جامعة الملك سعود
قسم الإحصاء وبحوث العمليات

# طرق التنبؤ الإحصائي

( الجزء الأول )

تأليف د. عدنان ماجد عبدالرحمن بري
أستاذ الإحصاء وبحوث العمليات المشارك

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا ونبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

أما بعد.

هذه هي المسودة الأولى لكتاب طرق التنبؤ الإحصائي لطلاب مرحلة البكالوريوس.

هذا الكتاب سيظل مسودة إلى ماشاء الله لأني وبإذن الله تعالى سوف أقوم بتطويره وتجديده وتحسينه بشكل مستمر وسيظل بشكله الإلكتروني هذا لأني أعتقد ان العلوم والتقنية تتطور يوميا وبشكل متسارع بحيث ان وضعها في كتاب جامد ستاتيكي لايتناسب مع ديناميكية الموضوع وخاصة في عصر ثورة المعلومات والإنترنت.

يغطي الجزء الأول من الكتاب الأساسيات الأولية للموضوع ويتطرق إلى موضوع التنبؤ الإحصائي بإستخدام نماذج ARIMA والتي كانت اول معالجة رياضية جادة ومحكمة للتنبؤ الإحصائي بإستخدام المتسلسلات الزمنية Time Series كما تطرقت في آخر الكتاب إلى بعض الطرق التقليدية الهورستيكية للتنبؤ الإحصائي وفي جميع أجزاء الكتاب قمت بتوضيح الأمثلة والحالات الدراسية بإستخدام الحزمة الإحصائية Minitab وهي برامج حاسب طورت خاصة لتعليم علم الإحصاء بجميع فروعه وهذه الحزمة متوفرة للطلاب بالمجان.

الجزء الثاني من الكتاب وموجه لطلاب الدراسات العليا سوف يتطرق بإذن الله لمواضيع مثل تحليل التدخل Intervention Analysis ونماذج دالة التحويل Transfer Function Models ونماذج المتسلسلات الزمنية المتعددة Multivariate Time Series Models ونماذج المتسلسلات الزمنية الموجهه Vector Time Series Models ونماذج فضاء الحالة ومرشح كالمن State Space Models and Kalman Filtering ونماذج الحد Threshold Time Series Models ونماذج ARCH ونماذج GARCH وتطبيقاتها في التنبؤ المالي Finantial Time Series Forecasting كما سنتطرق إلى الشبكات العصبية Neural Networks وإستخدامها في التنبؤ الإحصائي.

هذا وارجوا من الله ان يوفقني في إنجاز هذا العمل لوجهه الكريم ولإثراء المكتبة العربية الفقيرة إلى مثل هذا الكتاب.

سيكون هذا الكتاب مجاني لأي طالب علم وهو سيكون متواجد على شبكة الإنترنت في الموقع http://www.abarry.ws/books/statisticalForecast.pdf
والله الموفق.

المؤلف
د. عدنان ماجد عبد الرحمن بري

جامعة الملك سعود
ذو القعدة 1422 هـ
يناير 2002 م

# المحتويات

الفصل الأول

# مقدمة وتعاريف

**تعريف 1:**

**المتسلسلة الزمنية Time Series هي متتابعة من القيم المشاهدة لظاهرة عشوائية مرتبة مع الزمن ( او مرتبة على المكان )**

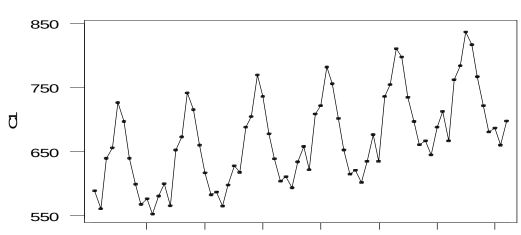
**امثلة على المتسلسلات الزمنية:**

1- سعر اقفال سهم بنك الرياض يوميا.
2- عدد الوحدات المطلوبة اسبوعيا من انتاج سلعة معينة.
3- حجم المبيعات شهريا من سلعة ما.
4- حجم الإنتاج اليومي للنفط الخام بالمملكة.

**والغرض من دراسة وتحليل المتسلسلات الزمنية هو:**

1- فهم ونمذجة عشوائية الظاهرة المشاهدة.
2- التنبؤ عن القيم المستقبلية للظاهرة العشوائية.
3- التحكم بالظاهرة العشوائية إذا امكن ذلك.

الشكل التالي لمتسلسلة زمنية مشاهدة وهي عبارة عن الإنتاج اليومي للحليب بالرطل لبقرة ما



## الخطوات المتخذة لبناء نموذج تنبؤ:

إن إيجاد نموذج مناسب تنطبق علية متسلسلة زمنية مشاهدة يعتبر من المهام الصعبة والتي تحتاج الى الكثير من البحث والخبرة. سوف نستعرض بعض الخطوات العريضة لبناء نموذج رياضي للتنبؤ عن متسلسلة زمنية ما:

1- **تعيين النموذج أو تحديد النموذج Model Identification:**

وهذا يتم برسم المتسلسلة الزمنية فيما يسمى Time Plot حيث يكون الإحداثي الافقي هو الزمن والرأسي حجم الظاهرة المشاهدة ومن ثم إختيار نموذج رياضي معتمدين علي بعض المقاييس الإحصائية التى تميز نموذج عن آخر وعلى الخبرة المستمدة من الدراسات والابحاث.

2- **تطبيق النموذج Model Fitting:**

بعد ترشيح نموذج او اكثر كنموذج مناسب لوصف المتسلسلة المشاهدة نقوم بتقدير معالم هذا النموذج من البيانات المشاهدة بإستخدام طرق التقدير الإحصائي الخاصة بالمتسلسلات الزمنية وهذا النموذج المرشح يؤخذ كنموذج اولي قابل للتعديل لاحقا.

3- **تشخيص وإختبار النموذج Model Diagnostics:**

إجراء إختبارات تفحصية على أخطاء التطبيق Fitting Errors لمعرفة مدى تطابق المشاهدات مع القيم المحسوبة من النموذج المرشح ومدى صحة فرضيات النموذج. في حالة إجتياز النموذج المرشح لهذه الإختبارات نقوم بإعتمادة على انه النموذج النهائي ويستخدم لتوليد تنبؤات للقيم المستقبلية وإلا نعود للخطوة الاولى لتعيين نموذج جديد.

4- **توليد التنبؤات Forecast Generation:**

يستخدم النموذج النهائي لتوليد تنبؤات عن القيم المستقبلية ومن ثم حساب أخطاء التنبؤ Forecast Errors كلما استجدت قيم جديدة مشاهدة من المتسلسلة الزمنية ومراقبة هذه الأخطاء فى ما يسمى بمخططات المراقبة Control Charts والتي توضع للقبول بنسبة خطأ معين إذا تجاوزتة أخطاء التنبؤ يعاد النظر في النموذج وتعاد الدورة من جديد بتحديد نموذج مرشح آخر.

5- **إستخدام التنبؤات ووضع القرارات Implementation and Decision making:** تقدم التنبؤات فى تقرير لصانعي القرار للنظر في إستخدامها بالشكل المناسب.

## تعاريف ومبادئ اولية:

سوف نرمز للظاهرة العشوائية أو العملية العشوائية التي تولد المتسلسلة الزمنية بالرمز $\{\cdots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\}$ او اختصارا $\{Z_t, t \in \{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}\}$ او ببساطة $\{Z_t\}$

وللمتسلسلة الزمنية المشاهدة بالرمز $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$

**تعريف2:**

**القيم** $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ **تسمى بالماضى او تاريخ الظاهرة History**

والتاريخ مهم جدا في عملية النمذجة

**تعريف 3 :**

**القيمة** $z_n$ **تسمى الحاضر او الآن**

وهي المشاهدة الأخيرة .

**تعريف 4:**

**أخطاء التطبيق تعطى بالعلاقة** $e_t = z_t - \hat{z}_t, \quad t = 1, 2, ..., n$ **حيث** $\hat{z}_t$ **هي القيم المطبقة ( القيم التي نتحصل عليها من النموذج) وتسمي أيضا الرواسب Residuals**

ويلاحظ ان اخطاء التطبيق نحصل عليها دفعة واحدة بعد تقدير النموذج.

**<u>ملاحظة:</u>** سوف نرمز للمشاهدات المستقبلية بالرموز $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, ...$ او بشكل عام $z_{n+\ell}, \ell \geq 0$ ونرمز لتنبؤاتها بالرمز $z_n(1), z_n(2), z_n(3), ...$ او بشكل عام $z_n(\ell), \ell \geq 0$

**تعريف 5:**

**أخطاء التنبؤ تعطى بالعلاقة** $e_n\left(\ell\right)=z_{n+\ell}-z_n\left(\ell\right), \quad \ell\ge 0$

وأخطاء التنبؤ تنتج الواحدة تلو الاخرى كلما تقدم الزمن وشوهدت القيم الحقيقية

**تعريف 6:**

**يقال ان المتسلسلة الزمنية المشاهدة** $\left\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\right\}$ **مستقرة Stationary إذا حققت الشروط التالية:**

$$1)\quad E\left(z_t\right)=\text{ constant}=\mu, \quad \forall t$$

$$2)\quad \operatorname{cov}\left(z_t, z_s\right)=\begin{cases}\text{constant}=\gamma_0, \forall t, \forall s, t=s\\ f\left(\left|s-t\right|\right), \forall t, \forall s, t\ne s\end{cases}$$

الآن سوف نعرف متسلسلة زمنية مهمة جدا لكونها حجرة او طوب البناء Building Blocks لجميع النماذج التي سوف ندرسها

**تعريف 7:**

**متسلسلة الضجة البيضاء White Noise Series اوعملية الضجة البيضاء White Noise Process** $\left\{a_t\right\}$ **هي عبارة عن متتابعة من المشاهدات العشوائية غير المترابطة ( واحيانا نفترض انها متتابعة من المتغيرات العشوائية التي تكون مستقلة ولها توزيعات متطابقة Independent, Identically Distributed (IID) ) بمتوسط صفري وتباين ثابت** $\sigma^2$ **أي:**

$$1)\quad E\left(a_t\right)=0, \forall t$$

$$2)\quad \operatorname{cov}\left(a_t, a_s\right)=\begin{cases}\sigma^2, & \forall t, \forall s, t=s\\ 0, & \forall t, \forall s, t\ne s\end{cases}$$

**ويرمز لها بالرمز** $a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$

**مثال1:**

**متسلسلة المشى العشوائى Random Walk :**

سوف نبني عملية عشوائية $\{Z_t\}$ كالتالي:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= a_1 \\
Z_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
Z_t &= a_1 + a_2 + \cdots + a_t
\end{aligned}
$$

أو

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t$$

أي لو اعتبرنا ان $a_j$ هو حجم الخطوة التي تؤخذ الي الامام او الخلف عند الزمن $j$ فان $Z_t$ هي موقع ماشي عشوائي عند الزمن $t$

**ملاحظة:** هذه العملية او المتسلسلة من النماذج الهامة جدا التي تصف اسواق المال العالمية

تمرين: اوجد $E(Z_t)$ و $\text{cov}(Z_t, Z_s)$ لجميع قيم $t, s$ وهل العملية مستقرة؟

**تعريف 8:**

**دالة التغاير الذاتي Autocovariance Function وتعرف كالتالي:**

$$
\begin{aligned}
\gamma_{t,s} &= \text{cov}(Z_t, Z_s), \forall t, \forall s \\
&= E\left[(Z_t - \mu)(Z_s - \mu)\right], \forall t, \forall s
\end{aligned}
$$

**وإذا عرفنا التخلف $k$ على انه الفترة الزمنية التي تفصل بين $Z_t$ وبين $Z_{t-k}$ أو $Z_{t+k}$ فإن دالة التغاير الذاتي تعطى بالعلاقة:**

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \text{cov}(Z_t, Z_{t-k}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\
&= E\left[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots
\end{aligned}
$$

**ملاحظة:** سوف نستخدم التعريف الثاني دائما

**تعريف 9:**

**دالة الترابط الذاتي Autocorrelation Function (ACF) وتعرف كالتالي:**

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ولها الخواص التالية:

1. $\rho_0 = 1$
2. $\rho_{-k} = \rho_k$
3. $\left|\rho_k\right| \le 1$

**مثال 2:**

سوف نشتق الآن دالة الترابط الذاتي لعملية الضجة البيضاء

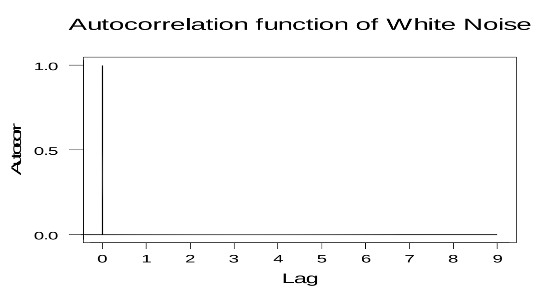
دالة التغاير الذاتي لعملية الضجة البيضاء هي:

$$\gamma_k = \operatorname{cov}\left(a_t, a_{t-k}\right) = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \ne 0 \end{cases}$$

وذلك من التعريف 7 ومنها نجد دالة الترابط الذاتي:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \ne 0 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:



**تعريف 10:**

**دالة الترابط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation Function (PACF)**

**وتعطي مقدار الترابط بين $Z_t$ و $Z_{t-k}$ بعد إزالت تأثير الترابط الناتج من المتغيرات $Z_{t-1}, Z_{t-2}, ..., Z_{t-k+1}$ الواقعة بينهما ويرمز لها عند التخلف $k$ بالرمز $\phi_{kk}$ وأحد طرق حسابها تقوم علي حساب معامل الإنحدار الجزئي $\phi_{kk}$ في التمثيل:**

$$Z_t = \phi_{k1} Z_{t-1} + \phi_{k2} Z_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_{t-k} + a_t$$

حساب $\phi_{11}$ :

$$Z_t = \phi_{11} Z_{t-1} + a_t$$

بضرب طرفي العلاقة بـ $Z_{t-1}$ وأخذ التوقع نجد

$$E\left(Z_{t-1} Z_t\right) = \phi_{11} E\left(Z_{t-1} Z_{t-1}\right) + E\left(Z_{t-1} a_t\right)$$

أي

$$\gamma_1 = \phi_{11} \gamma_0$$

حيث $E\left(Z_{t-1} a_t\right) = 0$ ( بشكل عام $E\left(Z_{t-k} a_t\right) = 0, k = 1, 2, ...$ كما سنبين لاحقا )

وبالقسمة علي $\gamma_0$ نجد

$$\phi_{11} = \rho_1$$

**تعريف 11:**

**بشكل عام تعرف دالة الترابط الذاتي الجزئي كالتالي:**

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \rho_1, & k=1 \\ \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, & k=2,3,\ldots \end{cases}$$

حيث $|\ |$ ترمز الي محددة مصفوفة

التعريف السابق صعب الإستخدام لقيم $k$ الكبيرة ولهذا سوف نعطي تعريف آخر لحساب دالة الترابط الذاتي الجزئي تكراريا:

**تعريف 11 ب:**

**تحسب $\phi_{kk}$ تكراريا من العلاقات**

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_j}, \quad k = 2,3,\ldots$$

**حيث**

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-1}, \quad j = 1,2,\ldots,k-1$$

حساب $\phi_{22}$ :

من تعريف 11 ب:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1-\phi_{11}\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

وذلك لأن $\phi_{11} = \rho_1$.

