جامعة الملك سعود
كلية العلوم   قسم الرياضيات   الإختبار الفصلي الثاني

الفصل الصيفي 1437 − 1438 هـ 244 ريض الزمن ساعة ونصف

الإختبار يحتوي على صفحتين

لا يسمح باستعمال الألة الحاسبة

السؤال الأول (5 درجات)

ليكن F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمجموعة
$$S = \{(1,1,2), (1,4,5), (1,2,7), (-1,8,3)\}$$

1 (١). هل $(0,3,3) \in F$؟

2 (٢). هل المجموعة S مستقلة خطيا؟

2 (٣). هل المجموعة S مولدة للفضاء $\mathbb{R}^3$؟

1 1 2

السؤال الثاني (6 درجات) 2

أوجد المصفوفتين $_CP_B$ و $_BP_C$ و $[v]_B$ و $[v]_C$
حيث $B = \{(1,1), (-1,1)\}$، $C = \{(1,2), (2,1)\}$
كل منهما أساس في $\mathbb{R}^2$ و $v = (3,-5)$

السؤال الثالث (4 درجات)

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1,5 (١). أوجد أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

1,5 (٢). عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

1 (٣). أوجد صفرية المصفوفة A.

السؤال الرابع (6 درجات)

لتكن المجموعة $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)\}$ من $\mathbb{R}^2$.

2 (١). أثبت أن $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$. تعرف لضرب داخلي في $\mathbb{R}^2$.

1 (٢). أوجد المسافة بين المتجهين $v_1 = (1, 1)$ و $v_2 = (-1, 1)$.

1 (٣). أوجد الزاوية التي بين المتجهين v_1، v_2.

2 (٤). إستخدم قاعدة جرام شميدت لتحويل الأساس B إلى أساس عياري و متعامد بالنسبة للضرب الداخلي المعرف سابقا.

الخامس

السؤال الرابع (4 درجات)

ليكن $T_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حيث $T_1(x, y, z) = (x + y, z)$
و $T_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حيث $T_2(x, y) = (x^2, x + y)$

2 (١). أثبت فيما إذا كان T_1 و T_2 تحويلين خطيين أم لا؟ (علل إجابتك)

2 (٢). جد حلول المعادلة $T_1(x, y, z) = (0, 0)$.

تصحيح الاختبار الشهري الثاني

٤٤ كريض للفصل الصيفي ٣٧/٨/١٤٣٧هـ:

السؤال الأول (5 درجات)

(١) $F = \langle S \rangle$; $u_1 = (1,1,2)$
$u_2 = (1,4,5)$
$u_3 = (1,2,7)$
$u_4 = (-1,8,3)$

1

$$u_2 - u_1 = (0,3,3) \in F$$

(٢) لا ، لأن S تحتوي على 4 متجهات و نعلم أن $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

2 و بالتالي S مرتبطة خطيًا.

(٣) نعم S تولد $\mathbb{R}^3$ لأن $W = \{u_1, u_2, u_3\}$

2 هو أساس لـ $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

السؤال الثاني (6 درجات)

$B = \{u_1 = (1,1) ; u_2(-1,1)\}$

$C = \{v_1 = (1,2) ; v_2 = (2,1)\}$

2

$$ {}_C P_B = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \end{array}$$

$$ {}_C P_B = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

- $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = 1/3 \end{cases}$$

- $u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = -2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

$${}_BP_C = ({}_CP_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2

$${}_BP_C = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$$
$$v = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (-1,1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$

1 $$[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$ و بالتالي

$$[v]_C = {}_CP_B [v]_B$$

1 $$[v]_C = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

السؤال الثالث (4 درجات)

1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & & -2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1,5

$\dim \operatorname{Row}A = 3$, $\operatorname{Row}A = \langle (1,0,1); (1,1,1); (2,1,1) \rangle$

1,5 $\dim \operatorname{Col}A = 3$ $\operatorname{Col}A = \langle (2,1,2,1); (1,0,-2,1); (1,1,1,1) \rangle$ 2

III

③ باستخدام مبرهنة البعد للمصفوفات : $A \in M_{4,3}$

① $3 = \text{رتبة } A + \text{صفرية } A$

بما أن رتبة A هي 3 فإن صفرية A هي صفر.

السؤال الرابع (6 درجات)

① $u_1 = (x_1 ; y_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_2 = (x_2 ; y_2)$; $u_3 = (x_3 ; y_3)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ليكن

(0,5) • $\langle u_1 | u_2 \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 = \langle u_2 | u_1 \rangle$

(0,5) • $\langle u_1 + u_2 | u_3 \rangle = \langle (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2) | (x_3 ; y_3) \rangle$

$= 2(x_1+x_2)x_3 + 3(y_1+y_2)y_3$

$= 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3y_1y_3 + 3y_2y_3$

$= (2x_1x_3 + 3y_1y_3) + (2x_2x_3 + 3y_2y_3)$

$= \langle u_1 | u_3 \rangle + \langle u_2 | u_3 \rangle$

(0,5) • $\langle \alpha u_1 | u_2 \rangle = \langle (\alpha x_1 ; \alpha y_1) | (x_2 ; y_2) \rangle$

$= 2\alpha x_1 x_2 + 3\alpha y_1 y_2$

$= \alpha (2x_1x_2 + 3y_1y_2)$

$= \alpha \langle u_1 | u_2 \rangle$

(0,5) • $\langle u_1 | u_1 \rangle = 2x_1^2 + 3y_1^2 \geqslant 0$

• $\langle u_1 | u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 3y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 = 0$

$\Leftrightarrow u_1 = (0,0)$

الخواص الخمس تتحقق وبالتالي نعرف ضرب داخلي على $\mathbb{R}^2$.

② $dist(v_1, v_2) = \| v_1 - v_2 \|$

$dist(v_1, v_2) = \langle v_1 - v_2 | v_1 - v_2 \rangle^{1/2}$

(1) $= \langle (2,0) | (2,0) \rangle = \sqrt{8} = \underline{2\sqrt{2}}$

(3) لتكن $\theta = (\widehat{v_1, v_2})$

(0,5) $$\cos\theta = \frac{\langle v_1 | v_2\rangle}{\|v_1\| \, \|v_2\|}$$

$$\langle v_1 | v_2\rangle = \langle (1,1), (-1,1)\rangle = -2+3 = 1$$

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1 | v_1\rangle = \langle (1,1) | (1,1)\rangle = 2+3 = 5$$

$$\|v_2\|^2 = \langle v_2 | v_2\rangle = \langle (-1,1) | (-1,1)\rangle = 2+3 = 5$$

(0,5) $$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt5 \cdot \sqrt5} = \frac{1}{5}$$

$$\theta = \cos^{-1}(1/5)$$

(4)

(0,5) $\bullet\ u_1 = v_1 = (1,1)$

(0,5) $$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 | u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_2 = (-1,1) - \frac{1}{5}(1,1)$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2 | u_2\rangle = 2\times\frac{36}{25} + 3\times\frac{16}{25} = \frac{104}{25}$$

$\bullet\ u_2 = \left(-\frac{6}{5} ; \frac{4}{5}\right)$

$$\omega_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{104}}\left(\frac{-6}{5}, \frac{4}{5}\right) ; \qquad \omega_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt5}$$

(0,5) + (0,5) $$\omega_2 = \frac{5}{2\sqrt{26}}\left(\frac{-6}{5}, 4/5\right) = \left(\frac{-3}{\sqrt{26}} ; \frac{2}{\sqrt{26}}\right) ; \quad \omega_1 = \left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$\{\omega_1 ; \omega_2\}$ هي أساس متعامد ومنظم.

السؤال الخامس (4 درجات)

(1) • T_1 هو تحويل خطياً لأن عندما نأخذ $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

لدينا

(1) $$T_1(u+\alpha v) = T_1(x+\alpha a ; y+\alpha b ; z+\alpha c)$$
$$= (x+\alpha a + y + \alpha b ; z + \alpha c)$$
$$= (x+y ; z) + \alpha(a+b ; c) = T_1(u) + \alpha T_1(v)$$

ه T_2 ليس تحويلا خطيا لأن عندما نأخذ $u=(x,y)$

و $\alpha \in \mathbb{R}$

① $T_2(\alpha u) = T_2(\alpha x, \alpha y) = ((\alpha x)^2 ; \alpha x + \alpha y)$

$= (\alpha^{\boxed{2}} x^2 ; \alpha x + \alpha y) \neq \alpha\, T_2(u).$

$\alpha\, T_2(u) = \alpha(x^2 ; x+y)$

② لدينا $u=(x,y,z)$ بحيث $T_1(u)=(0,0)$

فإن $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$ ②

إذن $u=(x;-x;0)$

مجموعة الحلول هو الفضاء المولد بالمتجه $(1,-1,0)$.