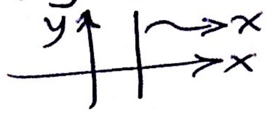
اسئلة (تحليل مركب):

① جد صورة المستقيم $x=1$ تحت تأثير كل من الدالتين $f(z)=z^2$ أو $f(z)=e^z$

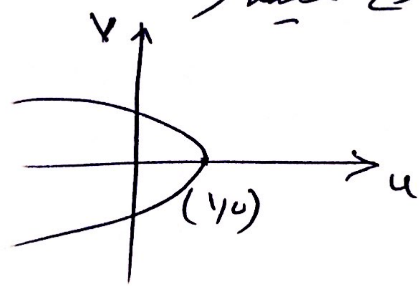
الحل: صورة $x=1$ بتأثير $f(z)=z^2$:

$x=1 \Rightarrow z=1+i.y \Rightarrow$



$$f(z)=f(1+iy)$$
$$=(1+iy)^2 = 1-y^2+2yi$$
$$= u(x,y)+v(x,y)\cdot i \Rightarrow u(x,y)=1-y^2$$
$$v(x,y)=2y$$
$$v/2 = y$$
$$\Rightarrow u = 1-\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1-\frac{v^2}{4}$$
$$u-1 = -\frac{(v-0)^2}{4}$$

قطع مكافئ رأسه $(1,0)$ ومفتوح لليسار

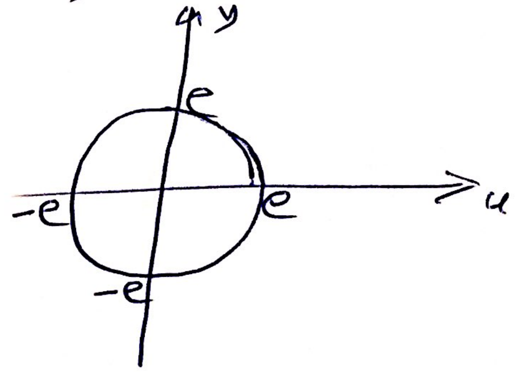


صورة $x=1$ بتأثير $f(z)=e^z$:

$x=1 \Rightarrow z=1+iy \Rightarrow$

$$f(z)=f(1+iy)$$
$$=e^{1+iy} = e\cdot e^{iy} = e(\cos y + i\sin y) \quad \text{(أويلر)}$$
$$= e\cos y + i\cdot e\sin y = u(x,y)+i\,v(x,y)$$
$$\Rightarrow u(x,y)=e\cos y \text{ and } v(x,y)=e\sin y$$
$$\Rightarrow u^2+v^2 = e^2(\cos^2 y+\sin^2 y) = e^2\cdot 1 = e^2$$

$u^2+v^2=e^2$ دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها e

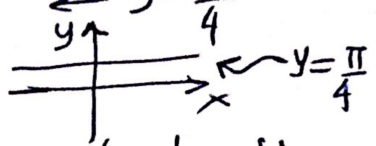


Scanned by CamScanner

٢) جد صورة كل من المستقيمين $y=\frac{\pi}{4}$ وَ $x=-1$ تحت تأثير الدالة $f(z)=e^{z}$ مع الشرح

الحل: صورة $y=\frac{\pi}{4}$ بتأثير $f(z)=e^{z}$:

$$y=\frac{\pi}{4} \Leftarrow z=x+i\cdot\frac{\pi}{4} \Leftarrow$$



$$f(z)=f\left(x+i\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=e^{x+i\cdot\frac{\pi}{4}}=e^{x}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{x}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

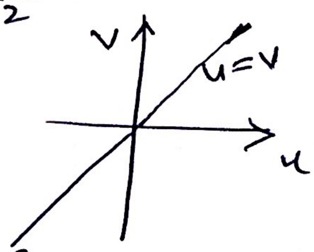
(أويلر)

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{x}\cdot i$$

$$=u(x,y)+v(x,y)\cdot i$$

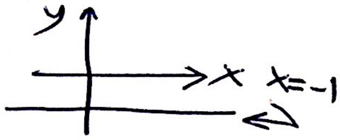
$\Rightarrow u=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{x}$ and $v=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{x}$