**مثال 3:**

سوف نشتق الآن دالة الترابط الذاتي الجزئي لعملية الضجة البيضاء:

من تعريف 11 ب

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0$$

وذلك من مثال 1 السابق

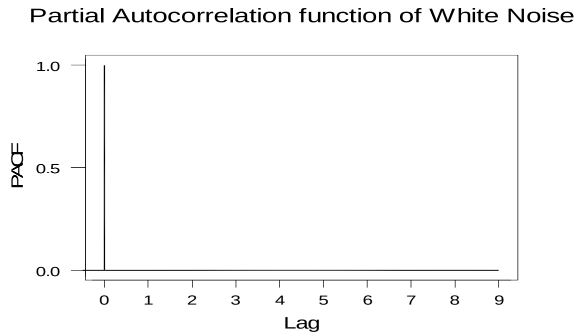
وبالتعويض في تعريف 11 ب عن $\phi_{kk}$ نجد

$$\phi_{22} = \phi_{33} = \cdots = 0$$

وهكذا:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:




**ملاحظة:** لاحظ أن كل من دالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لعملية الضجة البيضاء تساوي الصفر من التخلف الأول. وهذه خاصية جميع المتغيرات العشوائية غير المترابطة او المستقلة. لإختبار عدم الترابط بين قيم مشاهدة لمتغير عشوائي تستخدم دالة الترابط الذاتي لذلك.

**تعريف 12 :**

**دالة الترابط الذاتي للعينة Sample Autocorrelation Function SACF لمسلسلة زمنية مشاهدة $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$ ويرمز لها بالرمز $r_k,\ k = 0,1,2,...$ وتعطى بالعلاقة:**

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(z_t - \overline{z}\right)\left(z_{t+k} - \overline{z}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(z_t - \overline{z}\right)^2}, \quad k = 0,1,2,...$$

**حيث** $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t$

وهي مُقدِّر Estimator لدالة الترابط الذاتي أي $\hat{\rho}_k = r_k, \quad k = 0,1,2,...$ وبما انها مُقدِّر فهي إذا تتغير عشوائيا من عينة لاخرى ولهذا فإن لها الخواص العينية التالية:

1- إذا كانت $k > q$ ، $\rho_k = 0,$ فإن

$$V\left(r_k\right) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{q}\rho_k^2\right), \quad k > q$$

وفي الحالة الخاصة عندما $k > 0$ ، $\rho_k = 0,$ فإن $k > 0$ ، $V(r_k) \cong \frac{1}{n},$

2- لقيم $n$ الكبيرة و $\rho_k = 0$ فإن $r_k$ يكون لها تقريبا توزيع طبيعي وبالتالي نستطيع القيام بالاختبار التالي:

$$H_0 : \rho_k = 0$$
$$H_1 : \rho_k \neq 0$$

وذلك بإستخدام الإحصائة:

$$\frac{|r_k|}{n^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{n}\,|r_k|$$

وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وترفض $H_0$ إذا كانت $\sqrt{n}\,|r_k| > 1.96$

3- تحت الفرضية $H_0 : \rho_k = 0, \forall k$ فإن $corr(r_k, r_{k-s}) \cong 0, s \neq 0$

4- تُقدَّر التباينات لدالة الترابط الذاتي للعينة كالتالي:

$$\hat{V}(r_k) \cong \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{q} r_k^2\right), \quad k > q$$

**تعريف 13:**

**دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة Sample Partial Autocorrelation Function SPACF لمسلسلة زمنية مشاهدة** $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n$ **ويرمز لها بالرمز** $r_{kk},\ k = 0,1,2,\ldots$ **تعطى بالعلاقة:**

$$r_{kk}=\begin{cases}1, & k=0\\ r_1, & k=1\\ \dfrac{\begin{vmatrix}1 & r_1 & \cdots & r_{k-2} & r_1\\ r_1 & 1 & \cdots & r_{k-3} & r_2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_1 & r_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & r_1 & \cdots & r_{k-2} & r_{k-1}\\ r_1 & 1 & \cdots & r_{k-3} & r_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & r_1 & 1\end{vmatrix}}, & k=2,3,\ldots\end{cases}$$

و لحساب دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة تكراريا:

**تعريف 13 ب:**

**تحسب $r_{kk}$ تكراريا من العلاقات**

$$r_{00}=1,\quad \text{by definition}$$

$$r_{11}=r_1$$

$$r_{kk}=\frac{r_k-\sum_{j=1}^{k-1}r_{k-1,j}r_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}r_{k-1,j}r_j},\quad k=2,3,\ldots$$

**حيث**

$$r_{kj}=r_{k-1,j}-r_{kk}r_{k-1,k-1},\quad j=1,2,\ldots,k-1$$

وهي ايضا مقدَّر Estimator لدالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة أي $\hat{\phi}_{kk}=r_{kk},\quad k=0,1,2,\ldots$ وبما انها مُقدِّر فهي إذا تتغير عشوائيا من عينة لاخرى ولهذا فإن لها الخواص العينية التالية:

1- $V\left(r_{kk}\right)\cong\frac{1}{n},\quad k>0$

2- لقيم $n$ الكبيرة فإن $r_{kk}$ يكون لها تقريبا توزيع طبيعي وبالتالي نستطيع القيام بالاختبار التالي:

$$H_0:\phi_{kk}=0$$
$$H_1:\phi_{kk}\neq 0$$

وذلك بإستخدام الإحصائة:

$$\frac{\left|r_{kk}\right|}{n^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt{n}\left|r_{kk}\right|$$

وذلك عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$ وترفض $H_0$ إذا كانت $\sqrt{n}\left|r_{kk}\right|>1.96$

3- تحت الفرضية $H_0:\phi_{kk}=0, \forall k$ فإن $corr\left(\phi_{kk},\phi_{k-s,k-s}\right)\cong 0,\ s\neq 0$

4- تُقدّر التباينات لدالة الترابط الذاتي للعينة كالتالي:

$$\hat{V}\left(r_{kk}\right)\cong\frac{1}{n},\quad k>0$$

**__مثال 4:__**

البيانات التالية تمثل الطلب علي منتج معين يوميا:

158 222 248 216 226 239 206 178 169

أحسب الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للعينة وارسمهما:

اولا: نحسب المتوسط $\bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_t=\frac{1}{9}\left(158+222+\cdots+169\right)=206.89$

ثانيا: نحسب الترابط الذاتي من العلاقة

$$r_k=\frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(z_t-\bar{z}\right)\left(z_{t+k}-\bar{z}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(z_t-\bar{z}\right)^2},\quad k=0,1,2,...$$

$$r_1 = \frac{(158\times222+222\times248+\cdots+178\times169)}{(158\times158+222\times222+\cdots+169\times169)} = 0.265116$$

$$r_2 = \frac{(158\times248+222\times216+\cdots+206\times169)}{(158\times158+222\times222+\cdots+169\times169)} = \text{-}0.212$$

$$r_3 = \frac{(158\times216+222\times226+\cdots+239\times169)}{(158\times158+222\times222+\cdots+169\times169)} = -0.076$$

وهكذا $r_8 = 0.230, r_7 = 0.104, r_6 = -0.242, r_5 = -0.387, r_4 = -0.183$

ثالثا: نحسب التباينات من

$$\hat{V}(r_k) \cong \frac{1}{n}\left(1+2\sum_{k=1}^{q} r_k^2\right), \quad k > q$$

$$\hat{V}(r_1) \cong \frac{1}{9}$$

$$\hat{V}(r_2) \cong \frac{1}{n}\left(1+2r_1^2\right) = \frac{1}{9}\left(1+2(0.265)^2\right) = 0.1267$$

$$\hat{V}(r_3) \cong \frac{1}{n}\left(1+2\left(r_1^2+r_2^2\right)\right) = \frac{1}{9}\left(1+2\left((0.265)^2+(-0.212)^2\right)\right) = 0.1367$$

$$\hat{V}(r_4) \cong 0.138 \quad \hat{V}(r_5) \cong 0.1454 \quad \hat{V}(r_6) \cong 0.1787$$

الخ...

رابعا: نحسب الترابط الذاتي الجزئي للعينة:

$$r_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$

$$r_{11} = r_1 = 0.265$$

ثم نحسب باقي الترابطات من العلاقات التكرارية

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}\, r_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}\, r_j}, \quad k = 2,3,\ldots$$

حيث

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk}\, r_{k-1,k-1}, \quad j = 1,2,\ldots,k-1$$

$$r_{22}=\frac{r_2-\sum_{j=1}^{1} r_{1,j}r_{2-j}}{1-\sum_{j=1}^{1} r_{1,j}r_j}=\frac{r_2-r_{11}r_1}{1-r_{11}r_1}=\frac{(-0.212)-(0.265)(0.265)}{1-(0.265)(0.265)}=\frac{-0.282225}{0.929775}$$
$$=-0.30354$$

لحساب $r_{33}$ نحتاج الى $r_{21}$ وتحسب من

$$r_{21}=r_{11}-r_{22}r_{11}=0.265-(-0.303)(0.265)=0.345295$$

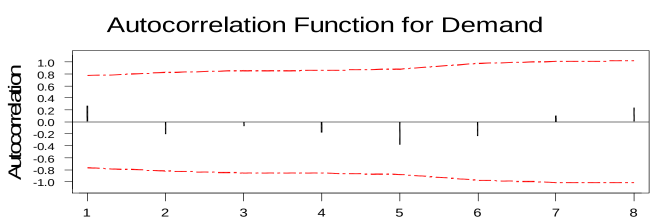
$$r_{33}=\frac{r_3-\sum_{j=1}^{2} r_{2,j}r_{3-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1} r_{2,j}r_j}=\frac{r_3-(r_{21}r_2+r_{22}r_1)}{1-(r_{21}r_1+r_{22}r_2)}$$
$$=\frac{(-0.076)-((0.345)(-0.212)+(-0.303)(0.265))}{1-((0.345)(0.265)+(-0.303)(-0.212))}$$
$$=0.092$$

وهكذا نحسب باقي الترابطات الجزئية للعينة

$$r_{88}=0.042,\ r_{77}=0.013,\ r_{66}=-0.207,\ r_{55}=-0.294,\ r_{44}=-0.298$$

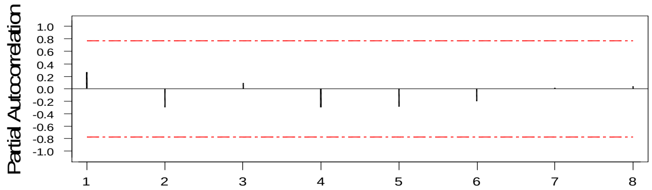
ولها جميعا التباينات تساوي تقريبا $\frac{1}{9}=0.1111$

خامسا: رسم دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للعينة




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.27 | 0.80 | 0.87 | 8 | 0.23 | 0.52 | 13.66 |
| 2 | -0.21 | -0.59 | 1.50 | | | | |
| 3 | -0.08 | -0.21 | 1.60 | | | | |
| 4 | -0.18 | -0.49 | 2.26 | | | | |
| 5 | -0.39 | -1.01 | 5.96 | | | | |
| 6 | -0.24 | -0.57 | 7.89 | | | | |
| 7 | 0.10 | 0.24 | 8.43 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for Demand




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.27 | 0.80 | 8 | 0.04 | 0.13 |
| 2 | -0.30 | -0.91 | | | |
| 3 | 0.09 | 0.27 | | | |
| 4 | -0.30 | -0.89 | | | |
| 5 | -0.29 | -0.88 | | | |
| 6 | -0.21 | -0.62 | | | |
| 7 | 0.01 | 0.04 | | | |

## الفصل الثاني

**نماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك Autoregressive-Moving Average Models وإستخداماتها في التنبؤ:**

هناك عائلة كبيرة من النماذج التي يطلق عليها نماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك Autoregressive-Moving Average Models والتي اثبتت الأبحاث الكثيرة في مختلف الميادين التطبيقية علي تفوقها الهائل علي الطرق التقليدية في التنبؤ.

**تعريف 14:**

**نموذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,q)$ ويرمز له $ARMA(p,q)$ لمتسلسلة زمنية مشاهدة $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ يكتب علي الشكل:**

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

**حيث $a_t \sim WN(0,\sigma^2)$ متسلسلة ضجة بيضاء و $-\infty < \delta < \infty$ معلم ثابت يمثل المستوي و $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ هي معالم الإنحدار الذاتي Autoregressive Parameters و $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ هي معالم المتوسط المتحرك Moving Average Operators**

سوف نستعين بجبر العمال Operators Algebra لتبسيط هذه النماذج لكي يسهل التعامل معها

**تعريف 15: عامل الإزاحة الخلفي Backshift Operator ويرمز له $B$ وله الخواص التالية:**

$1- Bz_t = z_{t-1}$

$2- B^m z_t = B^{m-1}(Bz_t) = B^{m-2}(B(Bz_t)) = \cdots = z_{t-m}$

$3- Bc = c, \quad c$ is a constant

بالإضافة الي عامل الإزاحة الخلفي توجد عمال اخري نحتاج اليها لاحقا هي:

**تعريف 15 ب:**

**1- عامل الإزاحة الأمامي Forewardshift Operator ويرمز له $F$ ويعرف كالتالي:**

$$F = B^{-1}$$

**2- عامل التفريق Difference Operator ويرمز له $\nabla$ ويعرف كالتالي:**

$$\nabla = (1-B)$$

**4- عامل التجميع Sum Operator ويرمز له $S$ ويعرف كالتالي:**

$$S = \nabla^{-1} = (1-B)^{-1}$$

الآن نعود الي نموذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,q)$ ونكتبه علي الشكل:

$$\begin{aligned}
&z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} - \cdots - \phi_p z_{t-p} = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \\
&z_t - \phi_1 B z_t - \phi_2 B^2 z_t - \cdots - \phi_p B^p z_t = \delta + a_t - \theta_1 B a_t - \theta_2 B^2 a_t - \cdots - \theta_q B^q a_t \\
&\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) z_t = \delta + \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) a_t
\end{aligned}$$

أو

$$\phi_p(B) z_t = \delta + \theta_q(B) a_t$$

حيث $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ هو عامل الإنحدار الذاتي Autoregressive Operator و $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$ هو عامل المتوسط المتحرك Moving Average Operator

**<u>أمثلة:</u>**

1- نموذج المتوسط الثابت Constant Mean Model ويرمز له $ARMA(0,0)$ ويكتب علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$

او

$$\begin{aligned}
&(1) z_t = \delta + (1) a_t \\
&z_t = \delta + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)
\end{aligned}$$

2- نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الاولي $AR(1) \equiv ARMA(1,0)$ وهو علي الشكل:

$$\phi_1(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$

$$(1-\phi_1 B) z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

3- نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الاولي $MA(1) \equiv ARMA(0,1)$ وهو علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t$$

$$z_t = \delta + (1-\theta_1 B) a_t$$

$$z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

4- نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية $AR(2) \equiv ARMA(2,0)$ وهو علي الشكل:

$$\phi_2(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2) z_t = \delta + a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

5- نموذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك من الدرجة (1و1) $ARMA(1,1)$ ونكتبه علي الشكل:

$$\phi_1(B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t$$

$$(1-\phi_1 B) z_t = \delta + (1-\theta_1 B) a_t$$

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

## خصائص نماذج الإنحدار الذاتي المتوسط المتحرك:

سوف ندرس الخصائص الإحصائية التي تميز نماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك ومعرفة كيفية التعرف علي احد هذه النماذج من عينة مشاهدة وذلك لتعيين او تحديد نموذج مناسب يصف المشاهدات.

