جامعة الملك سعود | الاختبار النهائي في المقرر 131 ريض
كلية العلوم
قسم الرياضيات | الزمن : ثلاث ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) انف التقرير الآتي وعين قيمة صوابه بعد النفي :

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}^+ \ni x \nmid y \ \wedge \ y \nmid x$$

(ب) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي ما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : n < 2^n$$

(ج) استفد من الفقرة (ب) في برهان صحة العبارة الآتية :

$$S \text{ مجموعة منتهية } \Longrightarrow |S| < |P(S)|$$

السؤال الثاني :

(أ) أعط مثالاً واحداً <u>فقط</u> لكل مما يأتي :

1) زمرة غير إبدالية

2) زمرة دائرية ضربية رتبتها 22 .

3) حقل منته F بحيث $|F| > 20$.

4) تطبيقاً $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بحيث يكون متبايناً وغير غامر .

(ب) إذا كانت R علاقة معرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$$\forall a . b \in \mathbb{R}^+ : aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^+$ ، ومن ثم جد صنف تكافؤ العدد *1* .

(ج) املأ الفراغ الآتي :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,6\,2\,3\,1 \end{pmatrix} \in S_6 \Longrightarrow |\sigma| = \cdots$$

السؤال الثالث :

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

1) إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا فإن $f^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$.

2) إن علاقة قاسم لـ "|" على $\mathbb{Z}^*$ ليست علاقة تخالفيه .

3) يوجد عنصر محايد في النظام $(\mathbb{Q}, *)$ ، حيث $x * y = xy + 1$ لكل $x, y \in \mathbb{Q}$.

4) إن $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \nRightarrow \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

(ب) ليكن $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ تطبيقاً ، حيث $f(x) = x^{-1}$ ، أجب عما يلي :

1) املأ الفراغ $\cdots = \mathrm{x}^{-1}$.

2) أثبت أن f تشاكل .

3) عيّن نواة f (أي $\ker f$).

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن *S* مجموعة غير منتهية ؟

(ب) إذا كان $f : D \to \mathbb{Z}^+$ تطبيقاً قاعدته $f(x) = \frac{x+1}{2}$ ، حيث D مجموعة الأعداد الفردية الموجبة فأجب عما يلي :

1) أثبت أن f تقابل .

2) أثبت أن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة غير منتهية مستفيداً من (أ) وَ (ب) .

3) عيّن قاعدة التطبيق f^{-1} من $\mathbb{Z}^+$ إلى D .

4) هل $|\mathrm{D}| = |\mathbb{Z}^+|$ ؟ ولماذا ؟

جامعة الملك سعود — الاختبار الفصلي الثاني في المقرر 131 ريض
كلية العلوم
قسم الرياضيات — الزمن : ساعة ونصف

<u>أجب عن الأسئلة الآتية</u>

السؤال الأول :

أثبت صحة أوْ خطأ كل عبارة فيما يلي :

(أ) إن $(\mathbb{R}\,,\ *)$ نظام مغلق ، حيث $a * b = a^b$ لكل $a\,, b\ \in \mathbb{R}$.

(ب) إذا كان العنصران $\overline{2}$ وَ $\overline{6}$ في النظام $(\mathbb{Z}_9\,, \odot)$ فإن لكل منهما نظير ضربي .

(ج) أي مجموعتين غير منتهيتين وقابلتين للعد تكونان متكافئتين .

(د) إن النظام $(P(S), \cup\,, -)$ ذو عمليتين فيه " $-$ " تتوزع على " $\cup$ " .

السؤال الثاني :

(أ) أعط مثالاً واحداً <u>فقط</u> لزمرة ضربية رتبتها 46 .

(ب) متى نقول عن مجموعة S إنها غير منتهية ؟
و إذا كانت $A = \{4, 6, 8, \ldots\}$ فأثبت أن A مجموعة غير منتهية .

(ج) إذا كان $f : (\mathbb{Z}\,, +) \to (\mathbb{Z}_8\,, \oplus)$ تطبيقاً ، حيث : $f(x) = \overline{x}$
فأثبت أن f تشاكل (هومومورفيزم) غير متباين .

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الأول في المقرر 131 ريض

الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) أكمل الفراغات الآتية :

1) $\sim \left[\forall\ a \in \mathbb{R} :\ a^2 - 2a + 1 \geq 0\right] \equiv \cdots$

2) $\mathbb{R}^5 = \{\ldots\ldots\ldots\}$

3) **إذا كانت A و B مجموعتين بحيث $|A| = 4$ و $|B| = 3$ فإن $|P(A \times B)| = \cdots$**

4) **نقول إن R علاقة ترتيب كلي على مجموعة S إذا حققت الشروط الآتية : ....**

(ب) أثبت صحة أوْ خطأ كل عبارة فيما يأتي :

1) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{Q}^4$

2) **إذا كان x عددا أوليا فإن $x \notin 2\mathbb{Z}^+$**

3) **إذا كان $\overline{3} \in \mathbb{Z}_7$ فإن $-25 \in \overline{3}$**

4) **إذا كانت R علاقة تكافؤ في A وكان $y \in A$ فإن $\overline{y} \neq \emptyset$**

السؤال الثاني :

(أ) متى نقول عن مجموعتين A و B إنهما منفصلتان ؟

(ب) استخدم جداول الانتماء في إثبات صحة ما يلي :
لأي مجموعتين A و B فأن : $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(ج) إذا كانت $P = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$ تجزئة لمجموعة S فأكمل الآتي :

1) $S = \{\ldots\ldots\ldots\}$

2) **إذا كانت R هي علاقة التكافؤ الناتجة عن التجزئة P فإن : .... = R**

(د) إذا كانت R علاقة تكافؤ في A وكان $aRb \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$ فأثبت أن :
$b \in \overline{a} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$

إجابة السؤال الأول :

(أ) : النفي هو $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}^+ : x|y \;\;\vee\;\; y|x$ وقيمة صوابه هي F .

(ب) :

1) عندما n=1 نجد أن الطرف الأيسر =1 والطرف الأيمن =2 لذا فإن التقرير صائب عندما n=1 .

2) عندما $n = K$ نفرض أن $K < 2^K$ صائب ونثبت أن هذا يقتضي كون التقرير صائب عندما تكون $n = K + 1$ كما يلي : $K < 2^K \Rightarrow K + 1 < 2^K + 1 \Rightarrow K + 1 < 2^K \cdot 2 \Rightarrow K + 1 < 2^{K+1}$.

(ج) : عندما تكون S منتهية فإن $|S| = n$ وحينئذ يكون $|P(S)| = 2^{\mathrm{n}}$ (نظرية) وباستخدام فقرة (ب) يكون لدينا $|S| = n < 2^{\mathrm{n}} = |P(S)|$. كما أن هذا صحيح عندما تكون $S = \emptyset$ ، لأن $|S| = 0 < 2^0 = 1$.

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : 1) S_3 2) $(\mathbb{Z}_{23}^*, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$ 4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ، حيث $f(x) = 2x$

(ب) :

1) R انعكاسية ، لأن : $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow aRa$

2) R تناظرية ، لأن : $a, b \in \mathbb{R}^+ \ni aRb \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow bRa$

3) R متعدية ، لأن :

$$a, b, c \in \mathbb{R}^+ \ni aRb \wedge bRc \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow aRc$$

إذن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^+$ ويكون :

$$\bar{1} = [1] = \left\{x \in \mathbb{R}^+ :\; xR1 \Leftrightarrow \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}^+\right\} = \mathbb{Q}^+$$

(ج) : $|\sigma| = 4$.

إجابة السؤال الثالث :

(أ) :

1) عبارة خاطئة ، لأن $f^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$ يقتضي وجود $x \in A$ بحيث $f(x) \notin B$ وهذا يتناقض مع كون f تطبيق .

