نظرية: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية على مجال D و أن $f'(z) = 0$ لكل $z \in D$ ، فإن f ثابتة على D .

البرهان: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ حيث $z = x + iy = (x,y)$

من الصيغة :

لدينا : $f'(z) = u_x + i\,v_x = 0$

$u_x = 0 = v_x$

ومن الصيغة :

لدينا : $f'(z) = v_y - i\,.\,u_y = 0$

$u_y = 0 = v_y$

لكل $z = (x,y) \in D$.

مناقشة الدالة $u(x,y)$:

$u_x = 0 \Rightarrow$ u ثابتة على أي خط مستقيم أفقي في D ، أي أن u دالة لمتغير واحد هو x وتكون مشتقاتها مساوية للصفر.

$u_y = 0 \Rightarrow$ u ثابتة على أي خط مستقيم رأسي في D .

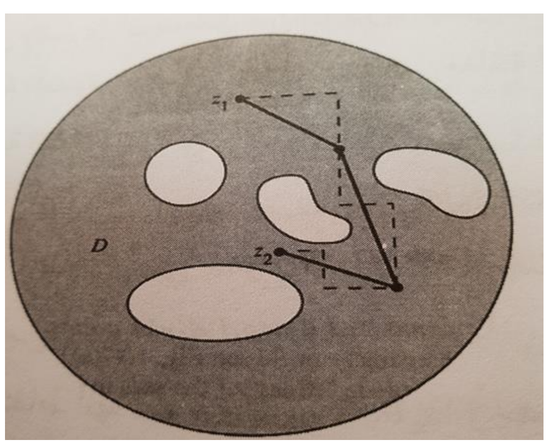
مما سبق فإن u ثابتة على أي مسار متعرج لكل خط يوازي المحاور الإحداثية.

الآن من تعريف الترابط أي نقطتين في D يمكن الوصل بينهما بمسار متعرج يقع كلياً في D .

لكن ربما هذا المسار يحتوي على خطوط ليست رأسية و لا أفقية.

لا أن هذا المسار هو مجموعة جزئية متراصة من D وبالتالي يمكن أن يُغطى بعدد منته من الأقراص المفتوحة الموجودة في D والتي تقع مراكزها على هذا المسار.

وبالتالي فإن الخطوط الغير موازية للمحاور الإحداثية يمكن استبدالها بسلسلة من الخطوط الصغيرة والأفقية وتقع في D.



مناقشة الدالة $V(x,y)$:

بالمثل في $u(x,y)$

إذن على D: $u = c_1$ و $V = c_2$ حيث c_1 و c_2 ثابتان من $\mathbb{R}$.

$$\Leftarrow \quad f(z) = u(x,y) + i\,V(x,y)$$
$$= c_1 + i \cdot c_2$$

$f(z)$ دالة ثابتة على D.