**أولا: نموذج المتوسط الثابت(ARMA(0,0:**

ويكتب علي الشكل

$$\phi_0(B)z_t = \delta + \theta_0(B)a_t$$

او

$$z_t = \delta + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

سوف نشتق الخواص الإحصائية لهذا النموذج وذلك بإيجاد التوقع (المتوسط) ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي كالتالي:

$$\begin{aligned} E(z_t) &= \delta + E(a_t) \\ &= \delta \end{aligned}$$

وذلك لأن $a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$

سوف نرمز لمتوسط المتسلسلة $E(z_t)$ بالرمز $\mu$ أي $\mu = E(z_t)$ وبالتالي يكون $\delta = \mu$

ويكتب النموذج:

$$z_t - \mu = a_t$$

لإشتقاق دالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي نضرب طرفي المعادلة السابقة في $z_{t-k} - \mu$ ونأخذ التوقع أي

$$E\left[(z_{t-k}-\mu)(z_t-\mu)\right] = E\left[(z_{t-k}-\mu)a_t\right]$$

ولكن $E\left[(z_{t-k}-\mu)(z_t-\mu)\right] = \gamma_k$ من تعريف 8 إذا

$$\gamma_k = E\left[(z_{t-k}-\mu)a_t\right], \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

ونحل هذه العلاقة تكراريا:

$$k=0: \quad \gamma_0 = E\left[(z_t-\mu)a_t\right]$$

لإيجاد الطرف الأيمن نضرب طرفي $z_t - \mu = a_t$ في $a_t$ ونأخذ التوقع أي

$$E\left[\left(z_t - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_t a_t\right) = \sigma^2$$

وذلك لأن $a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$ إذا

$$k = 0: \quad \gamma_0 = E\left[\left(z_t - \mu\right)a_t\right] = \sigma^2$$

$$k = 1: \quad \gamma_1 = E\left[\left(z_{t-1} - \mu\right)a_t\right] = 0$$

وذلك لأن

$$z_{t-1} - \mu = a_{t-1}$$
$$E\left[\left(z_{t-1} - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_{t-1} a_t\right) = 0$$

في الحقيقة فإن

$$z_{t-k} - \mu = a_{t-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_{t-k} a_t\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

أي

**قاعدة 1:**

$$E\left[\left(z_{t-k} - \mu\right)a_t\right] = E\left(a_{t-k} a_t\right) = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, .. \end{cases}$$

أي

$$\gamma_0 = \sigma^2$$
$$\gamma_k = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

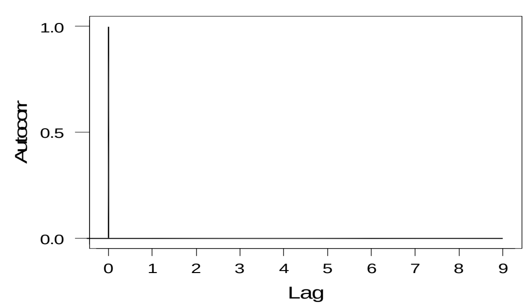
وتوضع علي شكل دالي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

وبالقسمة علي $\gamma_0 = \sigma^2$ نجد

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:




نشتق الآن دالة الترابط الذاتي الجزئي من التعريف 11 نجد

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$
$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \text{by definition}$$
$$\phi_{11} = 0$$
$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$$\phi_{33}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \rho_2\\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2\\ \rho_1 & 1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}=0$$

$$\vdots$$

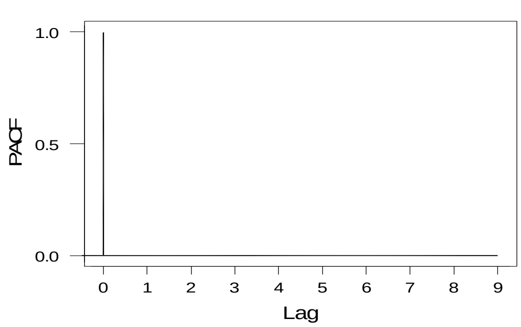
$$\phi_{kk}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{1}=0, \quad k=2,3,\cdots$$

وتوضع علي شكل دالي:

$$\phi_{kk}=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

ولها الشكل التالي:

Partial Autocorrelation function of Constant Mean Model




**ملاحظة:** نموذج المتوسط الثابت لايفترق عن نموذج الضجة البيضاء الا في ان له متوسط غير صفري

## ثانيا: نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الاولى ARMA(1,0) = AR(1)

وهو علي الشكل:

$$\phi_1(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$
$$(1-\phi_1 B) z_t = \delta + a_t$$
$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

كالنموذج السابق سوف نوجد التوقع (المتوسط) ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$(1-\phi_1 B) z_t = \delta + a_t$$
$$z_t = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} + (1-\phi_1 B)^{-1} a_t$$
$$E(z_t) = \frac{\delta}{(1-\phi_1)} + E\left[(1-\phi_1 B)^{-1} a_t\right]$$

الحد الثاني في الطرف الأيمن هو

$$E\left[(1-\phi_1 B)^{-1} a_t\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1{}^j B^j\right) a_t\right]$$

لإدخال التوقع علي المجموع اللآنهائي يجب ان تكون المتسلسلة اللآنهائية $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1{}^j B^j < \infty$ متقاربة وذلك يتحقق إذا كانت $|\phi_1| < 1$ وذلك إذا اعتبرنا العامل $B$ الآن يلعب دور متغير مركب Complex Variable له الشكل $B = a + ib$ وله القياس $|B| = 1$ في الحقيقة لابد ان نتطلب ان تكون جزور او اصفار $(1-\phi_1 B) = 0$ خارج دائرة الوحدة أي $|B| > 1$ أي

$$1 - \phi_1 B = 0$$
$$B = \frac{1}{\phi_1}$$
$$|B| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1 \Rightarrow |\phi_1| < 1$$

وهذا هو شرط الإستقرار. نعود الي العلاقة

$$E\left[(1-\phi_1 B)^{-1} a_t\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1{}^j B^j\right) a_t\right]$$
$$= \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1{}^j B^j\right) E(a_t)\right]$$
$$= 0, \quad \forall t$$

ويكون

$$E(z_t) = \frac{\delta}{(1-\phi_1)}$$

او

$$\mu = \frac{\delta}{(1-\phi_1)}$$
$$\therefore \delta = \mu(1-\phi_1)$$

وبالتعويض عن $\delta$ في صيغة النموذج نجد

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t$$
$$= \mu(1-\phi_1) + \phi_1 z_{t-1} + a_t$$
$$= \mu + \phi_1 (z_{t-1} - \mu) + a_t$$
$$(z_t - \mu) - \phi_1 (z_{t-1} - \mu) = a_t$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة في $z_{t-k} - \mu$ ونأخذ التوقع أي

$$E\left[(z_{t-k} - \mu)(z_t - \mu)\right] - \phi_1 E\left[(z_{t-k} - \mu)(z_{t-1} - \mu)\right] = E\left[(z_{t-k} - \mu) a_t\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

أي

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} = E\left[(z_{t-k} - \mu) a_t\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

وذلك من تعريف 8 و تحل هذه العلاقة تكراريا كما يلي:

$$k = 0: \quad \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 = E\left[(z_t - \mu) a_t\right]$$

لإيجاد الطرف الأيمن نقوم بالتالي:

$$E\left[a_t\left(z_t-\mu\right)\right]-\phi_1 E\left[a_t\left(z_{t-1}-\mu\right)\right]=E\left(a_t a_t\right)$$
$$E\left[a_t\left(z_t-\mu\right)\right]-\phi_1\times(0)=\sigma^2$$
$$\therefore E\left[a_t\left(z_t-\mu\right)\right]=\sigma^2$$

إذا

$$\gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2$$

$$k=1:\quad \gamma_1-\phi_1\gamma_0=E\left[\left(z_{t-1}-\mu\right)a_t\right]=0$$

في الحقيقة

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots$$

بقسمة المعادلة الأخيرة علي $\gamma_0$ نجد

$$\rho_k-\phi_1\rho_{k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots$$

أو

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

وبما ان $\rho_0=1$ فإن:

$$\rho_1=\phi_1\rho_0=\phi_1$$
$$\rho_2=\phi_1\rho_1=\phi_1^{\,2}$$
$$\vdots$$
$$\rho_k=\phi_1^k$$

أو بشكل دالة

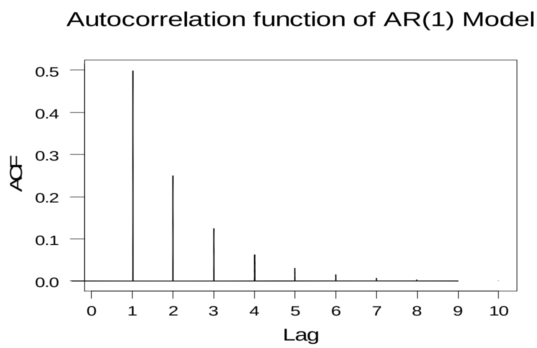
$$\rho_k=\phi_1^{|k|},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

وذلك لأن $\rho_{-k}=\rho_k,\quad \forall k$ سوف ننظر من الآن وصاعدا للشق الموجب من $\rho_k$ أي

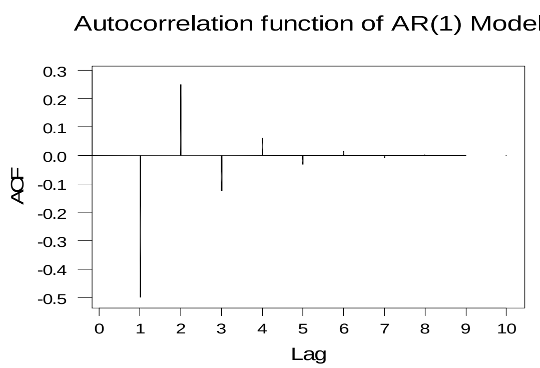
$$\rho_k=\phi_1^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

هذه الدالة لها الشكل التالي:

1- عندما تكون $\phi_1>0$




2- عندما تكون $\phi_1 < 0$




نشتق الآن دالة الترابط الذاتي الجزئي

من تعريف 11 نجد

$\phi_{00} = 1,\quad$ by definition

$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1,\quad$ by definition

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1-\phi_1^2} = 0$$

$\vdots$

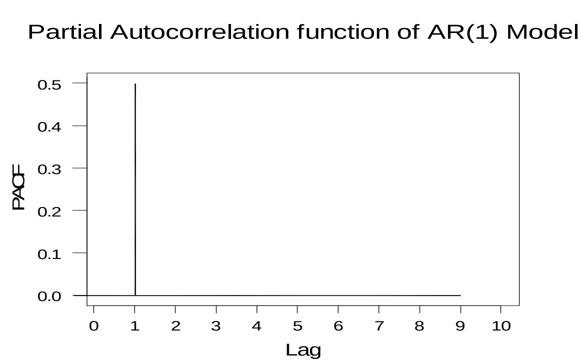
$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{k-1} & \phi_1^{k-2} & \cdots & \phi_1^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^k \\ \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{k-1} & \phi_1^{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{|\ \ | > 0}$$

محددة البسط تساوي صفرا لأن العامود الأخير يساوي العامود الأول مضروبا في $\phi_1$ ونكتب دالة الترابط الذاتي الجزئي علي الشكل الدالي:

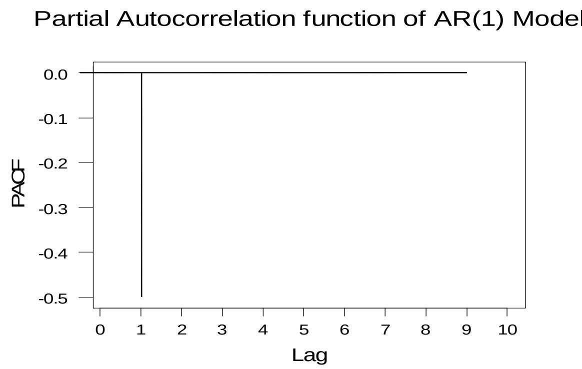
$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \phi_1, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:

1- عندما تكون $\phi_1 > 0$



2- عندما تكون $\phi_1 < 0$




ملاحظة: دائما لاترسم أي من $\rho_0 = 1$ او $\phi_{00} = 1$ في الأشكال البيانية.

**<u>مناقشة النموذج:</u>**

1- عندما تكون $|\phi_1| < 1$ (شرط الإستقرار) فإن $E(z_t) = \delta/(1-\phi_1)$ وهوثابت لجميع قيم $t$

2- دالة الترابط الذاتي دالة للتخلف $k$ فقط ولاتعتمد علي الزمن $t$

3- دالة الترابط الذاتي تتخامد اسيا في إتجاه واحد إبتداءا من $\rho_1$ عندما تكون $\phi_1 > 0$ وتتخامد اسيا مترددة بين القيم الموجبة والسالبة عندما تكون $\phi_1 < 0$

4- دالة الترابط الذاتي الجزئي لها قيمة واحدة غير صفرية ( مع عدم النظر الي $\phi_{00}$ ) ويكون إتجاهها حسب إشارة $\phi_1$ ومقدارها يساوي $|\phi_1|$

## <u>ثالثا: نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية ARMA(2,0) = AR(2) :</u>

ويكتب علي الشكل:

$$\phi_2(B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t$$
$$\left(1-\phi_1 B + \phi_2 B^2\right) z_t = \delta + a_t$$
$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

كالسابق نوجد المتوسط ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right) z_t=\delta+a_t$$

$$z_t=\frac{\delta}{\left(1-\phi_1-\phi_2\right)}+\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} a_t$$

$$E\left(z_t\right)=\frac{\delta}{\left(1-\phi_1-\phi_2\right)}+E\left[\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} a_t\right]$$

الحد الثاني في الطرف الأيمن مجموع لانهائي على الشكل $E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right)$ ولكي ندخل التوقع داخل التجميع اللانهائي لابد ان تكون $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$ متقاربة في المتوسط المربع وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كان $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2<\infty$ وهذا يتحقق إذا حققت معالم الإنحدار الذاتي الشروط التالية:

$$\phi_2-\phi_1<1$$
$$\phi_2+\phi_1<1$$
$$-1<\phi_2<1$$

والتي تسمي **<u>بشروط الإستقرار</u>** ( هذه الشروط تنتج ايضا من كون جزور او أصفار $\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)=0$ خارج دائرة الوحدة ) . إذا تحققت شروط الإستقرار فإن

$$E\left[\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} a_t\right]=\left[\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)^{-1} E\left(a_t\right)\right]=0, \forall t$$

ويكون

$$\mu=E\left(z_t\right)=\frac{\delta}{\left(1-\phi_1-\phi_2\right)}$$

$$\delta=\left(1-\phi_1-\phi_2\right) \mu$$

و بالتعويض عن $\delta$ في صيغة النموذج نجد

$$\begin{aligned} z_t&=\left(1-\phi_1-\phi_2\right) \mu+\phi_1 z_{t-1}+\phi_2 z_{t-2}+a_t \\ &=\mu+\phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right)+\phi_2\left(z_{t-2}-\mu\right)+a_t \end{aligned}$$

$$\left(z_t-\mu\right)-\phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right)-\phi_2\left(z_{t-2}-\mu\right)=a_t$$

