

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

إذا كانت  $g = (g_1, g_2, g_3) \in G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^* \times S_{12}$  ، حيث :  
 $g_1 = 2$  ،  $g_2 = 5$  و  $g_3 = \sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6)(6, 5, 4, 3)(7, 9, 11, 12)(8, 10)$   
فأجب عما يلي :-  
(أ) املاً الفراغات الآتية :-

$$\begin{aligned} 1) |g_1| = \dots & \quad 2) |g_2| = \dots & \quad 3) |\sigma| = \dots & \quad 4) |g| = \dots & \quad 5) e = \dots \\ 6) g^{-1} = \dots & \quad 7) \langle \sigma \rangle \cong \dots & \quad 8) \langle g \rangle \cong \dots & \quad 9) \text{Aut}(\langle g \rangle) \cong \dots & \quad 10) \sigma \dots \mathbb{A}_{12} \\ 11) |N_{S_{12}}(\sigma)| = \dots & & & & \quad 12) \sigma \text{ عدد مرافقات} = C_\sigma = \dots \end{aligned}$$

(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

- 1) يوجد تشاكل  $\varphi : S_{12} \rightarrow S_{12}$  ، حيث  $\varphi(\alpha) = \alpha^{-1}$  .
- 2) لا يوجد  $\mu \in S_{12}$  ، حيث  $|\mu| = 52$  .
- 3) توجد زمرة جزئية في  $G$  رتبته 125 .
- 4) إن  $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^* \cong \mathbb{Z}_{80}$  .

السؤال الثاني :

(أ) إذا عرفنا التماثل " $\cong$ " على مجموعة من الزمر  $M$  فأثبت أنها علاقة تكافؤ في  $M$  .  
(ب) إذا عرفنا العلاقة " $\cong$ " على  $L$  ، حيث :

$$L = \{G : G \text{ زمرة رتبته } 12\}$$

(ج) أثبت أن  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$  ، وذلك بتوظيف العبارة : " أي زميرتين دائريتين منتهيتين ولهما الرتبة نفسها فهما متماثلتان " .

السؤال الثالث :

(أ) لتكن  $\sigma_i \in G = S_4$  هي ممثلات أصناف الترافق في  $G$  . أجب عما يأتي :

- 1) أكمل الفراغات :
- 2) عيّن جميع القيم  $|N_G(\sigma_i)|$  ومن ثم اكتب معادلة الفصل للزمرة  $G$  .
- (ب) إذا كانت  $G$  زمرة بسيطة رتبته 168 فأثبت أن  $G$  لا تملك زمرة جزئية  $H$  رتبته 28 .
- (ج) وظف فقرة (ب) في اثبات أن " عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيحة " .

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن الزمرة  $G$  تؤثر على مجموعة  $S$   $(G|S)$  ؟

(ب) إذا كانت  $G$  زمرة منتهية وكانت  $S$  زمر سيلو الجزئية من النوع  $P$  في  $G$  فأثبت أن :

$$1) \quad G|S \text{ بالترافق}$$

$$2) \quad |S| = s_p |G|$$

(ج) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة  $G$  رتبته 36 .

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) عرف كلاً من الرمزيتين كمجموعة :  $Aut(G)$  ،  $I(G)$  .

(ب) إذا كانت  $G$  زمرة إبدالية وفيها عنصر  $x$  ليس نظيراً لنفسه وعرّفنا التطبيق  $T : G \rightarrow G$  كما يلي :

$$g T = g^{-1} \quad \text{فأثبت أن :}$$

$$T \in Aut(G) \quad (1)$$

$$|Aut(G)| > 1 \quad (2)$$

السؤال الثاني :

لتكن  $G|_S$  و  $K \leq G$  ، حيث :

$$S = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$G = A_4 = \{(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 3, 4), \dots\}$$

و  $K$  مكونة من العناصر الأربعة الأولى في  $G$  .

أجب عما يأتي :-

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

(1) يوجد  $\sigma \in G$  و  $\tau \in K$  بحيث  $\sigma^{-1} \tau \sigma \notin K$  .

(2) إذا كان  $\varphi \in K$  فإن  $N(\varphi) = K$  (مركز  $\varphi$  في  $K$  أو منظم  $\varphi$  في  $K$ ) .

(3) إذا كانت  $\mu = (1, 2, 3)$  فيوجد  $\alpha \in G$  بحيث  $\alpha^{-1} \mu \alpha = (1, 3, 2)$  .

(ب) أكمل عناصر  $G$  .