2) عبارة صائبة ، فمثلا : $(2| -2) \;\;\wedge\;\; (-2|2) \not\Rightarrow 2 = -2$.

3) عبارة خاطئة ، لأنه بفرض $e \in \mathbb{Q}$ عنصر محايد يكون لدينا :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} : x * e = x = xe + 1 \Rightarrow xe = x - 1 \Rightarrow e = \frac{x-1}{x} \notin \mathbb{Q} \qquad (\text{عندما } x = 0)$$

4) عبارة صائبة ، فمثلاً $(2, 3) \in \mathbb{Z}^2$ ولكن $(2, 3) \notin \mathbb{R}^3$.

(ب) :

1) $\mathrm{x}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{x}}$

2) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* : f(xy) = (xy)^{-1} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = f(x)f(y)$

3) $\text{نواة } f = \ker f = f^{-1}(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1\right\} = \{1\}$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : إذا كانت S تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها .

(ب) :

1) f متباين ، لأن : $x, y \in D \ni f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = y$

f غامر ، لأن : $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \exists\, x = 2y - 1 \in D \ni f(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{(2y-1)+1}{2} = y$

مما تقدم نجد أن f تقابل .

2) من (1) نجد أن $D \approx \mathbb{Z}^+$ مع كون $D \subset \mathbb{Z}^+$ و بالتالي فإن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة غير منتهية .

3) $f^{-1} :\; \mathbb{Z}^+ \to D$ قاعدته هي $f^{-1}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - 1$.

4) نعم ، لأن $D \approx \mathbb{Z}^+$ من (1) $\Leftrightarrow |D| = |\mathbb{Z}^+|$.

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الثاني في المقرر131ريض

إجابة السؤال الأول :

(أ) : عبارة خاطئة ، فمثلا : $\mathbb{R} \notin \sqrt{-1} = {-1}^{1/2} = -1 * {1}/{2}$

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن $\overline{2}$ **في** $\mathbb{Z}_9$ **له نظير ضربي هو** $\overline{5}$ **في حين أن** $\overline{6}$ **ليس له نظير ضربي في** $\mathbb{Z}_9$ **،**
لأن $(6,9) \neq 1$ **.**

(ج) : عبارة صائبة ، لأنه بفرض أن H و K مجموعتان غير منتهيتين وقابلتين للعد يكون لدينا :

$\boldsymbol{H} \approx \mathbb{Z}^{+} \wedge \boldsymbol{K} \approx \mathbb{Z}^{+}$ (تعريفا)

$\Rightarrow \boldsymbol{H} \approx \mathbb{Z}^{+} \wedge \mathbb{Z}^{+} \approx \boldsymbol{K}$ (لأن $\approx$ تناظرية)

$\Rightarrow \boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{K}$ (لأن $\approx$ متعدية)

(د) : عبارة خاطئة ، لأن " $-$ " لا تتوزع من اليسار على " $\cup$ " في النظام $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}), \cup, -)$ كما يلي :

$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}) \Rightarrow \mathbf{A_1} - (\mathbf{A_2} \cup \mathbf{A_3}) = \mathbf{A_1} \cap (\mathbf{A_2} \cup \mathbf{A_3})'$ ——— (نظرية)

$= \mathbf{A_1} \cap (\mathbf{A_2}' \cap \mathbf{A_3}')$ ——— (قانونا دومورجان)

$= (\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2}') \cap (\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_3}')$ ——— (خاصة التوزيع)

$= (\mathbf{A_1} - \mathbf{A_2}) \cap (\mathbf{A_1} - \mathbf{A_3})$ ——— (نظرية)

$\neq (\mathbf{A_1} - \mathbf{A_2}) \cup (\mathbf{A_1} - \mathbf{A_3})$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : $\mathbb{Z}_{47}^{*}$ **.**