نضرب المعادلة السابقة في $z_{t-k}-\mu$ ونأخذ التوقع نجد:

$$E\left[(z_t-\mu)(z_{t-k}-\mu)-\phi_1(z_{t-1}-\mu)(z_{t-k}-\mu)-\phi_2(z_{t-2}-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]$$
$$=E\left[a_t(z_{t-k}-\mu)\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

أي

$$E\left[(z_t-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]-\phi_1E\left[(z_{t-1}-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]-\phi_2E\left[(z_{t-2}-\mu)(z_{t-k}-\mu)\right]$$
$$=E\left[a_t(z_{t-k}-\mu)\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

أو

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}-\phi_2\gamma_{k-2}=E\left[a_t(z_{t-k}-\mu)\right], k=0,\pm1,\pm2,...$$

وذلك من تعريف 8 الآن نحل هذه العلاقة تكراريا كما يلي:

$$k=0:\gamma_0-\phi_1\gamma_{-1}-\phi_2\gamma_{-2}=E\left[a_t(z_t-\mu)\right]=\sigma^2\Rightarrow\gamma_0=\phi_1\gamma_1-\phi_2\gamma_2+\sigma^2$$

وذلك من قاعدة 1

$$k=1:\gamma_1-\phi_1\gamma_0-\phi_2\gamma_1=0\Rightarrow\gamma_1=\phi_1\gamma_0-\phi_2\gamma_1$$
$$k=2:\gamma_2-\phi_1\gamma_1-\phi_2\gamma_0=0\Rightarrow\gamma_2=\phi_1\gamma_1-\phi_2\gamma_0$$

وبشكل عام

$$k\ge1:\gamma_k=\phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}$$

بقسمة الطرفين علي $\gamma_0$ نجد

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2},\quad k=1,2,...$$

( ملاحظة: بوضع المعادلة السابقة علي الشكل $\rho_k-\phi_1\rho_{k-1}-\phi_2\rho_{k-2}=0,\quad k=1,2,...$ نجد انها معادلة فروقية من الدرجة الثانية والتي يمكن حلها بشكل مغلق بإستخدام طرق حل المعادلات الفروقية ولكن هذا خارج نطاق المقرر الحالي)

سوف نحل العلاقة السابقة بالطريقة التكرارية والتي تحتاج الي قيمتين اوليتين:

$$1-\rho_0=1$$
$$2-\rho_1=\phi_1\rho_0+\phi_2\rho_{-1}\Rightarrow\rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

ومنها نجد

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$$

وهكذا الخ...

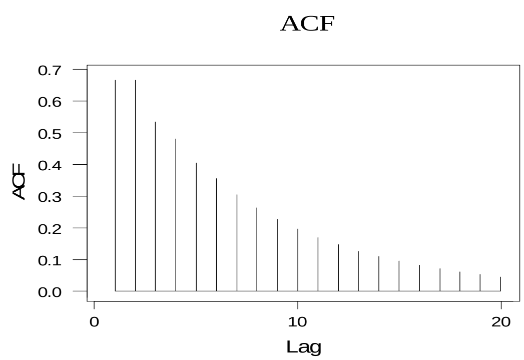
الأشكال التالية هي لدوال الترابط الذاتي لعملية $AR(2)$

1- الشكل (1) $\phi_1 = 0.4, \phi_2 = 0.4$

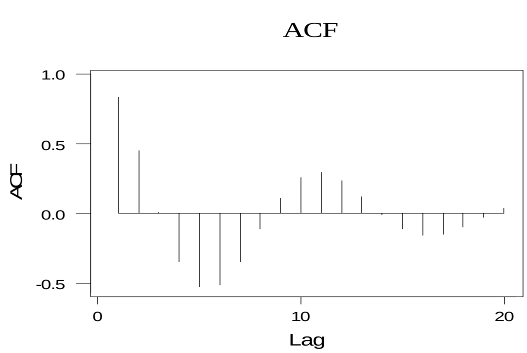
2- الشكل (2) $\phi_1 = 1.5, \phi_2 = -0.8$

3- الشكل (3) $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = -0.6$

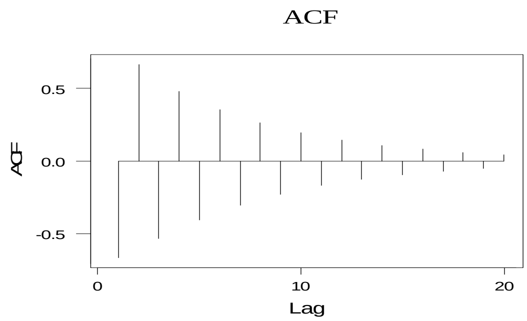
شكل (1)




شكل (2)



شكل (3)




الآن نشتق دالة الترابط الذاتي الجزئي لعملية $AR(2)$ كالتالي:

$$\phi_{00} = 1, \quad \text{by definition}$$
$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \text{by definition}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \neq 0$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 \end{vmatrix}}{|\quad| > 0} = 0$$

وذلك لأن العمود الأخير في محددة البسط هو تركيب خطي من العمودين الأول والثاني، كذلك

$$\phi_{kk}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1=\phi_1\rho_0+\phi_2\rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2=\phi_1\rho_1+\phi_2\rho_0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}\end{vmatrix}}{|\ |>0}=0, k=3,4,\ldots$$

وذلك ايضا لنفس السبب السابق. إذا

$$\phi_{kk}=\begin{cases}1, & k=0\\ \rho_1, & k=1\\ \dfrac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}, & k=2\\ 0, & k\geq 3\end{cases}$$

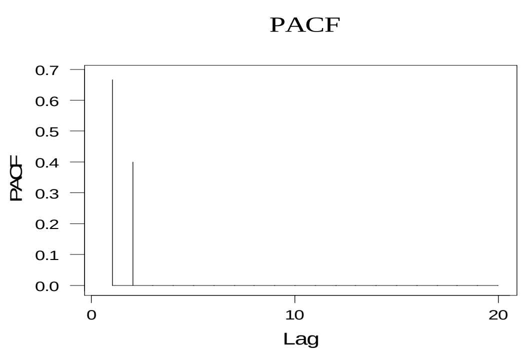
الأشكال التالية هي لدوال الترابط الذاتي الجزئي لعملية $AR(2)$

4- الشكل (4) $\phi_1=0.4, \phi_2=0.4$

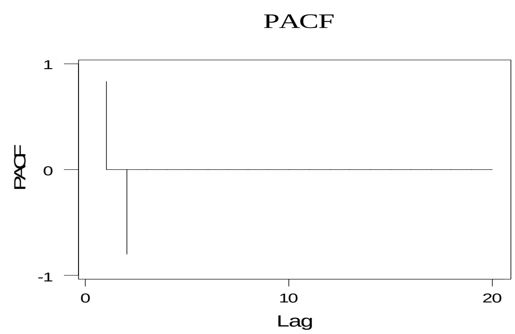
5- الشكل (5) $\phi_1=1.5, \phi_2=-0.8$

6- الشكل (6) $\phi_1=0.5, \phi_2=-0.6$

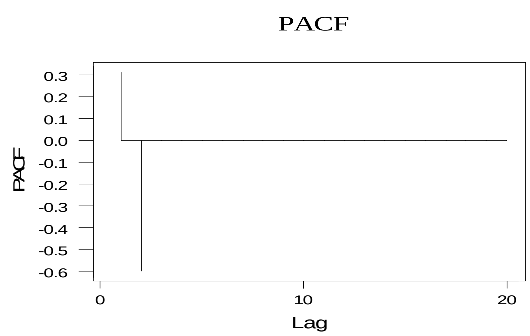
شكل (4)



شكل (5)




شكل (6)




**<u>رابعا: نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولى ARMA(0,1) = MA(1) :</u>**

وتكتب علي الشكل:

$$\phi_0(B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t$$
$$z_t = \delta + (1 - \theta_1 B) a_t$$
$$z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

الآن نوجد المتوسط ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$E(z_t) = E(\delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}) = \delta$$
$$\therefore \mu = \delta$$

ونكتب النموذج

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

بضرب هذه المعادلة في $z_{t-k} - \mu$ وأخذ التوقع نجد

$$E\left[(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu)\right] = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-k} - \mu)a_{t-1}\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

او

$$\gamma_k = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-k} - \mu)a_{t-1}\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبحلها تكراريا

$$k = 0: \quad \gamma_0 = E\left[(z_t - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_t - \mu)a_{t-1}\right]$$

نوجد كل من $E\left[(z_t - \mu)a_t\right]$ و $E\left[(z_t - \mu)a_{t-1}\right]$ كالآتي:

$$E\left[(z_t - \mu)a_t\right] = E(a_t a_t) - \theta_1 E(a_{t-1} a_t) = \sigma^2$$

$$E\left[(z_t - \mu)a_{t-1}\right] = E(a_t a_{t-1}) - \theta_1 E(a_{t-1} a_{t-1}) = -\theta_1 \sigma^2$$

$$\therefore \gamma_0 = \sigma^2 - \theta_1\left(-\theta_1 \sigma^2\right) = \sigma^2\left(1 + \theta_1^2\right)$$

$$k = 1: \quad \gamma_1 = E\left[(z_{t-1} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-1} - \mu)a_{t-1}\right]$$

$$\therefore \quad \gamma_1 = -\theta_1 \sigma^2 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

وذلك بإستخدام القاعدة 1

$$k = 2: \quad \gamma_2 = E\left[(z_{t-2} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-2} - \mu)a_{t-1}\right]$$

$$\therefore \quad \gamma_2 = 0 \Rightarrow \rho_2 = 0$$

أيضا من قاعدة 1 وبشكل عام فإن

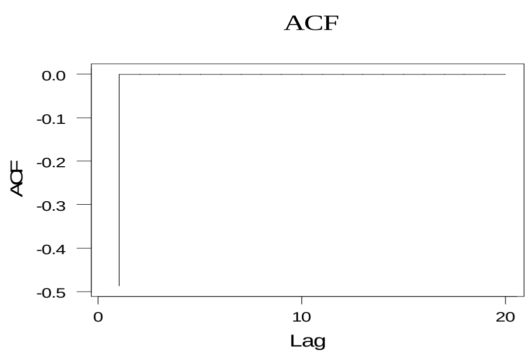
$$k \geq 2: \quad \gamma_k = 0 \Rightarrow \rho_k = 0$$

وهكذا فإن دالة الترابط الذاتي لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولي $MA(1)$ هي علي الشكل:

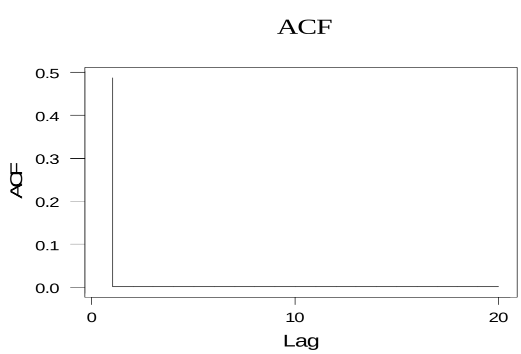
$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

ولها الشكل التالي:

1- عندما $\theta_1 = 0.8$




2- عندما $\theta_1 = -0.8$



الآن نشتق دالة الترابط الجزئي لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولي $MA(1)$

$\phi_{00} = 1, \quad$ by definition

$\phi_{11} = \rho_1, \quad$ by definition

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{1-\rho_1^2} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4} = \frac{-\theta_1^2\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^6}$$

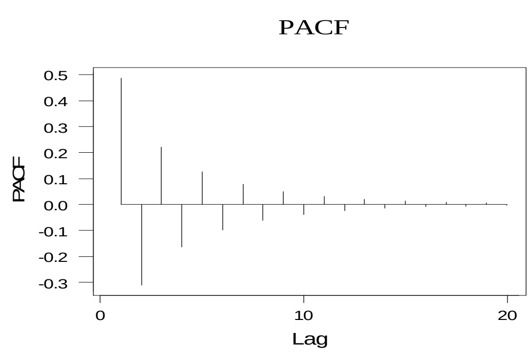
$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^8}$$

وبشكل عام

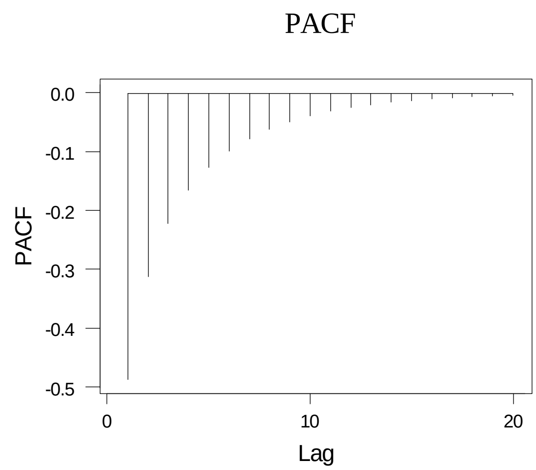
$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}, \quad k > 0$$

ولها الشكل التالي:

-1 عندما $\theta_1 = -0.8$



2- عندما $\theta_1 = 0.8$




## خامسا: نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الثانية ARMA(0,2) = MA(2) :

وتكتب علي الشكل:

$$\phi_0(B)z_t = \delta + \theta_2(B)a_t$$
$$z_t = \delta + \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2\right)a_t$$
$$z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

الآن نوجد المتوسط ودالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي:

$$E(z_t) = E(\delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}) = \delta$$
$$\therefore \mu = \delta$$

ونكتب النموذج

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

بضرب هذه المعادلة في $z_{t-k} - \mu$ وأخذ التوقع نجد

$$E\left[(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu)\right] = E\left[(z_{t-k} - \mu)a_t\right] - \theta_1 E\left[(z_{t-k} - \mu)a_{t-1}\right]$$
$$- \theta_2 E\left[(z_{t-k} - \mu)a_{t-2}\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

او

$$\gamma_k = E\left[\left(z_{t-k}-\mu\right)a_t\right]-\theta_1 E\left[\left(z_{t-k}-\mu\right)a_{t-1}\right]-\theta_2 E\left[\left(z_{t-k}-\mu\right)a_{t-2}\right], \quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

وبحلها تكراريا نجد

$$\gamma_0 = \left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\sigma^2$$
$$\gamma_1 = \left(-\theta_1+\theta_1\theta_2\right)\sigma^2$$
$$\gamma_2 = -\theta_2\sigma^2$$
$$\gamma_k = 0, \quad k>2$$

وبالقسمة علي $\gamma_0$ نجد

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$
$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$
$$\rho_k = 0, \quad k>2$$

وتكتب علي شكل دالة

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=2 \\ 0, & k>2 \end{cases}$$

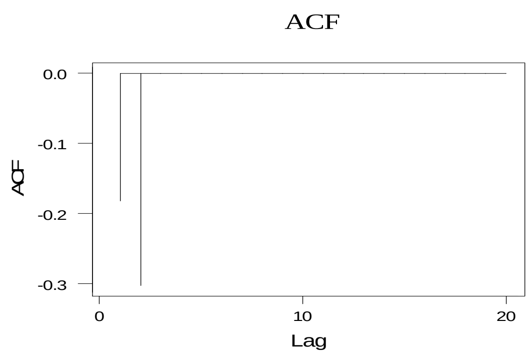
الأشكال التالية هي لدوال الترابط الذاتي لعملية $MA(2)$

