حل الإختبار الفصلي الثاني - الفصل الأول 1441 هـ 373 ريض

السؤال الأول

(١). $\delta(x,y)=d(f(x),f(y))\geq 0$،

$$\begin{aligned}\delta(x,y)=0 &\iff d(f(x),f(y))=0\\ &\iff f(x)=f(y) \iff x=y\end{aligned}$$

لأن الدالة f أحادية.

$$\begin{aligned}\delta(x,z) &= d(f(x),f(z))\leq d(f(x),f(y))+d(f(y),f(z))\\ &= \delta(x,y)+\delta(y,z).\end{aligned}$$

إذاً الدالة δ مترك على X.

(٢). بما أن الدالة $\ln$ أحادية على $(0,+\infty)$، فإن الدالة $d_1(x,y)=\mid \ln\frac{y}{x}\mid$ مترك على $(0,+\infty)$.

السؤال الثاني

(١). $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})=1$ **لأن كل عدد حقيقي هو نهاية لمتتالية من الأعداد الكسرية.**

(٢). $A^c=(-\infty,1)\cup_{n=1}^{\infty}(n,n+1)$ **و هو مفتوح**
و $B^c=(-\infty,\frac{3}{2})\cup_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2n},n+1+\frac{1}{2n+2})$ **و هو مفتوح.**

(٣). أوجد $A\cap B=\emptyset$ **و** $d(A,B)=0$.

السؤال الثالث

(١).

$$\begin{aligned}x\in\bar{A} &\iff \forall\varepsilon>0, B_d(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\\ &\iff d(x,A)\leq\varepsilon\end{aligned}$$

و هذا لكل ε. إذاً $d(x,A)=0$.

(٢). بما أن $A \subset \bar{A}$ فإن $d(x,\bar{A}) \leq d(x,A)$.

(٣). $d(x,A) = 0$ إلا و إذا لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in A$ بحيث $d(x_n,x) \leq \frac{1}{n}$. إذًا المتتالية $(x_n)_n \in A$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,x_n) = 0$.

(٤). لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $y_n \in A$ بحيث $d(x,A) \leq d(x,y_n) \leq d(x,A)+\frac{1}{n}$.
إذًا المتتالية $(y_n)_n \in A$ و $d(x,A) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x,y_n)$.