(ب) : إذا كانت $\boldsymbol{S} \approx \boldsymbol{D}$ **، حيث** $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{S}$ **.**
لتكن $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \ldots\} \subset \boldsymbol{A} = \{\mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \ldots\}$
ولنعرف التطبيق $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ **بالقانون** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mathbf{2}$
إن $\boldsymbol{f}$ **غامر لأن :**

$$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \mathbf{2} \in \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mathbf{2} = (\boldsymbol{y} - \mathbf{2}) + \mathbf{2} = \boldsymbol{y}$$

كما أن $\boldsymbol{f}$ **متباين ، لأن :**

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A} \ni \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{x} + \mathbf{2} = \boldsymbol{y} + \mathbf{2} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

مما تقد نجد أن $\boldsymbol{f}$ **تقابل وبالتالي فإن :** $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$ **ومنه تكون** $\boldsymbol{A}$ **غير منتهية .**

(ج) : إذا كان $\boldsymbol{f} : (\mathbb{Z}, +) \to (\overline{\mathbb{Z}}_8, \oplus)$ **تطبيقاً ، حيث :** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}}$ **فإن** $\boldsymbol{f}$ **تشاكل لأنه :**

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z} :\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{x}} \oplus \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

كما أن $\boldsymbol{f}$ **تطبيق غير متباين ، فمثلا :**

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{8}) = \overline{\mathbf{0}} \nRightarrow \mathbf{0} = \mathbf{8}$$

مما سبق نجد أن $\boldsymbol{f}$ **تشاكل غير متباين .**

إجابة أسئلة الاختبار الفصلي الأول في المقرر131ريض

إجابة السؤال الأول :

(أ) :

1) $\sim [\forall\ a \in \mathbb{R} :\ a^2 - 2a + 1 \geq 0] \equiv \exists\, a \in \mathbb{R} \ni a^2 - 2a + 1 < 0$

2) $\mathbb{R}^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) :\ x_i \in \mathbb{R}, \forall\, i\}$

3) $|A| = 4\ \wedge |B| = 3 \Rightarrow\ |P(A \times B)| = 2^{12}$

4) **نقول إن R علاقة ترتيب كلي على مجموعة S إذا حققت الشروط الآتية :**
R انعكاسية وتخالفية ومتعدية بالإضافة للشرط الآتي :
$\forall\, x, y \in S : xRy \vee yRx$

(ب) :

1) **عبارة خاطئة ، فمثلا :** $(1,2) \in \mathbb{Z}^2 \nRightarrow (1,2) \in \mathbb{Q}^4$

2) **عبارة خاطئة لأن 2 عدد أولي و** $2 \in 2\mathbb{Z}^+$

3) **عبارة صائبة لأن :**
$-25 \equiv\ 3(mod\ 7) \Leftrightarrow -25 - 3 = -28 = (-4) \times 7$

4) **عبارة صائبة لأن :**
$y \in A \Rightarrow yRy \quad (\text{لأن } R \text{ انعكاسية}) \Rightarrow y \in \bar{y} \quad$ **(تعريف $\bar{y}$)**
$\Rightarrow \bar{y} \neq \emptyset$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : نقول إن المجموعتين A و B منفصلتان $\Leftrightarrow\ A \cap B = \emptyset$.

(ب) :

A	B	$A \triangle B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \cup B - A \cap B$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

من العامودين الثالث والسادس يتم برهان التساوي .

(ج) :

3) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4) $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)$
$, (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

(د) : R علاقة تكافؤ في A و $aRb \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ ، إن :

أولا : إثبات أن : $b \in \bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

(معطى) ——— $b \in \bar{a} \Rightarrow bRa \ \ (\text{تعريف } \bar{a}) \Rightarrow aRb\ (\text{تناظرية } R) \ \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

ثانيا : إثبات أن : $\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow b \in \bar{a}$

(لأن $\bar{a} = \bar{b}$ معطى) ——— $bRb\ \ (\text{انعكاسية} R) \Rightarrow b \in \bar{b}$ ——— $(\text{تعريف } \bar{b}) \ \Rightarrow b \in \bar{a}$

من أولا وثانيا نجد أن : $b \in \bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.