7- الشكل (7) $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.4$

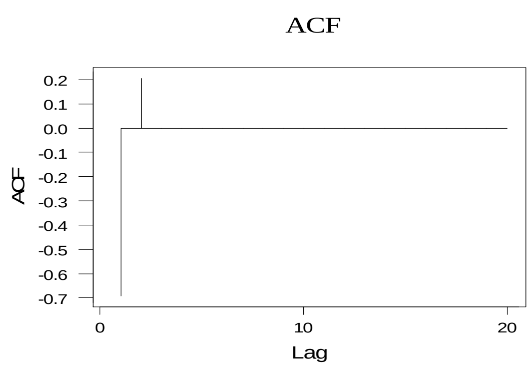
8- الشكل (8) $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = -0.8$

9- الشكل (9) $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.6$

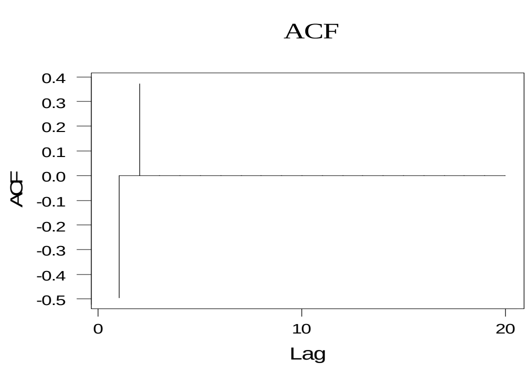
شكل (7)




شكل (8)




شكل (9)



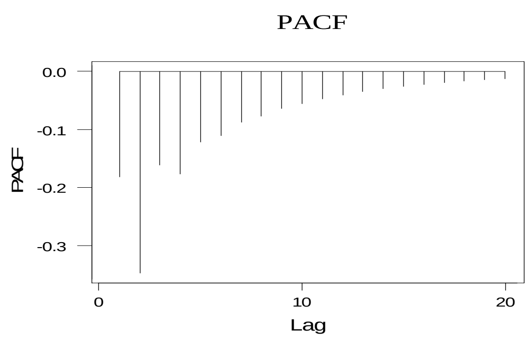
من الصعب جدا إيجاد شكل مغلق لدالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الثانية $MA(2)$ ولهذا سوف نستخدم تعريف 11 ب لحسابها ورسمها تكراريا لقيم المعالم التالية:

-10 الشكل (10) $\theta_1 = 0.4, \theta_2 = 0.4$

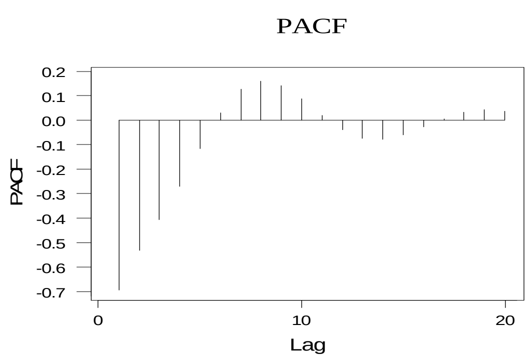
-11 الشكل (11) $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = -0.8$

-12 الشكل (12) $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.6$

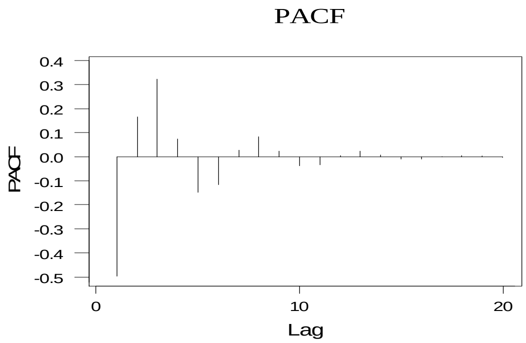
شكل (10)




شكل (11)



شكل (12)




## **سادسا: نموذج المتوسط المتحرك-الإنحدار الذاتي من الدرجة ARMA(1,1) :**

ويكتب على الشكل:

$$\phi_1(B)z_t = \delta + \theta_1(B)a_t$$
$$(1-\phi_1 B)z_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$$
$$z_t - \phi_1 z_{t-1} = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$
$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1},\ a_t \sim WN(0,\sigma^2),\ \phi_1 \neq \theta_1$$

شرط الإستقرار $|\phi_1|<1$ وشرط الإنقلاب $|\theta_1|<1$ وهناك شرط آخر يسمى شرط الإمتساخ Degeneracy Condition وهو $\phi_1 \neq \theta_1$ وهذا الشرط يضمن عدم إمتساخ النموذج إلى نموذج أقل درجة ففي حالة كون $\phi_1 = \theta_1$ فمن العلاقة $(1-\phi_1 B)z_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$ وبالقسمة على $(1-\phi_1 B)$ نجد أن النموذج يصبح $z_t = \delta' + a_t$ حيث $\delta' = \dfrac{\delta}{1-\phi_1}$ وهو $ARMA(0,0)$

نوجد المتوسط كالتالي:

$$(1-\phi_1 B)z_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$$
$$z_t = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}a_t$$
$$E(z_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}E(a_t)$$

وذلك لأن $|\phi_1|<1$ وهكذا

$$E(z_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$$

أي $E(z_t)=\mu=\dfrac{\delta}{1-\phi_1}$ أو $\delta=\mu(1-\phi_1)$ وبالتعويض عن $\delta$ نجد

$$z_t=\mu(1-\phi_1)+\phi_1 z_{t-1}+a_t-\theta_1 a_{t-1}$$
$$(z_t-\mu)-\phi_1(z_{t-1}-\mu)=a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

وبضرب طرفي المعادلة بالحد $(z_{t-k}-\mu),\, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ وأخذ التوقع للطرفين نجد

$$E\left[(z_{t-k}-\mu)(z_t-\mu)\right]-\phi_1 E\left[(z_{t-k}-\mu)(z_{t-1}-\mu)\right]=E\left[(z_{t-k}-\mu)a_t\right]-\theta_1 E\left[(z_{t-k}-\mu)a_{t-1}\right],$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

ومنها

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=E\left[(z_{t-k}-\mu)a_t\right]-\theta_1 E\left[(z_{t-k}-\mu)a_{t-1}\right],k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

وبحلها تكراريا نجد

$$k=0\quad \gamma_0-\phi_1\gamma_1=E\left[(z_t-\mu)a_t\right]-\theta_1 E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]$$

نوجد الآن كل من $E\left[(z_t-\mu)a_t\right]$ و $E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]$ بضرب العلاقة

$$(z_t-\mu)-\phi_1(z_{t-1}-\mu)=a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

في كل من $a_t$ و $a_{t-1}$ وأخذ التوقع

$$E\left[(z_t-\mu)a_t\right]-\phi_1 E\left[(z_{t-1}-\mu)a_t\right]=E\left[a_t a_t\right]-\theta_1 E\left[a_{t-1}a_t\right]$$

ومن القاعدة 1 نجد

$$E\left[(z_t-\mu)a_t\right]-\phi_1(0)=\sigma^2-\theta_1(0)$$
$$E\left[(z_t-\mu)a_t\right]=\sigma^2$$

و

$$E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]-\phi_1 E\left[(z_{t-1}-\mu)a_{t-1}\right]=E\left[a_t a_{t-1}\right]-\theta_1 E\left[a_{t-1}a_{t-1}\right]$$
$$E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]-\phi_1\sigma^2=0-\theta_1\sigma^2$$
$$\therefore E\left[(z_t-\mu)a_{t-1}\right]=\sigma^2(\phi_1-\theta_1)$$

وبالتعويض في الصيغة السابقة نجد

$$k=0\quad \gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2-\theta_1\sigma^2(\phi_1-\theta_1)$$
$$\therefore \gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2\left[1-\theta_1(\phi_1-\theta_1)\right]$$

و

$$k=1 \quad \gamma_1-\phi_1\gamma_0=E\left[\left(z_{t-1}-\mu\right)a_t\right]-\theta_1E\left[\left(z_{t-1}-\mu\right)a_{t-1}\right]$$
$$\therefore \gamma_1-\phi_1\gamma_0=-\theta_1\sigma^2$$

و

$$k=2 \quad \gamma_2-\phi_1\gamma_1=E\left[\left(z_{t-2}-\mu\right)a_t\right]-\theta_1E\left[\left(z_{t-2}-\mu\right)a_{t-1}\right]=0$$
$$\therefore k\geq 2 \quad \gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=0$$

ومن المعادلات

$$\gamma_0-\phi_1\gamma_1=\sigma^2\left[1-\theta_1\left(\phi_1-\theta_1\right)\right]$$

و

$$\gamma_1-\phi_1\gamma_0=-\theta_1\sigma^2$$

نجد

$$\gamma_0=\frac{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$
$$\gamma_1=\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

ومن العلاقتين السابقتين نجد

$$\rho_1=\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

ومن العلاقة

$$\gamma_k-\phi_1\gamma_{k-1}=0, \quad k\geq 2$$

وبالقسمة على $\gamma_0$ نجد

$$\rho_k-\phi_1\rho_{k-1}=0, \quad k\geq 2$$

ويمكن حل هذه المعادلة تكراريا لجميع قيم $k\geq 2$ بإستخدام القيم الأولية $\rho_0=1$ و $\rho_1=\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$ فمثلا

$$\rho_2=\phi_1\rho_1$$
$$\rho_2=\phi_1\frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$
$$\rho_3=\phi_1\rho_2$$

$$\rho_3 = \phi_1^2 \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

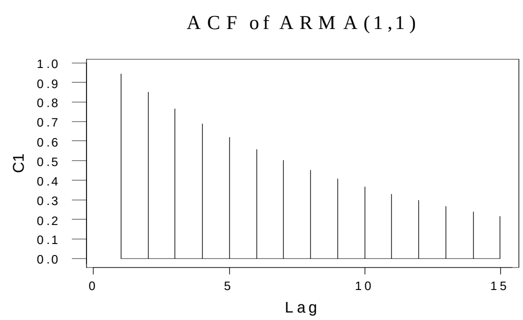
وهكذا.

نكتب دالة الترابط الذاتي لنموذج $ARMA(1,1)$ على الشكل

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}, & k=1 \\ \phi_1\rho_{k-1} & k\geq 2 \end{cases}$$

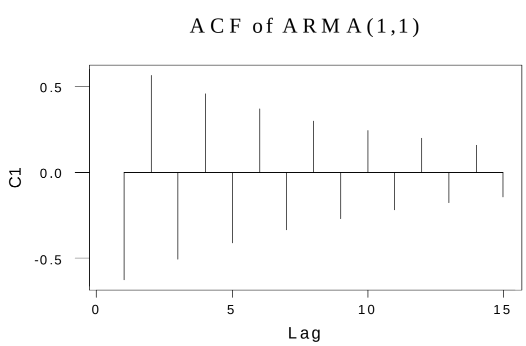
شكل 13 يعطي دالة الترابط الذاتي لقيم $\phi_1 = 0.9, \theta_1 = -0.5$

شكل(13)




شكل 14 يعطي دالة الترابط الذاتي لقيم $\phi_1 = -0.9, \theta_1 = -0.5$

شكل(14)



نلاحظ ان دالة الترابط الذاتي لنموذج $ARMA(1,1)$ تتخامد اسيا في إتجاه واحد أو متردد بين القيم الموجبة والسالبة وهي في هذا تشبه تماما دالة الترابط الذاتي لنموذج $AR(1)$ ماعدى ان التخامد يبدأ من $\rho_1$ ( برهن أن $\rho_k = \phi_1^{k-1}\rho_1, k \ge 2$ )

دالة الترابط الذاتي الجزئي $\phi_{kk}$ تحسب من تعريف 11 أو 11ب كالتالي:

من تعريف 11ب نوجد $\phi_{kk}$ تكراريا

$$\phi_{00} = 1, \text{by definition}$$

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2-\phi_{11}\rho_1}{1-\phi_{11}\rho_1}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3-\phi_{21}\rho_2-\phi_{22}\rho_1}{1-\phi_{21}\rho_1-\phi_{22}\rho_2}, \quad \phi_{21} = \phi_{11}-\phi_{22}\phi_{11}$$

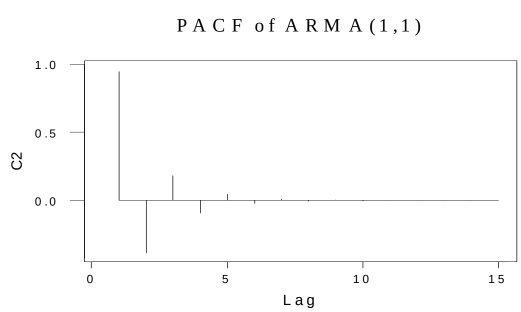
وهكذا تحسب بقية القيم تكراريا.

فمثلا للقيم $\phi_1 = 0.9, \theta_1 = -0.5$ نجد

$$\phi_{11} = 0.944186 \quad \phi_{22} = \text{-}0.384471 \quad \phi_{33} = 0.183710$$
$$\phi_{44} = \text{-}0.908462 \quad \phi_{55} = 0.452979 \quad \phi_{66} = \text{-}0.226337$$
$$\phi_{77} = 0.113154 \quad \phi_{88} = \text{-}0.565702 \quad \phi_{99} = 0.282834$$

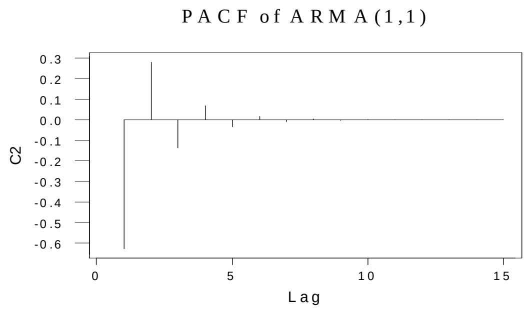
ونرسم هذه القيم في شكل 15

شكل 15




شكل 16 يبين دالة الترابط الذاتي الجزئي لقيم $\phi_1 = -0.9, \theta_1 = -0.5$

شكل 16




نلاحظ ان دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $ARMA(1,1)$ تتخامد اسيا في إتجاه واحد أو مترددد بين القيم الموجبة والسالبة وهي في هذا تشبه تماما دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $MA(1)$ ماعدى ان التخامد يبدأ بعد القيمة الأولية $\phi_{11} = \rho_1$ .

## ملخص خواص نماذج ARMA(p,q) :

### أولا: نموذج AR(p)

ويتميز بالتالي:

1- دالة ترابط ذاتي تمتد لانهائيا وتتكون من خليط من التخامدات الاسية والتخامدات الجيبية.

2- دالة ترابط ذاتي جزئي تتكون من أصفار لقيم التخلفات $k > p$ أي

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = \cdots = \phi_{pp} \neq 0$$
$$\phi_{p+1,p+1} = \phi_{p+2,p+2} = \cdots = 0$$

ويسمى هذا قطعا في دالة الترابط الذاتي الجزئي بعد التخلف $k > p$.

### ثانيا: نموذج MA(q) :

ويتميز بالتالي:

1- دالة ترابط ذاتي تتكون من أصفار لقيم التخلفات $k > q$ أي

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_q \neq 0$$
$$\rho_{q+1,q+1} = \rho_{q+2,q+2} = \cdots = 0$$

ويسمى هذا قطعا في دالة الترابط الذاتي بعد التخلف $k > q$.