(ج) املأ الفراغات فيما يأتي :

$$1) \quad 4 \text{ مدار} = 4G = \{\dots | \dots\} = \{\dots\} \Rightarrow |4G| = \dots$$

$$2) \quad G_4 = \{\dots | \dots\} = \{\dots\} \Rightarrow |G_4| = \dots$$

$$3) \quad \sigma = (1, 2, 3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{\dots | \dots\} = \{\dots\} \Rightarrow |S_\sigma| = \dots$$

$$4) \quad x = 4 \Rightarrow [G : G_4] = \dots$$

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) متى نقول إن  $H \leq G$  ؟

(ب) إذا كانت  $A, B \leq G$  فأثبت أن  $AB \leq G$  إذا علمت أن  $AB \leq G$  :

السؤال الثاني :

لتكن  $G = GL(2, \mathbb{Z}_p)$  وليكن  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  تطبيقاً ، حيث  $\varphi(A) = \det A = |A|$

أجب عما يلي :

(أ) أثبت أن  $\varphi$  تشاكل .

(ب) أكمل الفراغات الآتية :

1)  $\mathbb{Z}_p^* = \dots$

2)  $(G, \cdot) = (\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \dots\dots\dots\}$

3)  $\varphi$  نواة =  $K_\varphi = \{\dots\dots\dots\}$

(ج) بفرض أن  $P = 3$  و  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in G$  املأ الفراغات :

$\mathbb{Z}_3 = \dots$  (1)

$|\langle M \rangle| = \dots$  (2)

السؤال الثالث :

أثبت صحة أو خطأ كل مما يلي :

(أ) يوجد عنصران مختلفان في  $G$  كل منهما نظير نفسه ، حيث  $|G| > 1$  .

(ب) توجد زمرة  $G$  و  $H, K \leq G$  بحيث :

$|G| = 24$  و  $|H| = 6$  و  $|K| = 8$  و  $|H \cap K| = 3$

إجابة السؤال الأول :

(أ)

$$\begin{aligned}
 & 1) |g_1| = 4 \quad 2) |g_2| = 5 \quad 3) |\sigma| = 12 \quad 4) |g| = 60 \quad 5) e = (0, 1, (1)) \\
 & 6) g^{-1} = (6, 9, \sigma^{-1} = (1, 6, 2)(7, 12, 11, 9)(8, 10) \underline{3 \ 4 \ 5}) \quad 7) \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_{12} \\
 & 8) \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_{60} \quad 9) \text{Aut}(\langle g \rangle) \cong U_{60} \quad 10) \sigma \in A_{12} \\
 & 11) |N_{S_{12}}(\sigma)| = 2^4 \cdot 3^2 \\
 & 12) \sigma \text{ عدد مرافقات} = C_\sigma = \frac{12!}{2^4 \cdot 3^2} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 3326400
 \end{aligned}$$

(ب)

(1) خطأ لأنه :

$$\forall \alpha, \beta \in S_{12} : \varphi(\alpha \beta) = (\alpha \beta)^{-1} = \beta^{-1} \alpha^{-1} \neq \varphi(\alpha) \varphi(\beta)$$

(2) صائب ، لأن :

$$|\mu| = 52 = 4 \cdot 13 \nmid |S_{12}| = (12)!$$

(3) صائب ، لأن :

$$125 = 5^3 \nmid |G|$$

(4) عبارة خاطئة ، لأن :

$$\mathbb{Z}_{80} \text{ زمرة دائرية في حين أن } \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{11}^* \text{ ليست دائرية .}$$

إجابة السؤال الثاني :

(أ)

بفرض  $M = \{G : G \text{ زمرة}\}$  وتعريف " $\cong$ " على  $M$  نجد أن :

$$\forall G \in M : \exists G \xrightarrow{I} G \Leftrightarrow G \cong G \text{ انعكاسية لأن : (1)}$$

$$G_1, G_2 \in M \ni G_1 \cong G_2 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \Rightarrow \exists G_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} G_1 \Rightarrow G_2 \cong G_1 \text{ تناظرية لأن : (2)}$$

(3) متعدية لأن :

$$G_1, G_2, G_3 \in M \ni G_1 \cong G_2 \wedge G_2 \cong G_3 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \wedge G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \Rightarrow \exists G_1 \xrightarrow{\varphi_2 \varphi_1} G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3$$

ومن (1) و (2) و (3) تكون " $\cong$ " علاقة تكافؤ في  $M$

(ب)

$L = \{G : |G| = 12\}$  و معرفة على  $L$  فهي إذن علاقة تكافؤ في  $L$

وتكون ممثلات أصناف التكافؤ هي :

$$\mathbb{A}_4 \text{ (4) } \quad D_6 \text{ (3) } \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \text{ (2) } \quad \mathbb{Z}_{12} \text{ (1)}$$

$$T = \langle x, y : x^3 = y^4 = e \wedge y^{-1}xy = x^{-1} \rangle \text{ (5)}$$

(ج) : بما أن  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle (1 + n\mathbb{Z}) \rangle$  ، حيث  $|1 + n\mathbb{Z}| = n$  ، فإنها تماثل  $\mathbb{Z}_n$  .

