

الإختبار النهائي لمقرر 111 رياض	كلية العلوم - قسم الرياضيات	جامعة الملك سعود King Saud University
الفصل الثاني 1437 / 1438 هـ الزمن: 3 ساعات	الإسم /	الرقم الجامعي /
الدرجة: 40	أستاذ المقرر /	

2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

ملاحظات: 1. عدد الورقات 6

السؤال 1 (3 درجات)	السؤال 2 (4 درجات)	السؤال 3 (21 درجة)	السؤال 4 (6 درجات)	السؤال 5 (3 درجات)	السؤال 6 (3 درجات)

السؤال الأول: أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1, 2]$. (3 درجات)

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة الدالة f متصلة على فترة محدودة ومغلقة لأن يوجد عدد $c \in (-1, 2)$ الذي

① $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = (2-(-1)) f(c)$ تحقق

①.5 $\frac{2}{3} [(x+2)^{3/2}]_{-1}^2 = 3 \sqrt{c+2}$

①.5 $\frac{2}{3} [2^3 - 1] = 3 \sqrt{c+2}$

① $\frac{14}{3} = 3 \sqrt{c+2} \Rightarrow \sqrt{c+2} = \frac{14}{9} \Rightarrow c+2 = \left(\frac{14}{9}\right)^2 \Rightarrow c = \left(\frac{14}{9}\right)^2 - 2 = \frac{34}{81}$

السؤال الثاني: احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

(درجتان) $y = \sinh(1+\sqrt{x})$ (1)

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sinh(1+\sqrt{x}) = \cosh(1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

① ①

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

(درجتان)

$$y = \frac{1}{x} \sinh^{-1}(x) \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \sinh^{-1} x \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} \right) \sinh^{-1} x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

①

①

السؤال الثالث : احسب التكاملات التالية :

(درجتان)

$$\int 2^x 5^{2^x} dx \quad (1)$$

$$du = \ln 2 \cdot 2^x dx \quad \text{فإن} \quad u = 2^x$$

نضع .

①

$$\int 2^x 5^{2^x} dx = \int \frac{5^u}{\ln 2} du = \frac{1}{\ln 2} \int 5^u du$$

0,5

$$= \frac{1}{\ln 2 \ln 5} 5^u + C = \frac{1}{\ln 2 \ln 5} 5^{2^x} + C, C \in \mathbb{R}$$

0,5

(درجتان)

$$x > 0, \int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (2)$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{فإن} \quad u = \sqrt{x}$$

نضع -

0,5

$$\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cosh u du$$

0,5

$$\int \frac{\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \sinh u + C, C \in \mathbb{R}$$

①

$$= 2 \sinh(\sqrt{x}) + C, C \in \mathbb{R}$$

(درجتان)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}} \quad (3)$$

$$du = 4x^3 dx \quad \text{فإن} \quad u = x^4$$

نضع

①

$$du = 4x^3 dx = \frac{4x^4 dx}{x} = 4u \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{4u}$$

والتالي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{4} \operatorname{csch}^{-1}(u) + C$$

$$\textcircled{1} = -\frac{1}{4} \operatorname{csch}^{-1}(x^4) + C, C \in \mathbb{R}$$

(درجتان)

$$\int x \sin x \, dx \quad (4)$$

نستخدم طريقة التفاضل بالتجزئة

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C, C \in \mathbb{R}$$

(درجتان)

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx \quad (5)$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$du = -\sin x \, dx \quad \text{عند } u = \cos x$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\int (1 - u^2) u^2 \, du$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int (u^4 - u^2) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$

(درجتان)

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \quad \text{مع العلم أن } \int \sin(7x) \cos(5x) \, dx \quad (6)$$

$$\text{نأخذ } a = 7x \text{ و } b = 5x \text{ فإن}$$

$$\textcircled{1} \sin(7x) \cos(5x) = \frac{1}{2} [\sin(2x) + \sin(12x)]$$

$$\int \sin(7x) \cos(5x) \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(2x) + \sin(12x)] \, dx$$

$$\textcircled{1} \int \sin(7x) \cos(5x) \, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(12x)}{12} \right] + C, C \in \mathbb{R}$$

(3 درجات)

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} \quad (7)$$

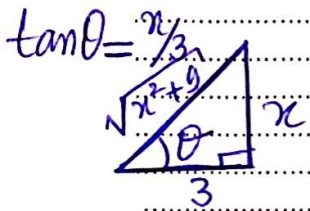
نستخدم التعويض التالي: $x = 3 \tan \theta$ فان $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$

$$(x^2+9)^{3/2} = (9 \tan^2 \theta + 9)^{3/2} = (9(\tan^2 \theta + 1))^{3/2} = (9 \sec^2 \theta)^{3/2} = 3^3 \sec^3 \theta$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} = \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{3^3 \sec^3 \theta} = \frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\sec \theta}$$

①

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{9} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{9} \sin \theta + C$$



①

$$= \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + C, C \in \mathbb{R}$$

(3 درجات)

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \right] dx$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = A \ln|x-1| - \frac{B}{x-1} + C \ln|x+1| + \text{const}$$

التوابت A, B, C.

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 1 = -A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + \text{const}$$

(3 درجات)

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{1/2} - x^{1/3}} dx \quad (9)$$

نضع $u = x^{1/6}$ فإن $u^6 = x$ وبالتالي $du = \frac{1}{6} u^5 du$
 $x^{1/3} = (u^6)^{1/3} = u^2$, $x^{1/2} = (u^6)^{1/2} = u^3$

$$I = \int \frac{x^{1/2}}{x^{1/2} - x^{1/3}} dx = 6 \int \frac{u^3}{u^3 - u^2} \cdot u^5 du = 6 \int \frac{u^8}{u^3 - u^2} du$$

القسم المطول

$$\begin{array}{r} u^6 \\ -u^6 + u^5 \\ \hline u^5 \\ -u^5 + u^4 \\ \hline u^4 \\ -u^4 + u^3 \\ \hline u^3 \\ -u^3 + u^2 \\ \hline u^2 \\ -u^2 + u \\ \hline u \\ -u + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$I = 6 \int \frac{u^8}{u^2(u-1)} du = 6 \int \frac{u^6}{u-1} du$$

$$I = 6 \int \left[u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{1}{u-1} \right] du$$

$$I = 6 \left[\frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1| \right] + C$$

$$I = x + \frac{6}{5} x^{5/6} + \frac{3}{2} x^{2/3} + 2\sqrt{x} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6 \ln|x^{1/6} - 1| + C$$

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x + \ln x}$

0,5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x + \ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

0,5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{x} \ln x) + (\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x})}{x + \ln x}$$

0,5

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x} \ln x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{x + \ln x} = \frac{\infty}{\infty}$$

1,5

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right] + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

بمعاني فإن $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{4-x}} = +\infty$

0,5

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{t \rightarrow 4^-} \left(\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \right)$$

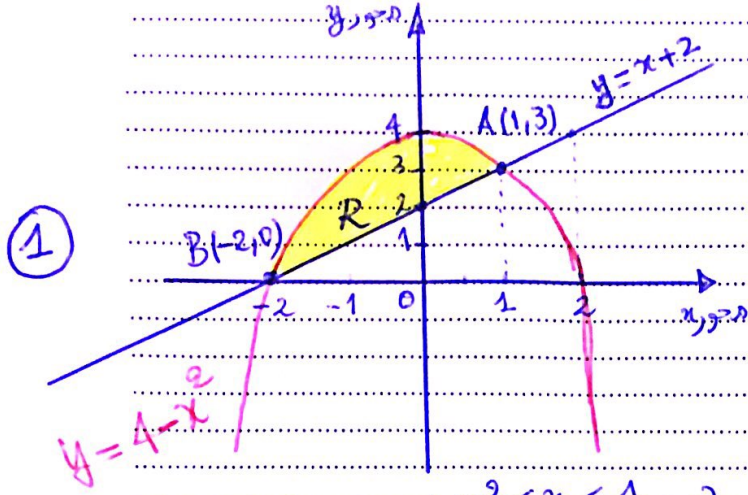
1,5

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -2 \left[\sqrt{4-x} \right]_0^t = -2(\sqrt{4-t} - 2)$$
$$= 4 - 2\sqrt{4-t}$$

1

بمعاني فإن $\lim_{t \rightarrow 4^-} [4 - 2\sqrt{4-t}] = 4$

السؤال الخامس: ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$ وجد مساحتها. (3 درجات)



نقاط التقاطع:

$$y = 4 - x^2 = x + 2$$

$$x^2 + x + 2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

0,5

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ او } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

و مساحتها

$$R = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 1, x + 2 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

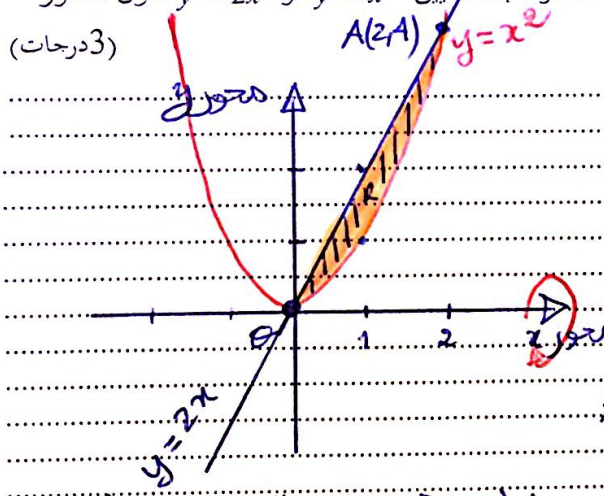
0,5

$$A(R) = \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx$$

1,5

$$A(R) = \int_{-2}^1 [2 - x^2 - x] dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - (-4 + \frac{8}{3} - 2) = \frac{9}{2}$$

السؤال السادس: احسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول المحور (Ox) . (3 درجات)



نقاط التقاطع:

$$y = x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

0,5

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ او } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

المنطقة المحيطة بالمحور Ox

$$R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

عنا حجم الجسم الناشئ من دوران R حول المحور x باستخدام الوترين

1,5

$$V(S) = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx$$

$$V(S) = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^5}{5} \right]$$

1

$$V(S) = 2^5 \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{2^6 \pi}{15} = \frac{64 \pi}{15}$$