2- دالة ترابط ذاتي جزئي تمتد لانهائيا وتتكون من خليط من التخامدات الاسية والتخامدات الجيبية.

لاحظ الإزدواجية Duality بين نموذجي AR و MA.

**ثالثا: النموذج المختلط ARMA(p,q):**

ويتميز بالتالي:

دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للنموذج المختلط تمتد لانهائيا وتتكون من خليط من التخامدات الاسية والتخامدات الجيبية التي تنتهي إلى الصفر كلما زاد التخلف $k$. عندما تكون $k > q - p$ فإن دالة الترابط الذاتي تتحدد من جزء الإنحدار الذاتي للنموذج و عندما تكون $k > p - q$ فإن دالة الترابط الذاتي الجزئي تتحدد من جزء المتوسط المتحرك للنموذج.

## الفصل الثالث

## نماذج المتسلسلات الزمنية غير المستقرة Nonstationar Time Series Models:

### اولا: عدم الإستقرار في المتوسط:

من تعريف 6 لإستقرار متسلسلة زمنية نرى ان الشرط الأول للإستقرار $E(z_t)=\mu=\text{constant} \ \forall t$ يتطلب أن يكون متوسط المتسلسلة ثابت على طول الزمن، فمثلا لنموذج الإنجراف الخطي

$$z_t = b_0 + b_1 t + a_t,\ a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right),\ b_0,b_1 \in (-\infty,\infty)$$

نجد ان المتوسط هو

$$E(z)_t = b_0 + b_1 t$$

وهو غير ثابت بالنسبة للزمن، اي ان شرط الإستقرار الأول غير متحقق في هذه الحالة.

لنحاول التحويل $\nabla z_t$ وذلك بتطبيق عامل التفريق على النموذج نجد

$$\begin{aligned} w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1} &= b_0 + b_1 t + a_t - b_0 - b_1(t-1) - a_{t-1} \\ &= b_1 + a_t - a_{t-1} = b_1 + c_t \end{aligned}$$
$$\therefore w_t = b_1 + c_t,\ c_t \sim WN\left(0,\nu^2\right)$$

( تمرين: أوجد العلاقة بين $\nu^2$ و $\sigma^2$ )

الآن نجد متوسط المتسلسلة الجديدة $w_t$

$$E(w_t) = b_1 = \text{constant} \quad \forall t$$

أي ان تطبيق التحويل $\nabla=(1-B)$ على المتسلسلة غير المستقرة ( أي أخذ التفريق الأول للمتسلسلة) حولها إلى متسلسلة مستقرة.

كمثال آخر نموذج الإنجراف التربيعي

$$z_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + a_t,\ a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right),\ b_0,b_1,b_2 \in (-\infty,\infty)$$

بإيجاد المتوسط

$$E(z_t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

وهو يعتمد على الزمن، أي ان النموذج غير مستقر. بأخذ التحويل $\nabla^2 z_t$ ( أخذ التفريق الثاني) نجد

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 z_t &= \nabla^2\left(b_0+b_1t+b_2t^2+a_t\right)\\
\left(1-2B+B^2\right)z_t &= \left(1-2B+B^2\right)\left(b_0+b_1t+b_2t^2+a_t\right)\\
w_t &= \{b_0-2b_0+b_0\}+\{b_1t-2b_1(t-1)+b_1(t-2)\}+\\
&\quad \left\{b_2t^2-2b_2(t-1)^2+b_2(t-2)^2\right\}+\\
&\quad \{a_t-2a_{t-1}+a_{t-2}\}\\
&= 2b_2+\{a_t-2a_{t-1}+a_{t-2}\}\\
&= b'+h_t,\ h_t\sim WN\left(0,\tau^2\right)
\end{aligned}
$$

و هكذا

$$w_t=\nabla^2 z_t=b'+h_t,\quad h_t\sim WN\left(0,\tau^2\right)$$
$$E\left(w_t\right)=b'=\text{constant}\quad \forall t$$

أي ان تطبيق التحويل $\nabla^2$ (أي اخذ التفريق الثاني) على المتسلسلة غير المستقرة حولها الى مستقرة.

( تمرين: أوجد العلاقة بين $\tau^2$ و $\sigma^2$ ).

بشكل عام إذا كان النموذج غير المستقر على الشكل

$$z_t=b_0+b_1t+\cdots+b_dt^d+a_t,\ \ a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right), b_0,b_1,\cdots,b_d\in(-\infty,\infty)$$

فإن التحويل $\nabla^d z_t$ يحوله إلى نموذج مستقر، أي ان $w_t=\nabla^d z_t$ هو نموذج مستقر.

**تعريف 16:**

**للمتسلسلة غير المستقرة في المتوسط**

$$z_t=b_0+b_1t+\cdots+b_dt^d+a_t,\ \ a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right), b_0,b_1,\cdots,b_d\in(-\infty,\infty)$$

**التحويل $\nabla^d z_t$ وهو التفريق للدرجة $d$ للمتسلسلة يحولها إلى متسلسلة مستقرة.**

**ثانياً: عدم الإستقرار في التباين:**

من تعريف 6 لإستقرار متسلسلة زمنية، الشرط الثاني

$$V\left(z_t\right)=\gamma_0=\text{constant}\quad \forall t$$

يتطلب أن يكون التباين ثابت لجميع قيم $t$.

فمثلا لنموذج المشي العشوائي

$$z_t = z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

نجد من التعويض المتكرر

$$z_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$$

وبإخذ التوقع والتباين

$$E\left(z_t\right) = 0 = \text{constant} \quad \forall t$$
$$V\left(z_t\right) = t\sigma^2$$

ونلاحظ أن التباين يعتمد على الزمن $t$.

بأخذ التفريق الأول

$$w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1} = a_t$$

وبإخذ التوقع والتباين

$$E\left(w_t\right) = 0 = \text{constant} \quad \forall t$$
$$V\left(w_t\right) = \sigma^2 = \text{constant} \quad \forall t$$

إذاً التفريق الأول حول المتسلسلة غير المستقرة في التباين إلى متسلسلة مستقرة.

بشكل عام لو كان التباين دالة لمستوى (متوسط) متغير على الشكل

$$V\left(z_t\right) = cf\left(\mu_t\right)$$

حيث $c > 0$ ثابت و $f(\cdot)$ دالة معروفة تعطى قيمة غير سالبة و $\mu_t$ مستوى أو متوسط يتغير مع الزمن و بالتالي فإن التباين يعتمد على الزمن وهنا نحاول إيجاد تحويل $T\left(z_t\right)$ أي إيجاد دالة $T(\cdot)$ لإستقرار التباين.

التحويل

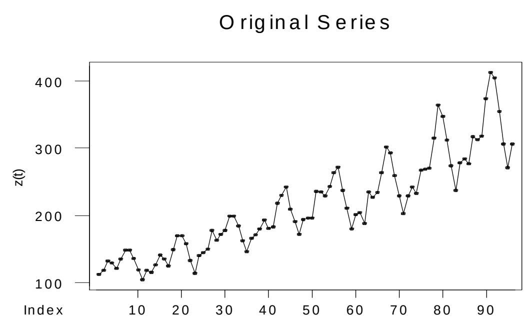
$$y_t = T\left(z_t\right) = \frac{z_t^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

يعطي متسلسلة مستقرة في التباين حيث $\lambda \in (-\infty, \infty)$ هو معلم التحويل. الجدول التالي يعطي القيم الأكثر إستخداما للمعلم $\lambda$ مع التحويلات المقابلة لها:

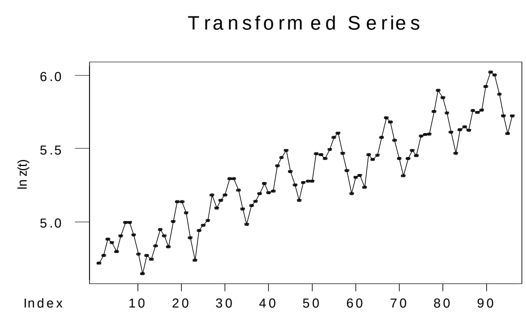
| $\lambda$ | -0.1 | -0.5 | 0.0 | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_t$ | $\frac{1}{z_t}$ | $\frac{1}{\sqrt{z_t}}$ | $\ln z_t$ | $\sqrt{z_t}$ | $z_t$ |

**مثال:**

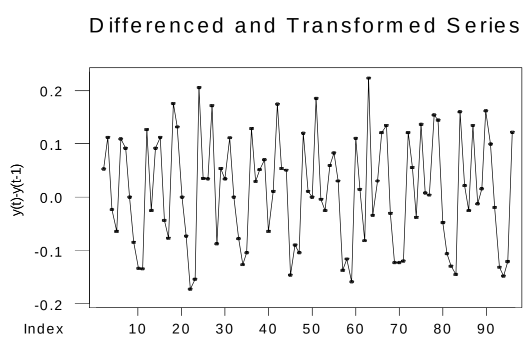
الشكل(ا) لمتسلسلة غير مستقرة في المتوسط والتباين $z_t$




الشكل(ب) المتسلسلة بعد تثبيت التباين بإجراء التحويل $y_t = \ln z_t$




الشكل(ج) المتسلسلة المحولة $y_t$ بعد إجراء التفريق الأول $\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$




لاحظ كيف اصبحت المتسلسلة مستقرة في كل من المتوسط والتباين.

## نماذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة (p,d,q) Autoregressive-Integrated-Moving Average Models ARIMA(p,d,q)

يمكن نمذجة المتسلسلة المستقرة $w_t = \nabla^d z_t$ على شكل نموذج أنحدار ذاتي-متوسط متحرك من الدرجة $(p,q)$ كالتالي:

$$\phi_p(B) w_t = \phi_p(B) \nabla^d z_t = \delta + \theta_q(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

أو

$$\phi_p(B)(1-B)^d z_t = \delta + \theta_q(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

وهذا النموذج يسمى نموذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,d,q)$ حيث $\delta \in (-\infty,\infty)$ معلم الإنجراف.

أمثلة على نماذج الإنحدار الذاتي-التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة $(p,d,q)$:

**اولا: نموذج الإنحدارالذاتي-التكاملي من الدرجة (1,1) أو ARIMA(1,1,0) =ARI(1,1) :**

ويكتب على الشكل

$$\begin{aligned}
&\phi_1(B)(1-B) z_t = \delta + \theta_0(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right) \\
&(1-\phi_1 B)(1-B) z_t = \delta + a_t \\
&\left\{1-(\phi_1+1)B+\phi_1 B^2\right\} z_t = \delta + a_t
\end{aligned}$$

أي

$$z_t = \delta + (\phi_1+1) z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), \quad |\phi_1| < 1$$

**ثانيا: نموذج التكاملي-المتوسط المتحرك من الدرجة (1,1)**

**أو ARIMA(0,1,1) = IMA(1,1) :**

ويكتب على الشكل

$$\begin{aligned}
&\phi_0(B)(1-B) z_t = \delta + \theta_1(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right) \\
&(1-B) z_t = \delta + (1-\theta_1 B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1 \\
&z_t - z_{t-1} = \delta + a_t - \theta_1 a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1
\end{aligned}$$

أي

$$z_t = \delta + z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_t, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), \quad |\theta_1| < 1$$

**ثالثا: نموذج المشى العشوائى بإنجراف Random Walk with Trend Model أو : ARIMA(0,1,0)**

ويكتب على الشكل

$$\phi_0(B)(1-B)z_t = \delta + \theta_0(B)a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$
$$(1-B)z_t = \delta + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

أي

$$z_t = \delta + z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

**دالة الأوزان $\psi(B)$ وتمثيل نماذج ARMA(p,q):**

سبق أن كتبنا نماذج $ARMA(p,q)$ على الشكل

$$\phi_p(B)z_t = \delta + \theta_q(B)a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

أو بشكل الإنحراف عن المتوسط

$$\phi_p(B)(z_t-\mu) = \theta_q(B)a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

في كلتا الحالتين بالقسمة على عامل الإنحدار الذاتي $\phi_p(B)$ نجد

$$z_t = \frac{\delta}{\phi_p(1)} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$
$$z_t - \mu = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

لاحظ ان للنماذج المستقرة النسبة $\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}$ تشكل مسلسلة متقاربة وذلك لأن جذور $\phi_p(B)=0$

تقع خارج دائرة الوحدة ايضا $\mu = \frac{\delta}{\phi_p(1)}$ ولهذا سوف نكتفي بشكل الإنحراف عن المتوسط في

مناقشتنا التالية

$$z_t - \mu = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t, \quad a_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

المسلسلة المتقاربة

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}$$

والتي تكتب على الشكل

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\psi_0 B^0+\psi_1 B^1+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots,\quad \psi_0=1$$

تسمى دالة الأوزان.

**تعريف 17:**

**دالة الأوزان لنموذج** $ARMA(p,q)$ **المستقر تعطى بالعلاقة**

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\psi_0 B^0+\psi_1 B^1+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots,\quad \psi_0=1$$

$$\psi(B)=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^j,\quad \psi_0=1$$

**حيث الأوزان هي** $\psi_0=1,\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$

**ملاحظة:** النموذج الذي على الشكل $a_t \sim WN(0,\sigma^2)$ ,$z_t-\mu=\frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}a_t$ يسمى تمثيل المتوسط المتحرك اللانهائي لنماذج $ARMA(p,q)$.

**أمثلة لدالة الأوزان لبعض النماذج:**

**دالة الأوزان لنموذج AR(1) :**

نموذج AR(1) يكتب على الشكل

$$\phi_1(B)(z_t-\mu)=\theta_0(B)a_t,\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2)$$
$$(1-\phi_1 B)(z_t-\mu)=a_t$$
$$z_t-\mu=\frac{1}{(1-\phi_1 B)}a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1 B)}$$

سوف نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة التالية

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1 B)}$$
$$\psi(B)(1-\phi_1 B)\equiv 1$$
$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)(1-\phi_1 B)\equiv 1$$

لاحظ أن العلاقة الأخيرة هي علاقة تكافؤ أي ان معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة متساوية.