إجابة السؤال الثالث :

(أ)

$$\sigma_3 = (1, 2)(3, 4), \sigma_4 = (1, 2, 3) \quad (1)$$

$$|N_G(\sigma_1)| = |G|, |N_G(\sigma_2)| = 4, |N_G(\sigma_3)| = 8, |N_G(\sigma_4)| = 3, |N_G(\sigma_5)| = 4 \quad (2)$$

مما سبق نجد أن معادلة الفصل لـ  $G$  هي :

$$\sum_{i=1}^5 \frac{|G|}{|N_G(\sigma_i)|} = 1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24 = |G| = |S_4|$$

(ب) : بفرض أن  $H < G$  بحيث  $|H| = 28$  فإن :

$$H < G \Rightarrow \exists S = \{Hx \mid x \in G\} \ni |S| = [H : G] = \frac{168}{28} = 6 \Rightarrow \exists A(S) \ni |A(S)| = 6!$$

ولما كانت  $|G| \nmid 6!$  فإنه باستخدام اختبار الدليل نجد أن  $G$  تملك زمرة جزئية فعلية ناظرية غير تافهة محتواة في  $H$ . وهذا تناقض مع المعطيات لا مخرج منه إلا بالتسليم بأن  $G$  لا تملك زمرة جزئية  $H$  رتبته 28.

(ج) إن عكس مبرهنة لاغراندج غير صحيح ، لأنه من الفقرة (ب)  $|G| \nmid 28!$  في حين لا توجد زمرة جزئية في  $G$  رتبته 28.

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : تطبيق  $G|_S \Leftrightarrow \exists * : S \times G \rightarrow S$  بحيث :

$$1) xe = x, \forall x \in S \wedge e \in G$$

$$2) x(gh) = (xg)h, \forall x \in S \wedge g, h \in G$$

(ب)

$$(1) \quad G|_S \text{ بالترافق ، حيث : } (H, g) * = H * g = g^{-1}Hg \text{ لأن :}$$

$$1) He = e^{-1}He = H, \forall H \in S \wedge e \in G$$

$$2) H(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1}H(g_1g_2) = g_2^{-1}(g_1^{-1}Hg_1)g_2 = g_2^{-1}(Hg_1)g_2 = (Hg_1)g_2, \forall H \in S \wedge g_1, g_2 \in G$$

(2) إذا كانت  $G|_S$  بالترافق فمن مبرهنة سيلو الثانية تكون جميع زمر سيلو الجزئية من النوع  $p$  مترافقة في  $G$

وهذا يعني وجود مدار واحد فقط تحت تأثير  $G$  على  $S$  ، أي أنه :

$$H \in S \Rightarrow H \text{ مدار } = |S| = s_p = [G : G_H] = [G : N_G(H)] \text{ (مبرهنة)}$$

$$\Rightarrow |S| = s_p |G| \text{ — مبرهنة لاغراندج —}$$

$$(ج) : |G| = 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

من مبرهنة سيلو الأولى توجد زمرة سيلو جزئية  $H$  في  $G$  من النوع 3 رتبته 9

$$H < G \ni |H| = 9 \Rightarrow \exists S = \{Hx \mid x \in G\} \ni |S| = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow \exists A(S) \ni |A(S)| = 4! = 24$$

ولما كانت  $|G| = 36 \nmid 24$  . فمن مبرهنة "اختبار الدليل" توجد زمرة جزئية فعلية ناظرية غير تافهة في  $G$  ومحتواة في  $H$  وعليه تكون  $G$  غير بسيطة .

