إصلاح الاختبار

الإختبار النهائي لمقرر111 ريض	جامعة الملك سعود – كلية العلوم- قسم الرياضيات
الفصل الأول 1436 / 1437 هـ الزمن: 3 ساعات الدرجة: 40	الإسم /............... الرقم الجامعي / .... أستاذ المقرر / ....

ملاحظات : 1. عدد الورقات 5 و ورقة مسودة 2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6	السؤال 7	السؤال 8
3	14	5	3	3	3	3	6

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1,8]$.

(3 درجات)

1 $$\int_{-1}^{8}\sqrt{x+1}\,dx = (8-(-1))\sqrt{c+1}$$

1 $$\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{8} = 9\sqrt{c+1}$$

$$\frac{2}{3}\left[3^3-0\right] = 9\sqrt{c+1} \Leftrightarrow 18 = 9\sqrt{c+1}$$

$$\sqrt{c+1} = 2 \Rightarrow c+1 = 4$$

1 $$\Rightarrow c = 3 \in [-1,8]$$

السؤال الثاني : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ (درجتان)

1 نضع $u=e^x$ فإن $du=e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{du}{1+u^2}$$

1 $$= \tan^{-1}(u)+c$$

$$= \tan^{-1}(e^x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

(درجتان) $\int \ln\left(3^{\sin x}\right)dx$ (2)

$$\int \ln(3^{\sin x})\,dx =$$

1 $$(\ln 3)\int \sin x\,dx =$$

1 $$-(\ln 3)\cos x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

(درجتان) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ (3)

1 نضع $u=\sin x$ فإن $du=\cos x\,dx$

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$ فإن $\frac{1}{2}\le \sin x\le 1$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \int_{1/2}^{1}\frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2}\right]_{1/2}^{1}$$

1 $$= +\tfrac{1}{2}\left[4-1\right] = \tfrac{3}{2}$$

(درجتان) $\int \tan^{-1}x\,dx$ (4)

$u(x)=\tan^{-1}x \qquad u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1 $V'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad V(x)=x$

$$\int \tan^{-1}x = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

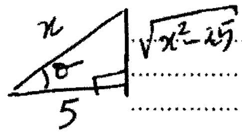
1 $$\int \tan^{-1}x = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

(3 درجات) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\,dx$ (5)

نضع $x=5\sec\theta$ فإن $dx=5\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

1 $$\sqrt{x^2-25}=\sqrt{25\sec^2\theta-25}$$

$$=5\sqrt{\sec^2\theta-1}=5\tan\theta$$



$\sec\theta = \frac{x}{5}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\,dx = \int \frac{5^2\tan^2\theta\sec\theta}{5^2\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta$$

1

$$= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int [\sec\theta - \cos\theta]\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| - \sin\theta$$

1

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\,dx = \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| - \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} + c,\ c\in\mathbb{R}$$

(3 درجات)

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$

نضع

$$u^6 = x \Leftrightarrow u = x^{1/6}$$

1

$$dx = 6u^5\,du\ ;\quad \sqrt{x} = u^3$$

$$\sqrt[3]{x} = u^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} = \int \frac{6u^5\,du}{u^2-u^3} = 6\int \frac{u^5}{u^2(1-u)}\,du$$

$$= 6\int \frac{u^3}{1-u}\,du = -6\int \frac{u^3}{u-1}\,du$$

1

$$= -6\int \left[(u^2+u+1) + \frac{1}{u-1}\right] du$$

$$= -6\left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1|\right] + c$$

1

$$= -2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + c,\ c\in\mathbb{R}$$

السؤال الثالث:

(أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x$.

(درجتان)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x = 0.\infty \quad \text{(صيغة عدم تعيين)}$$

1

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x}$$

قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x e^x} = 0^+$$

1

(ب) بيّن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب).

(3 درجات)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{t \to +\infty} \left(\int_2^{t} \frac{dx}{x \ln^2 x} \right)$$

(1)

نضع $u = \ln x$ فإن $du = \frac{dx}{x}$

$$\int_2^{t} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u^2} = -\left[\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln t} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}$$

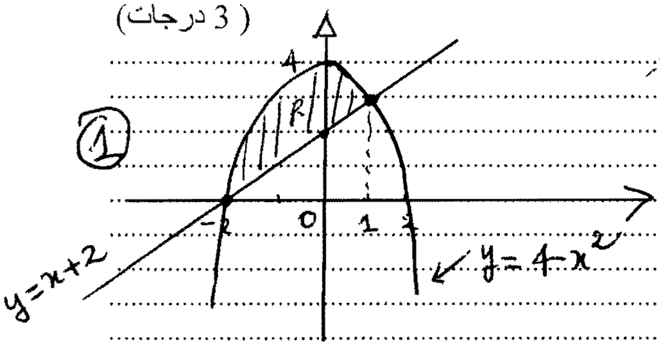
(2)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

التكامل المعتل متقارب و قيمته $1/\ln 2$

السؤال الرابع: ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ وجد مساحتها.