وبمساواة معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة نجد

$$\begin{aligned}
&\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)(1-\phi_1 B)\equiv 1, \quad |\phi_1|<1\\
&B^0:(1)(1)\equiv 1\\
&B^1:\psi_1-\phi_1\equiv 0\Rightarrow \quad \psi_1=\phi_1\\
&B^2:\psi_2-\psi_1\phi_1\equiv 0\Rightarrow \quad \psi_2=\psi_1\phi_1=\phi_1^2\\
&B^3:\psi_3-\psi_2\phi_1\equiv 0\Rightarrow \quad \psi_3=\psi_2\phi_1=\phi_1^3\\
&\vdots\\
&B^j:\psi_j-\psi_{j-1}\phi_1\equiv 0\Rightarrow \quad \psi_j=\psi_{j-1}\phi_1=\phi_1^j
\end{aligned}$$

أي ان الأوزان لنموذج AR(1) هي

$$\psi_j=\phi_1^j, \quad |\phi_1|<1$$

**دالة الأوزان لنموذج MA(1) :**

نموذج MA(1) يكتب على الشكل

$$\begin{aligned}
&\phi_0(B)(z_t-\mu)=\theta_1(B)a_t, \quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)\\
&(z_t-\mu)=(1-\theta_1 B)a_t\\
&z_t-\mu=\psi(B)a_t
\end{aligned}$$

حيث

$$\psi(B)=(1-\theta_1 B)$$

بمساواة معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة نجد

$$\psi_1=-\theta_1, \quad \psi_2=\psi_3=\cdots=0$$

أي

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ -\theta_1, & j=1\\ 0, & j\geq 2\end{cases}$$

**دالة الأوزان لنموذج AR(2) :**

نموذج AR(2) يكتب على الشكل

$$\phi_2(B)(z_t-\mu)=\theta_0(B)a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$
$$\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2\right)(z_t-\mu)=a_t$$
$$z_t-\mu=\frac{1}{\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2\right)}a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\frac{1}{\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2\right)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi(B)\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2\right)\equiv 1$$
$$\left(1+\psi_1B+\psi_2B^2+\psi_3B^3+\cdots\right)\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2\right)\equiv 1$$
$$B^1:\psi_1-\phi_1=0\Rightarrow\quad \psi_1=\phi_1$$
$$B^2:\psi_2-\phi_1\psi_1-\phi_2=0\Rightarrow\quad \psi_2=\phi_1\psi_1+\phi_2=\phi_1^2+\phi_2$$
$$B^3:\psi_3-\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1=0\Rightarrow\quad \psi_3=\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1$$
$$\vdots$$
$$B^j:\psi_j-\phi_1\psi_{j-1}-\phi_2\psi_{j-2}=0\Rightarrow\quad \psi_j=\phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}$$

أي ان الأوزان لنموذج AR(2) هي

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ \phi_1, & j=1\\ \phi_1^2+\phi_2, & j=2\\ \phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}, & j\ge 3\end{cases}$$

**دالة الأوزان لنموذج MA(2) :**

نموذج MA(2) يكتب على الشكل

$$\phi_0(B)(z_t-\mu)=\theta_2(B)a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$
$$(z_t-\mu)=\left(1-\theta_1B-\theta_2B^2\right)a_t$$
$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\left(1-\theta_1B-\theta_2B^2\right)$$

بمساواة معاملات $B^j$ على طرفي العلاقة نجد

$$\psi_1 = -\theta_1, \quad \psi_2 = -\theta_2, \quad \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 \cdots = 0$$

أي

$$\psi_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ -\theta_1, & j = 1 \\ -\theta_2, & j = 2 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$$

**دالة الأوزان لنموذج ARMA(1,1) :**

نموذج ARMA(1,1) يكتب على الشكل

$$\begin{aligned}
&\phi_1(B)(z_t - \mu) = \theta_1(B)a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right) \\
&(1-\phi_1 B)(z_t - \mu) = (1-\theta_1 B)a_t \\
&z_t - \mu = \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}a_t \\
&z_t - \mu = \psi(B)a_t
\end{aligned}$$

حيث

$$\psi(B) = \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots$ بالطريقة السابقة

$$\begin{aligned}
&\psi(B)(1-\phi_1 B) \equiv (1-\theta_1 B) \\
&\left(1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots\right)(1-\phi_1 B) \equiv (1-\theta_1 B) \\
&B^1 : \psi_1 - \phi_1 = -\theta_1 \Rightarrow \quad \psi_1 = \phi_1 - \theta_1 \\
&B^2 : \psi_2 - \phi_1\psi_1 = 0 \Rightarrow \quad \psi_2 = \phi_1\psi_1 = \phi_1(\phi_1 - \theta_1) \\
&B^3 : \psi_3 - \phi_1\psi_2 = 0 \Rightarrow \quad \psi_3 = \phi_1\psi_2 = \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1) \\
&\vdots \\
&B^j : \psi_j - \phi_1\psi_{j-1} = 0 \Rightarrow \quad \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1)
\end{aligned}$$

أي ان الأوزان لنموذج ARMA(1,1) هي

$$\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \quad j \geq 1, \quad |\phi_1| < 1, \quad \phi_1 \neq \theta_1$$

**دالة الأوزان لنموذج ARI(1) :**

نموذج ARI(1) يكتب على الشكل

$$\phi_1(B)(1-B)(z_t-\mu)=a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

$$z_t-\mu=\frac{1}{(1-\phi_1 B)(1-B)}a_t$$

$$z_t-\mu=\psi(B)a_t$$

حيث

$$\psi(B)=\frac{1}{(1-\phi_1 B)(1-B)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi(B)(1-\phi_1 B)(1-B)\equiv 1$$

$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)(1-\phi_1 B)(1-B)\equiv 1$$

$$\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots\right)\left(1-(\phi_1+1)B+\phi_1 B^2\right)\equiv 1$$

$$B^1:\psi_1-(\phi_1+1)=0\Rightarrow\quad \psi_1=\phi_1+1$$

$$B^2:\psi_2-(\phi_1+1)\psi_1+\phi_1=0\Rightarrow\quad \psi_2=(\phi_1+1)\psi_1+\phi_1=(\phi_1+1)^2+\phi_1$$

$$B^3:\psi_3-(\phi_1+1)\psi_2+\phi_1\psi_1=0\Rightarrow\quad \psi_3=(\phi_1+1)\psi_2-\phi_1\psi_1$$

$$\vdots$$

$$B^j:\psi_j-(\phi_1+1)\psi_{j-1}+\phi_1\psi_{j-2}=0\Rightarrow\quad \psi_j=(\phi_1+1)\psi_{j-1}-\phi_1\psi_{j-2}$$

أي ان الأوزان لنموذج ARI(1) هي

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ \phi_1+1, & j=1\\ (\phi_1+1)^2+\phi_1, & j=2\\ (\phi_1+1)\psi_{j-1}-\phi_1\psi_{j-2}, & j\geq 3\end{cases}$$

وأخيرا نوجد

**دالة الأوزان لنموذج المشي العشوائي Random Walk Mdel أو ARIMA(1,0,1)**

ويكتب على الشكل

$$z_t=z_{t-1}+a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

أي

$$z_t - z_{t-1} = a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$
$$(1-B) z_t = a_t$$
$$z_t = \frac{1}{(1-B)} a_t$$

حيث

$$\psi(B) = \frac{1}{(1-B)}$$

و نوجد الأوزان $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots$ بالطريقة السابقة

$$\psi(B)(1-B) \equiv 1$$
$$\left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots\right)(1-B) \equiv 1$$
$$B^1 : \psi_1 - 1 = 0 \Rightarrow \quad \psi_1 = 1$$
$$B^2 : \psi_2 - \psi_1 = 0 \Rightarrow \quad \psi_2 = \psi_1 = 1$$
$$B^3 : \psi_3 - \psi_2 = 0 \Rightarrow \quad \psi_3 = \psi_2 = 1$$
$$\vdots$$
$$B^j : \psi_j - \psi_{j-1} = 0 \Rightarrow \quad \psi_j = \psi_{j-1} = 1$$

أي ان الأوزان لنموذج المشي العشوائي $ARIMA(0,1,0)$ هي

$$\psi_j = 1, \quad j \geq 1$$

**<u>بعض خواص دالة الأوزان $\psi(B)$</u>** :

سبق أن كتبنا نموذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(p,q) على الشكل

$$z_t - \mu = \psi(B) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

وبكتابة هذه العلاقه على الشكل

$$\begin{aligned} z_t - \mu &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1 \end{aligned}$$

وإذا افترضنا ان الأوزان تتقارب اي $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ فإنه يمكن إثبات النظرية التالية:

**نظرية 1:**

**لنموذج الإنحدار الذاتي-المتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(p,q) المستقر والذي يكتب على الشكل**

$$z_t-\mu=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j a_{t-j},\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right),\psi_0=1,\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}\psi_j^2<\infty$$

**1- المتوسط هو**

$$E\left(z_t\right)=\mu,\quad \forall t$$

**2- دالة الترابط الذاتي تعطى بالعلاقة**

$$\rho_k=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

**<u>مثال:</u>** لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة AR(1) وجدنا سابقا دالة الأوزان

$$\psi_j=\phi_1^j,\quad |\phi_1|<1$$

دالة الترابط الذاتي

$$\rho_k=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2}=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^j\phi_1^{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^{2j}}=\frac{\frac{\phi_1^k}{1-\phi_1^2}}{\frac{1}{1-\phi_1^2}}=\phi_1^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

وهي نفس النتيجة السابقة

**<u>تمرين:</u>** بأستخدام نظرية 2 (2) أوجد دوال الترابط الذاتي للنماذج التالية

AR(2), MA(1), MA(2), ARMA(1,1), ARMA(2,1), ARMA(1,2)

# الفصل الرابع

## <u>التنبؤات ذات متوسط مربع الخطأ الأدنى لنماذج *ARMA(p,q)*</u>

## <u>Minimum Mean Square Error Forecasts for *ARMA(p,q)* Models</u>

في الفقرة السابقة كتبنا نموذج الإنحدار الذاتي–المتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(p,q) المستقر على الشكل

$$z_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right), \psi_0 = 1, \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

أو

$$\begin{aligned} z_t - \mu &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1 \end{aligned}$$

**<u>ملاحظة:</u>** هذا ينطبق أيضا على نماذج ARIMA(p,d,q) بشكل عام.

لمتسلسلة زمنية مشاهدة $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ التنبؤات $z_n(\ell), \ell \geq 1$ للقيم المستقبلية $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ يمكن ان تكتب على الشكل

$$z_n(\ell) = \xi_0 a_n + \xi_1 a_{n-1} + \xi_2 a_{n-2} + \cdots, \ell \geq 1$$

القيم المستقبلية $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ تكتب بدلالة النموذج كالتالي

$$z_{n+\ell} - \mu = a_{n+\ell} + \psi_1 a_{n+\ell-1} + \cdots + \psi_{\ell-1} a_{n+1} + \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \cdots, \ell \geq 1$$

متوسط مربع الخطأ يعطى بالعلاقة (أنظر تعريف 5 )

$$\begin{aligned} E\left[z_{n+\ell} - z_n(\ell)\right]^2 &= E\left[a_{n+\ell} + \psi_1 a_{n+\ell-1} + \cdots + \psi_{\ell-1} a_{n+1} + \left(\psi_\ell - \xi_0\right) a_n + \left(\psi_{\ell+1} - \xi_1\right) a_{n-1} + \cdots\right]^2 \\ &= \left(1 + \psi_1^2 + \cdots + \psi_{\ell-1}^2\right)\sigma^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\psi_{\ell+j} - \xi_j\right)^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

متوسط مربع الخطأ الأدنى ينتج من تصغير العلاقة السابقة بالنسبة للأوزان $\xi_j$ لجميع قيم $j$ وهذا يمكن إذا وفقط إذا حققت الأوزان $\xi_j$ العلاقة التالية

$$\xi_j = \psi_{\ell+j}, \quad j = 0,1,2,\cdots, \ell \geq 1$$

وعليه فإن التنبؤات ذات متوسط مربع الخطأ الأدنى MMSE Forecasts تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell) = \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots, \ell \geq 1$$

**نظرية 2:**

**أخطاء التنبؤ تعطى بالعلاقة:**

$$e_n(\ell) = z_{n+\ell} - z_n(\ell) = a_{n+\ell} + \psi_1 a_{n+\ell-1} + \psi_2 a_{n+\ell-2} + \cdots + \psi_{\ell-1} a_{n+1},\ \ell \ge 1$$

**وتباين أخطاء التنبؤ تعطى بالعلاقة:**

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2+\psi_2^2+\cdots+\psi_{\ell-1}^2\right),\ \ell \ge 1$$

الصيغة $z_n(\ell) = \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots,\ \ell \ge 1$ غير عملية لإيجاد التنبؤات للقيم المستقبلية $z_{n+\ell},\quad \ell \ge 1$ وذلك لأننا نحتاج إلى معرفة القيم $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$.

**تعريف 18 :**

**مجموعة المعلومات** $I\left(\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}\right)$ **تكافئ مجموعة المعلومات** $I\left(\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}\right)$ **وذلك بالمعنى أن المجموعة** $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$ **تحتوى على نفس المعلومات عن المتسلسلة الزمنية** $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$.

**<u>ملاحظة:</u>** المتسلسة الزمنية $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ يمكن مشاهدتها وقياسها ولكن المتلسلة $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$ لايمكن مشاهدتها أو قياسها.

**نظرية 3 :**

**المتنبئ ذا متوسط مربع الخطأ الأدنى MMSE Forecasts يعطى بالعلاقة**

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right),\quad \ell \ge 1$$

**أي هو التوقع الشرطي للقيمة المستقبلية** $z_{n+\ell},\quad \ell \ge 1$ **معطى** $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$.

تستخدم نظرية 2 عمليا لإيجاد قيم التنبؤات بدلا من الصيغة

$$z_n(\ell) = \psi_\ell a_n + \psi_{\ell+1} a_{n-1} + \psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots,\ \ell \ge 1$$

وذلك تبعا للملاحظة السابقة.

**قاعدة 2:**

$$1-E\left(a_{n+j}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)=\begin{cases}a_{n+j}, & j\le 0\\ 0, & j>0\end{cases}$$

$$2-E\left(z_{n+j}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)=\begin{cases}z_{n+j}, & j\le 0\\ z_n(j), & j>0\end{cases}$$

نظرية 3 مع القاعدة 2 تعطي طريقة عملية وسهلة لإيجاد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{n+\ell},\quad \ell\ge 1$

**تعريف 19:**

**الدالة** $z_n(\ell),\ \ell\ge 1$ **كدالة لزمن التقدم** $\ell\ge 1$ **عند نقطة الاصل للزمن** $n$ **تسمى دالة التنبؤ.**

## <u>دوال التنبؤ لنماذج *ARIMA(p,d,q)* :</u>

### <u>*اولا: دالة التنبؤ لنموذج AR(1) :*</u>

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج AR(1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t-\mu=\phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right)+a_t,\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right),|\phi_1|<1,\mu\in(-\infty,\infty)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell},\quad \ell\ge 1$.

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned}z_n(\ell)&=E\left(z_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+E\left[\left[\phi_1\left(z_{n+\ell-1}-\mu\right)+a_{n+\ell}\right]\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+E\left[\phi_1\left(z_{n+\ell-1}-\mu\right)\middle|z_n,z_{n-1},\cdots+a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1\end{aligned}$$

أي

$$z_n(\ell) = \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+\ell} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right], \quad \ell \geq 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$\begin{aligned}
\ell = 1: z_n(1) &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_n | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+1} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right] \\
&= \mu + \phi_1 (z_n - \mu) \\
\ell = 2: z_n(2) &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_{n+1} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+2} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right] \\
&= \mu + \phi_1 \left[z_n(1) - \mu\right] \\
\ell = 3: z_n(3) &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}\left[\left(z_{n+2} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \mu\right] + E\left[a_{n+3} | z_n, z_{n-1}, \cdots\right] \\
&= \mu + \phi_1 \left[z_n(2) - \mu\right]
\end{aligned}$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell) = \mu + \phi_1 \left[z_n(\ell - 1) - \mu\right], \ell \geq 1$$

وهي دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج AR(1)

**تعريف 20:**

**شرط الإستمرار Continuity Condition يتطلب أنه عندما تكون $\ell = 1$ فإن**

$$z_n(\ell - 1) = z_n(0) = z_n$$

من نظرية 2 تباين أخطاء التنبؤ تعطى من العلاقة

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2 \left(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots + \psi_{\ell-1}^2\right), \ell \geq 1$$

سبق أن اشتققنا دالة الأوزان لنموذج AR(1) وهي

$$\psi_j = \phi_1^j, \quad |\phi_1| < 1$$

وبالتعويض في صيغة التباين نجد

$$\begin{aligned}
V\left[e_n(\ell)\right] &= \sigma^2 \left(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \cdots + \phi_1^{2(\ell-1)}\right), \ell \geq 1 \\
&= \sigma^2 \frac{1 - \phi_1^{2\ell}}{1 - \phi_1^2}, \ell \geq 1
\end{aligned}$$

**<u>مثال:</u>** متسلسلة زمنية مشاهده وجد انها تتبع النموذج

$$z_t - 0.97 = 0.85\left(z_{t-1} - 0.97\right) + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 0.024\right)$$

إذا كانت المشاهدة الأخيرة هي $z_{156} = 0.49$ ، أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{157}, z_{158}, z_{159}$ وأوجد أخطاء التنبؤ لها.