$\Rightarrow u=v$



صورة $x=-1$ بتأثير $f(z)=e^{z}$:

$$x=-1 \Leftarrow z=-1+i\cdot y \Leftarrow$$



$$f(z)=f(-1+i\cdot y)$$

$$=e^{-1+iy}=e^{-1}\cdot e^{iy}=e^{-1}(\cos y+i\sin y)$$

(أويلر)

$$=e^{-1}\cos y+e^{-1}\sin y\cdot i$$

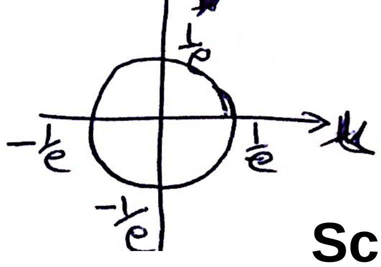
$$=u(x,y)+v(x,y)\cdot i$$

$\Rightarrow u=e^{-1}\cos y$ and $v=e^{-1}\sin y$

$$\Rightarrow u^{2}+v^{2}=e^{-2}(\cos^{2}y+\sin^{2}y)=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$$

$$\Rightarrow (u-0)^{2}+(v-0)^{2}=\frac{1}{e^{2}}$$

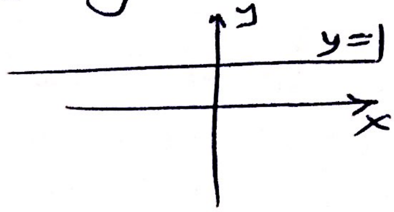
دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{e}$



٣) جد صورة المستقيم $y = 1$ تحت تأثير الدالة $f(z)=z^2$ مبيناً خطواتك :

الحل :

$$\Leftarrow z = x + 1 \cdot i \leftarrow y = 1$$



$$f(z) = f(x+i)$$

$$= (x+i)^2 = x^2 - 1 + 2x \cdot i$$

$$= u(x,y) + v(x,y) i$$

$$\Rightarrow u = x^2 - 1 \quad \text{and} \quad v = 2x$$

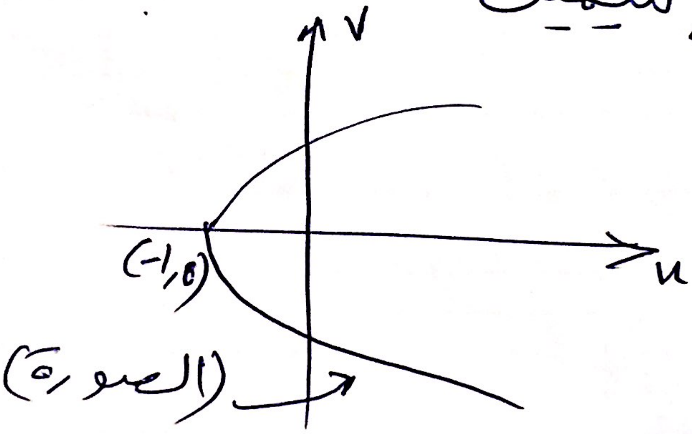
$$\frac{v}{2} = x$$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} v^2 - 1$$

$$u + 1 = \frac{1}{4}(v - 0)^2$$

$$u - (-1) = \frac{1}{4}(v-0)^2$$

قطع مكافئ رأسه $(-1,0)$ ومفتوح لليمين



العكس

أثبت أن الدالة $f(z)=\begin{cases} \bar{z}^2/z & ; z\neq 0 \\ 0 & ; z=0 \end{cases}$

غير قابلة للاشتقاق عند $z=0$

الحل :

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2/z-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z^2}\quad\cdots(*)$$

نأخذ مسارين يمران بـ $z=(0,0)$

الأول : $y=0$ (محور x) : $\Leftarrow$ $z=x$ و $\bar{z}=x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1$$

الثاني : $y=x$: $\Leftarrow$ $z=x+ix$ $\Leftarrow$ $\bar{z}=x-ix$

$z^2=2x^2 i$ و $(\bar{z})^2=-2x^2 i$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2 i}{2x^2 i}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$$

النهايتان مختلفتان $\Leftarrow$ النهاية في $(*)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ $f'(0)$ غير موجودة