problem 2-2:
Find the following limits:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$.

Solution:

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{(n+a)(n+b)}\right) \cdot \frac{n+\sqrt{(n+a)(n+b)}}{n+\sqrt{(n+a)(n+b)}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-(n+a)(n+b)}{n+\sqrt{n^2+(a+b)n+ab}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-(a+b)n-ab}{n+\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-(a+b)n-ab}{n\left[1+\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}\right]}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{-(a+b)\cancel{n}}{\cancel{n}} - \frac{ab}{n}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\left[1+\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}\right]}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-(a+b)-\frac{ab}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}} = \frac{-(a+b)-0}{1+\sqrt{1+0+0}}$

$= -\frac{(a+b)}{2}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

Problem 2-2:

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$. For this limit, we will use the following excercise (8), below:

$a_n = \frac{2^{n^2}}{n!} \to a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} = \frac{2^{n^2}\cdot 2^{2n}\cdot 2^1}{(n+1)n!}$

$(a_n>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{n^2}}\cdot 4^n\cdot 2}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^{n^2}}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\cdot 2}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$

نطبق قاعدة لوبيتال:

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \ln 4 \cdot 2}{1} = \infty$

$\Rightarrow \left\{\frac{2^{n^2}}{n!}\right\}$ is not bounded $\Rightarrow \left\{\frac{2^{n^2}}{n!}\right\}$ diverges

115 المتتاليات

8. لتكن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. إذا كان $L < 1$، فأثبت أن $\lim x_n = 0$ باتباع الخطوات التالية:

(i) خذ $L < r < 1$. باستخدام $\varepsilon = r - L$ أثبت وجود $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < r \quad \forall n \geq N$$

(ii) أثبت أن

$$x_n < x_N \cdot r^{n-N} \quad \forall\, n > N$$

(iii) استنتج أن $x_n \to 0$.

إذا كـــان $L > 1$ فأثبت أن (x_n) غير محدودة وبالتالي غير متقاربة. هات مثالاً لمتتالية متقاربة (x_n) وأخرى غير متقاربة (y_n) بحيث يكون

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

9. استخدم نتيجة السؤال رقم 8 لتحسب $\lim x_n$ فيما يلي:

(i) $x_n = \frac{a^n}{3^n}$ حيث $a > 0$

(ii) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

(iii) $x_n = \frac{a^n}{n^2}$ حيث $a > 0$

(iv) $x_n = \frac{a^n}{n^n}$.