١) بين أن $z=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $f(z)=\frac{z-\sin(z)}{z^3}$ ثم
أحسب $f^{(20)}(0)$

الحل:

$$\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ;\ |z|<\infty$$

$$f(z)=\frac{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z^3}$$

$$=\frac{z^3}{3!\,z^3}-\frac{z^5}{5!\,z^3}+\cdots=\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\frac{1}{7!}z^4-\cdots$$

لا يوجد جزء رئيس ⟸ $z=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.
(لاحظ f غير معرفة عند $z=0$).

$$f(z)=\frac{1}{3!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n+1)!}$$

Now put $2n-2=k$

$2n+3-2=k+3$

$2n+1=k+3$

$n+1=\frac{k+1}{4}$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\frac{k+4}{2}}\frac{z^k}{(k+3)!}$$

عندما نتذكر متسلسلة ما كلورين:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{\frac{k+4}{2}}}{(k+3)!}\Rightarrow \text{Put } k=20$$

$$\Rightarrow\frac{f^{(20)}(0)}{20!}=\frac{(-1)^{12}}{23!}$$

$$\Rightarrow f^{(20)}(0)=\frac{20!}{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20!}$$

$$=\frac{1}{10626}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner