كويز ثاني - مقرر 487 ريض – الفصل الثاني للعام 1436/ 1437 هـ أ: فواز بن سعود العتيبي

اسم الطالب:

الرقم الجامعي:

5

أثبت صحة أو خطأ كل من العبارات التالية:

(أ) النهاية $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z}$ غير موجودة

(ب) إذا كانت $f(z)=u(x,y)+i\,u^2(x,y)$ تحليلية في مجال $D$ فإن $f(z)$ ثابتة على $D$

(ج) دالة التحويل الخطي $g(z)=\frac{-4i}{z-1}$ تنقل المستقيم $x=\frac{1}{2}$ إلى الدائرة التي مركزها $4i$ و نصف قطرها 2

الحلول:

(أ) خاطئة.

الإثبات:

سنثبت أنه

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z}=0$$

ليكن $\varepsilon>0$.

ليكن $\delta=\varepsilon$.

لدينا، لكل

$$z\in B(0,\delta)\setminus\{0\}$$

$$\left|\frac{\bar{z}^2}{z}-0\right| = \left|\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = \frac{|\bar{z}|^2}{|z|} = |z| < \varepsilon$$

إذاً:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z}=0$$

3

صحيحة

(ب) نضع $v=u^2$

بما أن $f$ تحليلية، فهي تحقق معادلتي كوشي - ريمان.

$u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$

أي:

$u_x=2uu_y$ و $u_y=-2uu_x$

إذاً:

$$u_x=2uu_y=2u(-2uu_x)=-4u^2u_x$$

$$\Rightarrow u_x(1+4u^2)=0 \Longrightarrow u_x=0$$

لأن $(1+4u^2>0)$

المعادلة $u_y = -2uu_x$ نجد أن $\underline{\underline{u_y = 0}}$ .

نستنتج أن $u$ ثابتة

~~[illegible]~~

لتكن $x, y$ نقطتان في $D$ .

فيوجد مسار (path) مضلع بينهما رؤوسه $P_1, P_2, \dots, P_n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ; $n \geq 2$

ليكن $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

لنعرف الدالة $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ بـ $g_i(t) = u((1-t)P_i + (t)P_{i+1})$

من نظرية القيمة المتوسطة، يوجد $c \in (0,1)$ يحقق .

$$\frac{g_i(1) - g_i(0)}{1 - 0} = g_i'(c)$$

أي
$$u(P_{i+1}) - u(P_i) = (P_{i+1} - P_i) \overset{\text{inner product}}{\cdot} \nabla u$$
$$= 0$$
(لأن $0 = \nabla u$)

إذاً ، $u(P_{i+1}) = u(P_i)$ ، وبالاستقراء نجد أن $u(x) = u(P_1) = u(P_2) = \dots = u(P_n) = u(y)$

إذاً $u$ ثابتة ، وبالتالي $f$ ثابتة.

ج) غير صحيحة .

لأن $g(\frac{1}{2}) = \frac{-4i}{\frac{1}{2} - 1} = 8i$

~~[illegible]~~

ولكن ،

$$|4i - 8i| = |-4i| = 4 > 2$$

1

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