

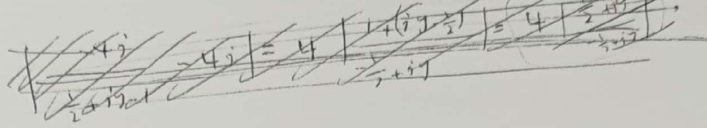
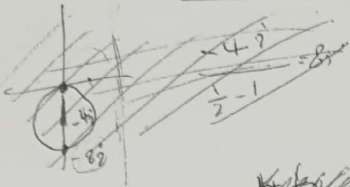
أثبت صحة أو خطأ كل من العبارات التالية:

(أ) النهاية $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z}$ غير موجودة

(ب) إذا كانت $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ تحليلية في مجال D فإن $f(z)$ ثابتة على D

(ج) دالة التحويل الخطي $g(z) = \frac{-4i}{z-1}$ تنقل المستقيم $x = \frac{1}{2}$ إلى الدائرة التي مركزها $4i$ و نصف قطرها 2

الحلول:



(P) خاطئة

الإثبات:
نستعمل أن

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$$

لكي $\epsilon > 0$

لكي $\delta = \epsilon$

نلاحظ، نكتب $z \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$

$$\left| \frac{\bar{z}^2}{z} - 0 \right| = \left| \frac{\bar{z}^2}{z} \right| = \frac{|\bar{z}|^2}{|z|} = |z| < \epsilon$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$$

(3) إذا:

صحة
نضع $v = u^2$

(ب) ببيان تحليلية، فهي تحقق معادلتى كوشي - ريمان

$$u_x = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -v_x$$

$$u_x = 2u u_y \quad \text{و} \quad u_y = -2u u_x$$

$$u_x = 2u u_y = 2u(-2u u_x) = -4u^2 u_x$$

$$\rightarrow u_x(1 + 4u^2) = 0 \Rightarrow u_x = 0$$

(1 + 4u^2) > 0 $\forall u$

$$u_y = 0$$

$$u_y = -2u u_x$$

المعادلة
تسمى u بالمتجه

~~المعادلة التفاضلية الجزئية~~

لكن x, y نقطتان في D

نريد $n \in \mathbb{N}^*$ $\approx P_1, P_2, \dots, P_n$ مسار بين x, y

ليكن $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

لنعرّف الدالة $g_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $g_i(t) = u((1-t)P_i + tP_{i+1})$
من نظرية القيمة المتوسطة، يوجد $c \in (0, 1)$ يحقق

$$\frac{g_i(1) - g_i(0)}{1 - 0} = g_i'(c)$$

$$u(P_{i+1}) - u(P_i) = (P_{i+1} - P_i) \cdot \nabla u \stackrel{\text{inner product}}{=} 0 \quad (0 = \nabla u \cdot (P_{i+1} - P_i))$$

$u(x) = u(P_1) = u(P_2) = \dots = u(P_n) = u(y)$
إذاً $u(P_{i+1}) = u(P_i)$ ولا يتواءم u بالمتجه ∇u في P_i
إذاً $\nabla u = 0$ في P_i

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4i}{\frac{1}{2} - 1} = 8i$$

~~المعادلة التفاضلية الجزئية~~

$$|4i - 8i| = | -4i | = 4 > 2$$

1