# حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

# الباب الأول

## الاشتقاق الجزئي PARTIAL DIFFERENTIATION

- مقدمـــة
- الــدوال في عــدة مــتغيرات
- النــهايات والاتــصال
- الاشــتقاق الجزئـــي
- قاعدة السلسلة
- القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات

## • الاشـــتقاق الجزئـــي

**(١-٨-١) تعريف**

لتكن $f$ دالة في المتغيرين $x$ و $y$ ، ولتكن $(x, y)$ نقطة في نطاق الدالة $f$ . نعّـرف المـشتقات الجزئية للدالة $f$ بالنسبة لكل من المتغيرين $x$ و $y$ عند $(x, y)$ كما يلي :

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

على الترتيب، بشرط أن النهاية موجودة.

نسمي كل من $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ المشتقة الجزئية الأولى للدالة $f$ بالنسبة للمتغيرين $x$ و $y$ على الترتيب، ونكتب

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\quad,\quad f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

نلاحظ في تعريف $f_x(x,y)$ أن المتغير $y$ يكون ثابتاً ، ولهذا لإيجاد $f_x(x,y)$ نعتـــبر $y$ ثابتـــاً ونشتق الدالة $f$ بالنسبة للمتغير $x$ . أما في تعريف $f_y(x,y)$ فإن المتغير $x$ يكون ثابتاً وبالتـــالي لحساب $f_y(x,y)$ نعتبر $x$ ثابتاً ، ونشتق الدالة $f$ بالنسبة للمتغير $y$ .

**(١-٨-٣) تعريف**

لتكن $f$ دالة في ثلاثة متغيراتِ $(x, y, z)$ . نعرّف $f_x(x, y, z)$ على النحو التالي :

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_y(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة .

**مثال**

أوجد باستخدام التعريف، كلاً من $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ للدالة التالية :

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2$$

**الحل**

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-2y(x+h)+y^2-(3x^2-2xy+y^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3h^2+6xh-2xy-2yh+y^2-3x^2+2xy-y^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-2yh}{h}=\lim_{h\to 0}(6x+3h-2y)$$

$$=6x-2y$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2-2x(y+h)+(y+h)^2-(3x^2-2xy+y^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2-2xy-2xh+y^2+h^2+2hy-3x^2+2xy-y^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh+h^2+2hy}{h}=\lim_{h\to 0}(-2x+h+2y)=-2x+2y$$

## القواعد الجبرية في الاشتقاق الجزئي :

إن قواعد الاشتقاق والتي تمت دراستها في حالة دوال في متغير واحد يمكن اســـتخدامها في حالة المشتقات الجزئية لدوال في عدة متغيرات ، ولنذكر بعض هذه القواعد . فإذا كانـــت $f$ و $g$ دالتين في المتغيرين $x$ و $y$ ، وكانت المشتقات الجزئية الأولى لكل من $f$ و $g$ موجـــودة عنـــد $(x, y)$ فإن :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+g)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f-g)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f.g)(x,y)=g(x,y).\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+f(x,y).\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad (٣)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f/g)(x,y)=\frac{g(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{(g(x,y))^2} \quad (٤)$$

بشرط أن يكون $g(x,y)\neq 0$ .

$$\frac{\partial}{\partial x}(Cf)(x,y)=C\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad (٥)$$

لأي عدد ثابت $C$ .

(٦) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y)\right)^m=m\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y)\right)^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ لكل عدد كسري $m$ ، بشرط أن يكون لطرفي العلاقة الأخيرة معنى .

بالمثل إذا كانت $f$ و $g$ دالتين في ثلاثة متغيرات وكانت مشتقاتها الجزئية الأولى موجودة عند $(x,y,z)$ ، فإن لدينا قواعد مماثلة للقواعد (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦) .

## مثال

إذا كانت $f(x,y)=xe^{y^2}+\ln(x^2+y^2+1)$

أوجد $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ .

## الحل

$$f_x(x,y)=e^{y^2}+\frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

$$f_y(x,y)=2xye^{y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

## مثال

إذا كانت $w = f(x, y, z) = x\sin(y + 3z)$ . أوجد كلا من $f_x$ و $f_y$ و $f_z$ .

## الحل

لحساب $f_x$ ، نــــشتق $f$ بالنـــسبة للمـــتغير $x$ علـــى اعتبـــار أن $y$ و $z$ ثابتـــان فنجـــد أن $f_x(x, y, z) = \sin(y + 3z)$ وبالمثل نحسب $f_y$ ، وذلك باشتقاق $f$ بالنسبة للمـــتغير $x$ مـــع تثبيت كل من $x$ و $y$ فنجد أن : $f_y(x, y, z) = x\cos(y + 3z)$ وبالمثل نحسب $f_z$ التي تنتج من اشتقاق $f$ بالنسبة للمتغير $z$ مع تثبيت كل من $x$ و $y$ ويكون لدينا :

$$f_z(x, y, z) = 3x\cos(y + 3z)$$

## مثال

لتكن $f(x,y,z) = x\ln(xy) + e^{xyz}$ . أوجد المشتقات الجزئية للدالة $f$ .

## الحل

$$f_x(x,y,z) = \ln(xy) + 1 + yze^{xyz}$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{x}{y} + xze^{xyz} \text{ ،}$$

$$f_z(x,y,z) = xye^{xyz}$$

**مثال**

أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة $f(x,y,z)=\dfrac{x^2-y^2}{2+\sin(4z)}$

**الحل**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2x(2+\sin(4z))-0(x^2-y^2)}{(2+\sin(4z))^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2x}{2+\sin(4z)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-2y(2+\sin(4z)-0(x^2-y^2)}{(2+\sin(4z))^2}=\frac{-2y}{2+\sin(4z)}$$

## مثال

أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة $f(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}$

## الحل

نضع $w=(x^2+y^2+1)^{x+y}$

ومنه فإن $\ln w=(x+y)\ln(x^2+y^2+1)$

إذاً باشتقاق الطرفين جزئياً بالنسبة للمتغير $x$ نجد أن :

$$\frac{w_x}{w}(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}$$

ومنه فإن

$$w_x(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}\left[\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}\right]$$

ومنه فإن

$$w_x(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}\left[\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}\right]$$

وبنفس الطريقة نبرهن على أن

$$w_y(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}\left[\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2y(x+y)}{x^2+y^2+1}\right]$$

## المشتقات الجزئية من رتب عليا :

إذا كانت $f$ دالة في متغيرين $x$ و $y$ ، فإن $f_x$ و $f_y$ أيضا دوال في متغيرين، فإذا كانت لها مشتقات جزئية أولى فإنها تسمى المشتقات الجزئية الثانية للدالة $f$ ونرمز لها بالرموز :

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**مثال**

إذا كانت $f(x,y)=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$ ولتكن $(x,y)$ نقطة من نطاق الدالة . احسب المشتقات الجزئية $f_{xy}$ , $f_{yx}$, $f_{xx}$, $f_{yy}$ للدالة $f$.

**الحل**

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2e^{-2y}-y^{-2}\sin(x)$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=6xe^{-2y}-y^{-2}\cos(x)$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=-6x^2e^{-2y}+2y^{-3}\sin(x)$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)=-2x^3e^{-2y}-2y^{-3}\cos(x)$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=4x^3e^{-2y}+6y^{-4}\cos(x)$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=-6x^2e^{-2y}+2y^{-3}\sin(x)$$

**مثال**

لتكن $f$ دالة في المتغيرين $x$ و $y$ معرّفة على النحو الآتي :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^5}{x^4+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ .

**الحل**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

الآن عندما تكون $(x, y) \neq (0,0)$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^5(x^4 + y^4) - 4x^4y^5}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{y^9 - 3x^4y^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5xy^4(x^4 + y^4) - 4xy^8}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{5x^5y^4 - xy^8}{(x^4 + y^4)^2}$$

بالتالي

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^9 - 3x^4y^5}{(x^4 + y^4)^2} & ; \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5x^5y^4 - xy^8}{(x^4 + y^4)^2} & ; \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

ومنه فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

كما أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h-0}{h}\right)=1$$

**نظرية (١-٨-٦)**

لتكن $f$ دالة في المتغيرين $y, x$ معرّفة على قرص $D$ مركـــزه $(a,b)$. لنفـــرض أن $f_{xy}$ و $f_{yx}$ متصلتان عند النقطة $(a,b)$ . فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

**مثال**

لتكن $f(x,y)=x^{c}e^{-y/x}$ ، حيث $x\neq 0$ . أوجد قيمة العدد $c$ ، لكي تتحقق صحة العلاقة التالية :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (١٠)$$

**الحل**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=c.x^{c-1}e^{-y/x}+x^{c-2}ye^{-y/x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x^{c-1}e^{-y/x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=+x^{c-2}e^{-y/x}$$

ومنه فإن العلاقة (١٠) تؤدي إلى أن

$$(c+1)x^{c-1}e^{-y/x}=0$$

وعندئذ فالعلاقة (١٠) تكون متحققة عندما تكون $c=-1$ .

## • قاعدة السلسلة

**نظرية (١-١٢-٢)**

لنفرض أن $w=f(x,y)$ دالة في متغيرين $x$ و $y$ وأن $w$ قابلة للتفاضل عند $(x,y)$ . فإذا كانت $x=F(u,v)$ و $y=G(u,v)$ وكانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial x}{\partial u}$ ، $\frac{\partial x}{\partial v}$ ، $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، $\frac{\partial y}{\partial v}$ موجودة عند $(u,v)$ . فإن $w$ دالة في المتغيرين $u$ و $v$ كما أن كلاً من $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ موجودة عند $(u,v)$ وبالإضافة إلى ذلك لدينا :

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (٥)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (٦)$$

**نظرية (١-١٢-٣)**

لتكن $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دالة في المتغيرات $x_1, \ldots, x_n$ ، ولنفرض أن $w$ قابلة للتفاضل عند $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، وأن $x_i = g_i(u_1, u_2, \ldots u_m)$ لكل $i = 1, \ldots, n$ هي دالة في المتغيرات $u_1, \ldots, u_m$ وأن $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ لكل $j = 1,2,\ldots,m$ ، $i = 1,2,\ldots,n$ موجودة عند $(u_1, \ldots, u_m)$ فإن $w$ دالة في $(u_1, \ldots, u_m)$ وأن

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial u_m} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_m} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_m}$$

**مثال**

إذا كانت $w = x^2 + 2xy + y^2$ وكانت $x = t\cos t, y = t\sin t$ ، فأوجد $\dfrac{dw}{dt}$ .

**الحل** باستخدام قاعدة السلسلة

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= (y + z)(0) + (x + z)(-r\sin t) + (x + y)(r\cos t)$$

$$= (r + r\sin t)(-r\sin t) + (r + r\cos t)(r\cos t)$$

$$= -r^2 \sin t - r^2 \sin^2 t + r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t$$

**مثال**

إذا كانت $w = f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ ، وكانت $x = re^s$ و $y = re^{-s}$ . احسب كلاً من

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$$

**الحل**

١) $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$ ، ولكن

$\dfrac{\partial x}{\partial r} = e^s$ , $\dfrac{\partial x}{\partial s} = re^s$ , $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ و

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} , \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s}$$

ومنه فإن $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} re^s + \dfrac{y}{y^2 + x^2}(-re^{-s}) = r\dfrac{xe^s - ye^{-s}}{x^2 + y^2}$

٢) $\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{xe^s + ye^{-s}}{x^2 + y^2}$ .

**مثال**

إذا كانت $w = xy + xz + yz$ ، وكانت $z = r\sin t \ , y = r\cos t \ , x = r$ ، فأوجد كلاً من $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial t}$

**الحل** نستخدم قاعدة السلسلة . فيكون لدينا

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (y+z)(1) + (x+z)(\cos t) + (x+y)(\sin t)$$

$$= r\cos t + r\sin t + r\cos t + r\sin t\cos t + r\sin t + r\cos t\sin t$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2r(\cos t + \sin t) + r\sin 2t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=(y+z)(0)+(x+z)(-r\sin t)+(x+y)(r\cos t)$$

$$=(r+r\sin t)(-r\sin t)+(r+r\cos t)(r\cos t)$$

$$=-r^2\sin t-r^2\sin^2 t+r^2\cos t+r^2\cos^2 t$$

$$=r^2(\cos^2 t-\sin^2 t)+r^2(\cos t-\sin t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=r^2(\cos t-\sin t)+r^2\cos 2t$$

**مثال** برهن على أن الدالة :

$$z = f\left(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3\right)$$

تحقق المعادلة الآتية

$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$ حيث إن $a$ و $b$ ثابتان .

**الحل**

لنفرض أن $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$ عندئذ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u).bx$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = -f'(u)ay^2$$

ومنه نجد

$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = (ay^2)(bx)f'(u) - (bx)(ay^2)f'(u) = 0$$

**مثال**

برهن على أن الدالة $z = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$

تحقق العلاقة الآتية $t\dfrac{\partial z}{\partial s} + s\dfrac{\partial z}{\partial t} = 0$

**الحل**

نفرض أن $x = s^2 - t^2$ ، $y = t^2 - s^2$ فيكون لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= z_x(2s) + z_y(-2s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = z_x(-2t) + z_y(2t)$$

$$t\frac{\partial z}{\partial s} + s\frac{\partial z}{\partial t} = z_x(2st) + z_y.(-2st) + z_x(-2ts) + z_y(2ts) = 0$$

**(١-١٢-٤) تعريف (الدوال الضمنية)**

(أ) يقال إن المعادلة $F(x,y)=0$ تعرّف دالة ضمنية $y=f(x)$ إذا تحقق أن $F(x,f(x))=0$ لكل $x$ في مجال $f$ .

(ب) يقال إن المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرّف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ إذا تحقق أن $F(x,y,f(x,y))=0$ لكل $(x,y)$ في مجال $f$ .

**مثال**

لنأخذ المعادلة $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ وهي تمثل معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 . من هذه المعادلة نجد أن $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ دالتين معرّفتين بجوار الصفر على الفترة $I=[-1,+1]$ بحيث أن $F(x,f_1(x))=0$ و $F(x,f_2(x))=0$ لكل $x\in I$ . بالتالي فإن $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ تعرف دالتان ضمنيتان $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ لكل $x\in I$ .

**نظرية (٥–١٢–١)**

إذا كانت المعادلة $F(x,y)=0$ تعرّف دالة ضمنية $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق وإذا كانت $F_y(x,y)\neq 0$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

**مثال**

إذا كانت المعادلة $y^4-5xy+3x^3+7x-4=0$ تعرف دالة ضمنية $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق. أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-5y+9x^2+7}{4y^3-5x}=\frac{5y-9x^2-7}{4y^3-5x}$$

**(١-١٢-٥) نظرية**

إذا كانت المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرّف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل وإذا كانت $F_z(x,y,z)\neq 0$ فإن

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

**مثال**

إذا كانت المعادلة $x-yz-\cos xyz-2=0$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل. أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

**الحل**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1+yz\sin xyz}{-y+xy\sin xyz}=\frac{1+yz\sin xyz}{y-xy\sin xyz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-z+xz\sin xyz}{-y+xy\sin xyz}=\frac{z-xz\sin xyz}{xy\sin xyz-y}$$

## تـــمــــارين

في التمارين من ١ - ٤ وباستخدام تعريف المشتقات الجزئية (١-٨-١) ، أوجد المشتقات الجزئية للدوال الآتية :

١) $f(x,y)=4x^2-3xy$ ، $f_x(x,y)$　　٢) $f(x,y)=xy^2-5y+6$ ، $f_y(x,y)$

٣) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $f_x(1,-1)$　　٤) $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2-y}$ ، $f_y(1,-2)$