إجابة السؤال الأول :

$$Aut(G) = \{T : G \xrightarrow{T} G\}, \mathcal{J}(G) = \{T_g \in Aut(G) : g \in G\} : (أ)$$

: (ب)

(1) إن  $T \in Aut(G)$  ، لأن :

$$y \in G \Rightarrow \exists x = y^{-1} \in G \ni xT = x^{-1} = (y^{-1})^{-1} = y$$

إذن  $T$  غامر

$$x, y \in G \ni xT = yT \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$$

إذن  $T$  متباين

$$\forall x, y \in G : xyT = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = xTyT \quad \text{لأن } G \text{ إبدالية} \\ \text{إذن } T \text{ تشاكل .}$$

مما سبق نجد أن  $T \in Aut(G)$  .

(2) بما أنه يوجد  $x \in G$  بحيث  $x^{-1} \neq x$  فإن :

$$xT = x^{-1} \neq x = xI \Rightarrow T \neq I \Rightarrow |Aut(G)| > 1$$

إجابة السؤال الثاني :

لتكن  $G$  تؤثر على  $S$  و  $K \leq G$  ، حيث  $G = A_4$  و  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  و عناصر  $K$  هي (1) و (1,2)(3,4) ومرافقاتها .

: (أ)

(1) عبارة خاطئة ، لأن ،  $K \triangleleft G$  ولذا فإن  $\sigma^{-1}\tau\sigma \in K$  لكل  $\sigma \in G$  و  $\tau \in K$  .

(2) عبارة صائبة ، لأن زمرة إبدالية ، لذا فإن  $N_K(\varphi) = K$  لكل  $\varphi \in K$  .

(3) عبارة خاطئة ، لأن  $\alpha = (1, 3, 2) \alpha^{-1} = (1, 2, 3)$  لا يتحقق إلا إذا كان التفريق الدوري للعنصر  $\alpha$  هو  $\{1, 1, 2\}$  وهذا يعني أن  $\alpha \notin G$  .

: (ب) : (1,4,3) , (2,4,3) , (2,3,4) .

: (ج)

$$1) \text{ مدار } 4 = 4G = \{4\sigma \mid \sigma \in G\} = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow |4G| = 4$$

$$2) G_4 = \{\sigma \in G \mid 4\sigma = 4\} = \{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \Rightarrow |G_4| = 3$$

$$3) \sigma = (1, 2, 3) \in G \Rightarrow S_\sigma = \{x \in S \mid x\sigma = x\} = \{4\} \Rightarrow |S_\sigma| = 1$$

$$4) x = 4 \Rightarrow [G : G_4] = \frac{12}{3} = 4$$

إجابة السؤال الأول :

(أ) : نقول إن  $H \leq G$  إذا كانت  $H \leq G$  تحقق الشرط :

$$g^{-1}hg \in H, \forall g \in G \wedge h \in H$$

(ب) : لنبرهن أن :

$$A, B \leq G \wedge AB \leq G \Rightarrow AB \leq G$$

كما يلي :

$$\forall g \in G \wedge ab \in AB : g^{-1}abg = g^{-1}aebg \quad (\text{خاصة } e)$$

$$= g^{-1}agg^{-1}bg \quad (e = gg^{-1})$$

$$= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \quad (\text{خاصة التجميع})$$

ولما كانت كل من  $A$  و  $B$  ناظرية في  $G$  فإن  $g^{-1}ag \in A$  و  $g^{-1}bg \in B$

ومنه نستنتج أن  $(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) \in AB$  .

لذا فإن  $AB \leq G$  .

إجابة السؤال الثاني :

ليكن  $\varphi : (G = GL(2, \mathbb{Z}_p)) \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  تطبيقاً ، حيث  $\varphi(A) = \det A$  .

(أ) :  $\varphi$  تشاكل ، لأنه

$$\forall A, B \in G : \varphi(AB) = \det AB$$

$$= \det A \det B \quad \text{— (مبرهنة)}$$

$$= \varphi(A) \varphi(B)$$

(ب) :

$$4) \mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$$

$$5) (G, \cdot) = \left( \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \wedge \det A \neq 0 \right\}, \cdot \right)$$

$$6) \varphi \text{ نواة} = K_\varphi = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G : \varphi(A) = \det A = 1 \right\}$$

(ج) :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \quad (3)$$

$$|\langle M \rangle| = 2 \quad (4)$$

إجابة السؤال الثالث :

(أ) : عبارة خاطئة ، فمثلاً عندما  $G = \mathbb{Z}_5$  فلا يوجد فيها أي عنصرين مختلفين بحيث يكون كل منهما نظير نفسه .

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن  $H \cap K \leq K$  لذا فيجب أن يكون  $|H \cap K| \mid |K| = 8$  ولكن  $|H \cap K| = 3 \nmid 8$  .