جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار الفصلي الثاني

الفصل الأول 1437 - 1438 هـ 244 ريض الزمن ساعة ونصف

الإختبار يحتوي على صفحتين

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

السؤال الأول

ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $u_1 = (1,2,-1)$،
$u_2 = (-1,1,2)$

أ) أثبت أن المجموعة $\{u_1, u_2\}$ مستقلة خطيا.

ب) أثبت أن المتجه $v = (1,5,0)$ ينتمي للفضاء W.

ج) أثبت أن المتجه $v = (1,2,-2)$ لا ينتمي للفضاء W.

السؤال الثاني

أ) أثبت أن $B = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (1,1,2)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

ب) إذا كان $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$

أوجد المصفوفة ${}_BP_C$ (مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B.)

ج) أوجد $[v]_B$ إذا كان $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

السؤال الثالث

ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات التالية
$u_3 = (2,-1,3,1)$، $u_2 = (2,-2,4,0)$، $u_1 = (1,-1,2,0)$،
$u_5 = (0,1,-1,1)$، $u_4 = (1,0,1,1)$.

أ) استخرج أساسا للفضاء W من المجموعة $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.

ب) أجد بعد الفضاء W.

السؤال الرابع

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

أ) أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة (Null space).

ب) عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة.

ج) أوجد رتبة المصفوفة A..

السؤال الخامس ليكن $V = \mathbb{R}^3$، $X = (x_1, x_2, x_3)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

أ) أثبت أن الدالة

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1$$

لا تمثل ضربا داخليا على الفضاء V.

ب) نعرف الضرب الداخلي على الفضاء V كما يلي

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

[i] أوجد المسافة بين المتجهين $u = (-2, 1, 1)$ و $v = (3, 2, 1)$.

[ii] إذا كان $X = (2, 0, 1)$ و $Y = (-3, 1, 2)$، فأثبت أن

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

الإختبار الفصلي الثاني

السؤال الأول

أ) (1)

$$a u_1 + b u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + b = 0 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

ب) (2)

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a + b = 5 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

أو باستعمال المحدد

ج) (2)

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a + b = 2 \\ -a + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a + b = 2 = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

مستحيل

أو باستعمال المحدد.

السؤال الثاني :

أ) (1,5)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

ب) (2,5)

$${}_B P_C = {}_C P_B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}_C P_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ج) (1)

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

السؤال الثالث

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & +1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الأساس هو $\{v_1, v_3\}$.

$\dim W = 2.$ 1

السؤال الرابع

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 2 أ

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = -2y - t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$

$$(-2y-t, y, t, t, 0) = y(-2, 1, 0, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1, 0).$$

1

أساس $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 1, 0)\}$

1

ب) أساس للفضاء المدى هو

أساس للفضاء المولد $\{(1, -1, 2, 1), (-1, 2, 0, 1), (-1, 2, 0, 3)\}$.

ج) رتب المصفوفة هي 3. 1

السؤال الخامس

أ)

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1$$

$$\langle Y, X\rangle = x_1y_1 + y_1x_2 + y_1x_3 + y_3x_1$$

2

$$\langle X, Y\rangle \neq \langle Y, X\rangle$$

ب)

(i) 2 $\|u-v\|^2 = 30$, $d(u,v) = \sqrt{30}$

(ii)

$$\langle X, Y\rangle = -6 + 5(0) + 3(2) = 0$$

اذا

2 $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$.