في التمرينين ٥ و ٦ وباستخدام التعريف (١-٨-٣) أوجد المشتقات الجزئيـــة للـــدوال الآتية:

٥) $f(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$ ، $f_x(x,y,z)$

٦) $f(x,y,z,r,t)=xyr+yzt+yrt+zrt$ ، $f_r(x,y,z,r,t)$

في التمارين من ٧ – ١٣ أوجد المشتقات الجزئية للدوال الآتية :

٧) $f(x,y)=4y^3+\sqrt{x^2+y^2}$ ، $f_x(x,y)$

٨) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ ، $f_y(x,y)$

٩) $f(r,\theta)=r^2\cos\theta-2r\tan\theta$ ، $f_\theta(r,\theta)$

١٠) $z=e^{y/x}.\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ ، $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

١١) $u=\tan^{-1}(xyzw)$ ، $\dfrac{\partial u}{\partial w}$

١٢) $f(x,y,z)=4xyz+\ln(2xyz)$ ، $f_z(x,y,z)$

١٣) $f(x,y,z)=e^{xyz}+\tan^{-1}\left(\dfrac{3xy}{z^2}\right)$ ، $f_y(x,y,z)$

١٤) إذا كانت $f(x,y,z)=e^{xy^2}+\ln(y+z)$ . أوجد $f_x(3,0,17)$ ، $f_y(1,0,2)$ ، $f_z(0,0,1)$ .

## تـــمـــارين

١) إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق عند $u = x^2 + y^2$ ، برهن على أن الدالة :

$$z = xy + f(x^2 + y^2)$$

تحقق العلاقة

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

٢) إذا كانت $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، وكانت $x = e^{u+v}$ ، $y = e^{u-v}$ فاحسب باستخدام قاعدة السلسلة كلاً مما يلي

$$\frac{\partial f}{\partial u} \ ، \ \frac{\partial f}{\partial v} \ ، \ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \ ، \ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

٣) إذا كانت $z = f(x, y)$ ، وكانت $y = 2rs$ و $x = r^2 + s^2$ ، ولنفرض أن للدالة $f$ مشتقات $f$ الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة $(x, y)$ من نطاق $f$ فاحسب كلاً من $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial r}$ .

٤) إذا كانت $z = f(u, v)$ ، وكانت $u = xy$ ، $v = y/x$ ، ولنفرض أن $D$ هو نطاق $f$ وأن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f$ متصلة على $D$ . أثبت أن $z$ تحقق العلاقة الآتية :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}$$

في التمارين من ٥ - ١٠ أوجد المشتقات الجزئية والمرافقة لكل تمرين ، وذلك باستخدام قاعدة السلسلة .

٥) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$ ; $u = x^2 + xy \; ; \; x = r^2 + s^2 \; , \; y = 3r - 2s$

٦) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$ ; $u = \sin^{-1}(3x + y) \; ; \; x = r^2 e^s , y = \sin(rs)$

٧) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$ ; $x = rs \; ; \; y = r^2 - s^2 \; , \; z = (r - s)^2$

; $u = xxy + xz + yz$

٨) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$ ; $u = \cosh(y/x) \; ; \; x = 3r^2 s \; , \; y = r^2 - s^2$

٩) $u = xe^{-y}\ ;\ x = \tan^{-1}(rst)\ ,\ y = \ln(3rs + 5st)\ ;\ \dfrac{\partial u}{\partial r}$ ، $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ ، $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

١٠) $u = x^2 + y^2 + z^2\ ;\ x = r\sin\phi\cos\theta\ ,\ y = r\sin\phi\sin\theta\ ;\ z = r\cos\phi$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial \phi}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

١١) إذا كانت :

$$w = r^2 s + v^3 \tan t\ ;\ r = x^3 y z^2\ ,\ s = xe^{yz}\ ,\ v = x\cos y\ ,\ t = y\ln z$$

فأوجد كلاً من : $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ ، $\dfrac{\partial w}{\partial y}$