حل الإختبار الفصلي الثالث، الفصل الأول 1441 هـ 225 ريض

السؤال الأول

(١). $y = e^{-x^2}$، $y' = -2xe^{-x^2}$، $y'' = e^{-x^2}(-2+4x^2)$ و بالتالي فإن
$$y'' + 2xy' + 2y = e^{-x^2}(-2+4x^2-4x^2+2) = 0.$$

(٢). إذا كانت $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$، فإن $2xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n x^n$ و
$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

$$\begin{aligned} y'' + 2xy' + 2y &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n + 2a_n\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left((n+2)a_{n+2} + 2a_n\right)x^n. \end{aligned}$$

إذاً $a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n$.

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{-1}{n}a_{2(n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}a_0. \\ a_{2n+1} &= \frac{-2}{2n+1}a_{2n-1} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}a_1. \end{aligned}$$

الدوال التحليلية الحلول للمعادلة هي

$$y = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} + b\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$.

السؤال الثاني

(١). إذا كان $x=0$ فإن $y'(0)=0$.
و باشتقاق المعادلة نحصل على $4xy''' + 4y'' - 2y'' + 18xy' = 0$. إذا كان $x=0$ فإن $y''(0)=0$.

(٢). إذا كانت $y=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$، فإن $9x^2y=\sum_{n=2}^{+\infty} 9a_{n-2}x^n$

$2y'=\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n$ و $4xy''=\sum_{n=0}^{+\infty} 4n(n+1)a_{n+1}x^n$.

$a_1=a_2=0$.

$$\begin{aligned}4xy''-2y'+9x^2y &= 1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(4n(n+1)a_{n+1}-2(n+1)a_{n+1}+9a_{n-2}\right)x^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n+1)(4n-2)a_{n+1}+9a_{n-2}\right)x^n.\end{aligned}$$

إذاً $a_{3n+1}=a_{3n+2}=0$ و $a_{3n}=-\dfrac{a_{3(n-1)}}{2n(2n-1)}=\dfrac{(-1)^n}{2n!}$.

$$y_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}x^{3n}$$

(٣). بما أن $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}$، فإن $y_1=\cos(x^{\frac{3}{2}})$ لكل $x>0$.

(٤). $y_2=\sin(x^{\frac{3}{2}})$، $y_2'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\cos(x^{\frac{3}{2}})$، $y_2''=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}\cos(x^{\frac{3}{2}})-\dfrac{9}{4}x\sin(x^{\frac{3}{2}})$. و بالتالي فإن
$4xy_2''-2y_2'+9x^2y_2=3x^{\frac{1}{2}}\cos(x^{\frac{3}{2}})-9x^2\sin(x^{\frac{3}{2}})-3x^{\frac{1}{2}}\cos(x^{\frac{3}{2}})+9x^2\sin(x^{\frac{3}{2}})=0$.

السؤال الثالث

(١). $|A-\lambda I|=(1-\lambda)^2+i$. إذاً القيم المميزة هي: $1\pm \mathrm{i}$.
المتجه المميز للمصفوفة بالنسبة للقيمة المميزة $1+\mathrm{i}$ هو
$X_1=\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.
حلول التظام الخطي هي: $X=e^t\left(a\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+ba\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}\right)$
و بما أن $X(0)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. فإن $X=e^t\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t\\ 2\sin t+\cos t\end{pmatrix}$.

(٢). باستعمال تحويل لابلاص نحصل على:

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(x) - 2 & = & \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) \\ s\mathcal{L}(y) - 1 & = & \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \end{cases}$$

إذاً

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2(s-1)-1}{(s-1)^2+1}, \qquad \mathcal{L}(y) = \frac{(s-1)+2}{(s-1)^2+1}$$

و

$$x = e^t(2\cos t - \sin t), \qquad y = e^t(\cos t + 2\sin t).$$