(3 درجات)



(1)

$y_2 = g(x) = x + 2 , \quad y_1 = f(x) = 4 - x^2$

نقاط التقاطع:

$y_1 = y_2$

$4 - x^2 = x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \; , \; x = 1$ (1)

$$R = \left\{ (x, y) \;/\; \begin{matrix} -2 \le x \le 1 \\ x + 2 \le y \le 4 - x^2 \end{matrix} \right\}$$

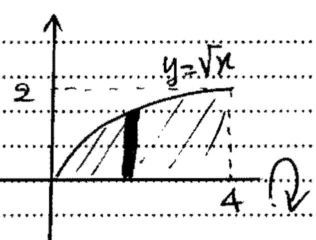
فإن مساحة المنطقة R هي

(1)

$$A(R) = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x + 2)\right] dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

السؤال الخامس: جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ و $x = 4$ حول المحور (Ox) .

(3 درجات)



$$R = \left\{ (x, y) \;/\; \begin{matrix} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{matrix} \right\}$$

باستخدام طريقة الأقراص الاسطوانية

فإن حجم الجسم S هو

$$V(S) = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx$$

(3)

$$V(S) = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

السؤال السادس: جد طول القوس $y=\cosh x$ من $x=0$ إلى $x=\ln 2$. (3 درجات)

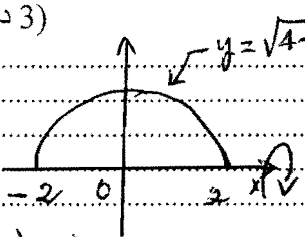
طول القوس هو

1 $$L=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}\cosh x\right)^2}\,dx$$

1 $$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\int_0^{\ln 2}\cosh x\,dx=\left[\sinh x\right]_0^{\ln 2}$$

1 $$L=\sinh(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-1/2}{2}=\frac{3}{4}$$

السؤال السابع: جد مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y=\sqrt{4-x^2}$, $-2\le x\le 2$ حول المحور (Ox) . (3 درجات)



$$S=2\pi\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$ 1

حيث $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ فإن $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ 1

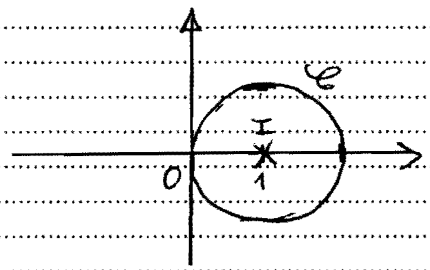
فإن مساحة السطح هو

$$S=2\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4}\,dx=16\pi$$ 1

سطح كرة نصف قطرها 2 (surface Area of sphere)

السؤال الثامن:

(أ) حول المعادلة القطبية $r=2\cos\theta$ إلى ديكارتية ثم تعرف على بيانها. (3 درجات)



$r=2\cos\theta$

$r^2=2r\cos\theta$ 1

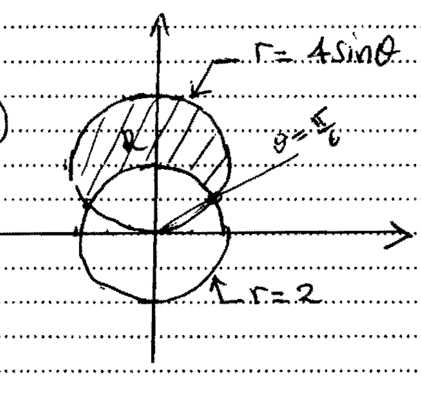
$x^2+y^2=2x$ 1

$x^2-2x+y^2=0$

$(x-1)^2+y^2=1$ هي معادلة دائرة مركزها $I(1,0)$ ونصف قطرها 1 . 1

(ب) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=4\sin\theta$ وخارج المنحنى $r=2$. (3 درجات)

1



نقاط التقاطع: $r=4\sin\theta=2$

إذن $\sin\theta=1/2$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ أو $\theta=\frac{5\pi}{6}$

$$A(R)=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[(4\sin\theta)^2-2^2\right]d\theta$$ 1

$$A(R)=16\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta-4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

1 $$A(R)=8\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2}-\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}.$$