- إذا كانت f تحليلية على القرص $D(z_0,r)$ بحيث $|f(z)| \le |f(z_0)|$ لكل z في القرص، فأثبت أن f لا بد أن تكون ثابتة.

الحل:

لتكن $0 < d < r$

لتكن α_d هي الدائرة التي مركزها z_0 و نصف قطرها d في الاتجاه الموجب

من صيغة كوشي التكاملية لدينا:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_d} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + de^{it})}{de^{it}} (d i e^{it})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + de^{it})\, dt$$

$$\cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + de^{it})\, dt}$$

إذاً:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+de^{it})\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+de^{it})|\,dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt$$
$$= |f(z_0)|$$

إذاً

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+de^{it})|\,dt = |f(z_0)|$$

والذي معناه فيّ:

$$\int_0^{2\pi} \left(|f(z_0)| - |f(z_0+de^{it})|\right) dt = 0$$

بما أن $|f(z_0)| \geq |f(z_0+de^{it})|$ لكل $t \in [0,2\pi]$ وهي متصلة.
فمن التحليل الحقيقي:

$$|f(z_0)| = |f(z_0+de^{it})| \text{ لكل } t \in [0,2\pi]$$

أي $|f(z_0)| = |f(z)|$ لكل $|z_0 - z| = d$.

بما أن هذا صحيح لكل $0 \leq d < r$

فإن: $|f(z_0)| = |f(z)|$ لكل $z \in D(z_0,r)$.

(أي أن f ثابتة على القرص $D(z_0,r)$).