان)

(2) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) . (3 درجات)

(3) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=4-x^2$ و $y=x+2$ وجد مساحتها. (3 درجات)

(4) احسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=x^2$ و $y=2x$ حول المحور (Ox)

(3درجات)

(5) جد طول المنحنى $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}$ من $x=1$ إلى $x=2$. (3 درجات)

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=2$ و خارج المنحنى $r=1$. (3 درجات)

الجزء الاول :

①

$$\int_1^3 (x+2)\,dx = (3-1) f(c)$$ 1

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = 2[c+2]$$

$$\left[\frac{9}{2} + 6\right] - \left[\frac{1}{2} + 2\right] = 2c + 4$$ 1

$$8 = 2c + 4$$

$$c = 2 \in (1,3)$$ 1

④

$1\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{2}\sinh(1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot \cosh(1+\sqrt{x})$$

$\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sinh(1+\sqrt{x}) \cdot \cosh(1+\sqrt{x})$$

②

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$ 2

الجزء الثاني :

①

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$ 2

2

$$\int \frac{\cosh(\ln x)}{x}\,dx = \sinh(\ln x) + c$$ 2

③

$$\int 3^x 4^{3^x} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3 \ln 4} 4^{3^x} + c$$

④

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^{16}}}$$

$u = x^8$

$\frac{du}{8x^7} = dx$

$$\int \frac{du}{8x^8\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$= -\frac{1}{8} \operatorname{csch}^{-1} u + c$$

$$= -\frac{1}{8} \operatorname{csch}^{-1}(x^8) + c$$

⑤

$$\int x \cos x \, dx$$

$u = x$ | $dv = \cos x \, dx$

$du = dx$ | $v = \sin x$

$$= x\sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

⑥

$$\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \, dx$$

$$= \int \cos^5 x \sin x \, dx - \int \cos^7 x \sin x \, dx$$

$$= -\frac{(\cos x)^6}{6} + \frac{(\cos x)^8}{8} + c$$

⑦

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A(x^2-1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$A(x^2-1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = 1$$

من $x = 1$

$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

من $x = -1$

$4C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$

بمقارنة معامل x^2

$A + C = 0$

$A = -\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1}$$

3 $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + c$$

الجزء الثالث: 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} = \frac{0}{0} \quad 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{6x} = \frac{0}{0} \quad 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{+\sin x}{6} = \frac{0}{6} = 0 \quad 1$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t \to 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx \quad 2 \quad 1$$

$$= \lim_{t \to 3^-}\left[-\int_0^t (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx\right] \quad \frac{1}{2}$$

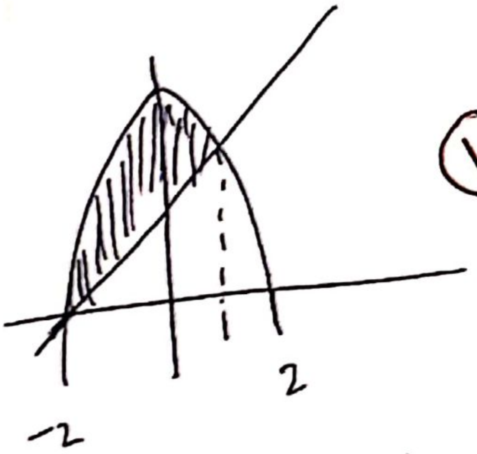
$$= \lim_{t \to 3^-}\left[-\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^t \quad 1$$

$$= \lim_{t \to 3^-}\left[-2\left[(3-t)^{\frac{1}{2}} - (3-0)^{\frac{1}{2}}\right]\right] \quad \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

التكامل متقارب.

3



1

نقاط التقاطع

$$x + 2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad 1$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2,\ x = 1$$

4

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x + 2)\right] dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

1

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left[\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right]$$

$$- \left[\frac{8}{3} - 2 - 4\right]$$

$$= 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\ un^2$$

4

$$y = 2x, \quad y = x^2$$

$$x^2 = 2x$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2$$

1

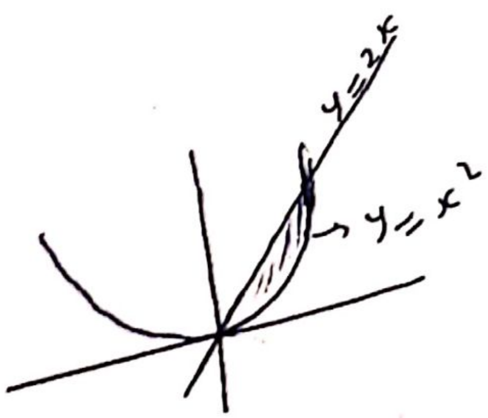
$$V = \pi \int_{0}^{2} \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] dx$$

1

$$V = \pi \int_{0}^{2} (4x^2 - x^4)\, dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_{0}^{2}$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5}\right)\right]$$

1



$$V = 32\pi\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{64}{15}\pi$$

5

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \sqrt{2x}$$

5

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1+2x}\, dx \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(1+2x)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right) \quad (1)\ (1)$$

6

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r_1^2 - r_2^2)\, d\theta \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4-1)\, d\theta = \frac{3}{2} \left[\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi\, un^2 \quad (1)\ (1)$$

ممكن الطالب يحسب مساحة الدائرتين
و يوجد الفرق بينهما .

كذلك

$$A(r_1) = \pi r_1^2 = \pi (4) = 4\pi$$

$$A(r_2) = \pi r_2^2 = \pi (1) = \pi$$

$$A = A(r_1) - A(r_2) = 3\pi\, un^2$$