**<u>الحل:</u>** من الصيغة $z_n\left(\ell\right) = \mu + \phi_1\left[z_n\left(\ell-1\right) - \mu\right], \ell \geq 1$ نجد

$$\begin{aligned}
z_{156}\left(1\right) &= 0.97 + 0.85\left(z_{156} - 0.97\right) \\
&= 0.97 + 0.85\left(0.49 - 0.97\right) = 0.56 \\
z_{156}\left(2\right) &= 0.97 + 0.85\left(z_{156}\left(1\right) - 0.97\right) \\
&= 0.97 + 0.85\left(0.56 - 0.97\right) = 0.62 \\
z_{156}\left(3\right) &= 0.97 + 0.85\left(z_{156}\left(2\right) - 0.97\right) \\
&= 0.97 + 0.85\left(0.62 - 0.97\right) = 0.68
\end{aligned}$$

والتباينات

$$V\left[e_n\left(\ell\right)\right] = \sigma^2 \frac{1-\phi_1^{2\ell}}{1-\phi_1^2}, \ell \geq 1$$

$$V\left[e_{156}\left(1\right)\right] = 0.024$$

$$V\left[e_{156}\left(2\right)\right] = 0.024 \frac{1-\left(0.85\right)^4}{1-\left(0.85\right)^2} = 0.041$$

$$V\left[e_{156}\left(2\right)\right] = 0.024 \frac{1-\left(0.85\right)^6}{1-\left(0.85\right)^2} = 0.054$$

## ***<u>ثانيا: دالة التنبؤ لنموذج AR(2) :</u>***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\left\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\right\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج AR(2) والذي يكتب على الشكل

$$z_t = \mu + \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(z_{t-2} - \mu\right) + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \ \mu \in \left(-\infty, \infty\right),$$
$$\phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \phi_2 + \phi_1 < 1, \quad \left|\phi_2\right| < 1$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ .

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned}
z_n\left(\ell\right) &= E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \\
&= \mu + E\left[\left[\phi_1\left(z_{n+\ell-1} - \mu\right) + \phi_2\left(z_{n+\ell-2} - \mu\right) + a_{n+\ell}\right] \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right], \quad \ell \geq 1
\end{aligned}$$

$$=\mu+E\left[\phi_1\left(z_{n+\ell-1}-\mu\right)\middle|z_n,z_{n-1},\cdots+\phi_2\left(z_{n+\ell-2}-\mu\right)\middle|z_n,z_{n-1},\cdots+a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1$$
$$=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1$$

أي

$$z_n\left(\ell\right)=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+\ell-2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+\ell}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right],\quad \ell\ge 1$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$\begin{aligned}
\ell=1: z_n\left(1\right)&=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n-1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]\\
&=\mu+\phi_1\left(z_n-\mu\right)+\phi_2\left(z_{n-1}-\mu\right)\\
\ell=2: z_n\left(2\right)&=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_n\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]\\
&=\mu+\phi_1\left[z_n\left(1\right)-\mu\right]+\phi_2\left(z_n-\mu\right)\\
\ell=3: z_n\left(3\right)&=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+1}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+3}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]\\
&=\mu+\phi_1\left[z_n\left(2\right)-\mu\right]+\phi_2\left[z_n\left(1\right)-\mu\right]\\
\ell=4: z_n\left(4\right)&=\mu+\phi_1\mathrm{E}\left[\left(z_{n+3}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+\phi_2\mathrm{E}\left[\left(z_{n+2}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\mu\right]+E\left[a_{n+4}\middle|z_n,z_{n-1},\cdots\right]\\
&=\mu+\phi_1\left[z_n\left(3\right)-\mu\right]+\phi_2\left[z_n\left(2\right)-\mu\right]
\end{aligned}$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n\left(\ell\right)=\mu+\phi_1\left[z_n\left(\ell-1\right)-\mu\right]+\phi_2\left[z_n\left(\ell-2\right)-\mu\right],\ \ell\ge 1$$

وهي دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج AR(2)

ويمكن حساب تباينات أخطاء التنبؤ من نظرية 2 ودالة الأوزان

$$\psi_j=\begin{cases}1, & j=0\\ \phi_1, & j=1\\ \phi_1^2+\phi_2, & j=2\\ \phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}, & j\ge 3\end{cases}$$

***ثالثا: دالة التنبؤ لنموذج ARIMA(0,1,1) :***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج ARIMA(0,1,1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=z_{t-1}+a_t-\theta_1 a_{t-1},\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$.

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned} z_n(\ell) &= E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \\ &= E\left(z_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \end{aligned}$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$\begin{aligned} & z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \\ & \ell = 1: \quad z_n(1) = E\left(z_n \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_n \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) \\ & \qquad\qquad = z_n - \theta_1 a_n \\ & \ell = 2: \quad z_n(2) = E\left(z_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+2} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) \\ & \qquad\qquad = z_n(1) \\ & \ell = 3: \quad z_n(3) = E\left(z_{n+2} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + E\left(a_{n+3} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) \\ & \qquad\qquad = z_n(2) \end{aligned}$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell) = z_n(\ell - 1), \quad \ell \geq 2$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج ARIMA(0,1,1) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell) = \begin{cases} z_n - \theta_1 a_n, & \ell = 1 \\ z_n(\ell - 1), & \ell > 1 \end{cases}$$

***<u>رابعا : دالة التنبؤ لنموذج MA(1) :</u>***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج MA(1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$.

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned} z_n(\ell) &= E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \\ &= \mu + E\left(a_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - \theta_1 E\left(a_{n+\ell-1} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \geq 1 \end{aligned}$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$
\begin{aligned}
&z_n(\ell)=\mu+E\left(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\ge 1\\
&\ell=1:\quad z_n(1)=\mu+E\left(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_n|z_n,z_{n-1},\cdots\right)\\
&\qquad\qquad =\mu-\theta_1 a_n\\
&\ell=2:\quad z_n(2)=\mu+E\left(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)\\
&\qquad\qquad =\mu\\
&\ell=3:\quad z_n(3)=\mu+E\left(a_{n+3}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)\\
&\qquad\qquad =\mu
\end{aligned}
$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell)=\mu,\quad \ell\ge 2$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج MA(1) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell)=\begin{cases}\mu-\theta_1 a_n, & \ell=1\\ \mu, & \ell\ge 2\end{cases}$$

***<u>خامسا : دالة التنبؤ لنموذج MA(2) :</u>***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج MA(2) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=\mu+a_t-\theta_1 a_{t-1}-\theta_2 a_{t-2},\quad a_t\sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell},\ \ell\ge 1$ .

من نظرية 3 نجد

$$
\begin{aligned}
z_n(\ell)&=E\left(z_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\ge 1\\
&=\mu+E\left(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2 E\left(a_{n+\ell-2}|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\ge 1
\end{aligned}
$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$
\begin{aligned}
&z_n(\ell)=\mu+E\left(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2 E\left(a_{n+\ell-2}|z_n,z_{n-1},\cdots\right),\quad \ell\ge 1\\
&\ell=1:\quad z_n(1)=\mu+E\left(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_n|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2 E\left(a_{n-1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)\\
&\qquad\qquad =\mu-\theta_1 a_n-\theta_2 a_{n-1}\\
&\ell=2:\quad z_n(2)=\mu+E\left(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2 E\left(a_n|z_n,z_{n-1},\cdots\right)\\
&\qquad\qquad =\mu-\theta_2 a_n\\
&\ell=3:\quad z_n(3)=\mu+E\left(a_{n+3}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_1 E\left(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)-\theta_2 E\left(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots\right)\\
&\qquad\qquad =\mu
\end{aligned}
$$

وهكذا بشكل عام

$z_n(\ell)=\mu,\quad \ell\ge 3$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج MA(2) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell)=\begin{cases}\mu-\theta_1 a_n-\theta_2 a_{n-1}, & \ell=1\\ \mu-\theta_2 a_n, & \ell=2\\ \mu, & \ell\ge 3\end{cases}$$

***<u>سادسا : دالة التنبؤ لنموذج ARMA(1,1) :</u>***

لنفترض اننا شاهدنا المتسلسلة الزمنية $\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n\}$ حتى الزمن $n$ والتي نعتقد انها تتبع نموذج ARMA(1,1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t=\mu+\phi_1(z_{t-1}-\mu)+a_t-\theta_1 a_{t-1},\quad a_t\sim WN(0,\sigma^2),\phi_1\ne\theta_1,|\phi_1|<1$$

نريد أن نتنبأ عن القيم المستقبلية $z_{n+1},z_{n+2},z_{n+3},\cdots$ أو بشكل عام $z_{n+\ell},\quad \ell\ge 1$ .

من نظرية 3 نجد

$$\begin{aligned}z_n(\ell)&=E(z_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots),\quad \ell\ge 1\\ &=\mu+\phi_1 E[(z_{n+\ell-1}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots]+E(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots),\quad \ell\ge 1\end{aligned}$$

نحل هذه العلاقة تكراريا وبإستخدام القاعدة 2

$$z_n(\ell)=\mu+\phi_1 E[(z_{n+\ell-1}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots]+E(a_{n+\ell}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+\ell-1}|z_n,z_{n-1},\cdots),\quad \ell\ge 1$$

$$\begin{aligned}\ell=1:\quad z_n(1)&=\mu+\phi_1 E[(z_n-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots]+E(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_n|z_n,z_{n-1},\cdots)\\ &=\mu+\phi_1(z_n-\mu)-\theta_1 a_n\\ \ell=2:\quad z_n(2)&=\mu+\phi_1 E[(z_{n+1}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots]+E(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+1}|z_n,z_{n-1},\cdots)\\ &=\mu+\phi_1[z_n(1)-\mu]\\ \ell=3:\quad z_n(3)&=\mu+\phi_1 E[(z_{n+2}-\mu)|z_n,z_{n-1},\cdots]+E(a_{n+3}|z_n,z_{n-1},\cdots)-\theta_1 E(a_{n+2}|z_n,z_{n-1},\cdots)\\ &=\mu+\phi_1[z_n(2)-\mu]\end{aligned}$$

وهكذا بشكل عام

$$z_n(\ell)=\mu+\phi_1[z_n(\ell-1)-\mu],\quad \ell\ge 2$$

وهكذا فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدنى لنموذج ARMA(1,1) تعطى بالعلاقة

$$z_n(\ell)=\begin{cases}\mu+\phi_1(z_n-\mu)-\theta_1 a_n, & \ell=1\\ \mu+\phi_1[z_n(\ell-1)-\mu], & \ell\ge 2\end{cases}$$

**تمرين:**

لنموذج ARMA(1,1) والذي يكتب على الشكل

$$z_t = \mu + \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), \phi_1 \neq \theta_1, \left|\phi_1\right| < 1$$

برهن ان عندما تؤول $\phi_1 \to 1$ فإن $\text{ARMA}(1,1) \to \text{IMA}(1,1)$ ومن ثم أوجد دالة التنبؤ لنموذج IMA(1,1) .

**تمرين:**

أوجد دوال التنبؤ وتباين أخطاء التنبؤ لكل من النماذج التالية:

ARIMA(1,1,1), ARIMA(2,1,0), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,2,0), ARIMA(0,2,1), ARIMA(0,2,0).

## حدود التنبؤ Forecasting Limits :

دالة التنبؤ $z_n(\ell), \ell \geq 1$ عند قيمة معينة تعطي مايسمى بتنبؤ النقطة Point Forecast والذي لايكفي او يفيد في إتخاذ قرارات إحصائية عن الظاهرة العشوائية المدروسة لأن

$$P\left(Z_{n+m} = z_n(m)\right) = 0, \text{ for some } m > 0$$

أي أن مقدار تأكدنا ( أو إحتمال) من أن القيمة المستقبلية المراد التنبؤ عنها تساوي القيمة المعطاة من دالة التنبؤ تساوي الصفر أي اننا غير متأكدين إطلاقا وبالتالي لافائدة من التنبؤ.

للتغلب على ذلك وألإستفادة من التنبؤات نستخدم مايسمى بتنبؤ الفترة Interval Forecast وهي عبارة عن فترة مثل $[a, b]$ على خط الأعداد الحقيقية بحيث يكون

$$P\left(a \leq Z_{n+m} \leq b\right) = (1 - \alpha)$$

وبهذا نستطيع أن نحدد درجة تأكدنا من أن القيمة المستقبلية المراد التنبؤ عنها تقع بين القيم $a$ و $b$ بدرجة تأكد أو إحتمال $1-\alpha$ ( أو $100 \times (1-\alpha)\%$ ) فمثلا لو كانت $\alpha = 0.05$ فإننا نكون متأكدين وبإحتمال 95% ان القيمة المستقبلية تقع بين القيم $a$ و $b$ .

**تعريف 21:**

**على إفتراض أن** $a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ **فإن حدود** $100 \times (1-\alpha)\%$ **فترة تنبؤ للقيمة المستقبلية** $z_{n+\ell}, \quad \ell \geq 1$ **تعطى بالعلاقة**

| |
|---|
| $z_n(\ell) \pm u_{\alpha/2}\left\{V\left[e_n(\ell)\right]\right\}^{1/2}$ <br> **حيث** $u_{\alpha/2}$ **المئين** $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ **للتوزيع** $N(0,1)$ . |

فمثلا عندما $\alpha = 0.05$ فإن $u_{0.025} = 1.96$ .

**<u>ملاحظة:</u>** في التعريف إفترضنا أن متسلسلة الضجة البيضاء $a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ وهذا ممكن إعتمادا على نظرية نهاية مركزية.

**<u>مثال:</u>** متسلسلة زمنية مشاهده وجد انها تتبع النموذج

$$z_t - 0.97 = 0.85\left(z_{t-1} - 0.97\right) + a_t, \quad a_t \sim N(0, 0.024)$$

إذا كانت المشاهدة الأخيرة هي $z_{156} = 0.49$ ، أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{157}, z_{158}, z_{159}$ وأوجد أخطاء التنبؤ لها ومن ثم أوجد فترات تنبؤ 95% للقيم المستقبلية.

**<u>الحل:</u>** سبق أن حسبنا في مثال سابق التنبؤات و أخطاء التنبؤ كالتالي:

التنبؤات

$$z_{156}(1) = 0.56,\ z_{156}(2) = 0.62,\ z_{156}(3) = 0.68$$

والتباينات

$$V\left[e_{156}(1)\right] = 0.024, V\left[e_{156}(2)\right] = 0.041, V\left[e_{156}(2)\right] = 0.054$$

فترات تنبؤ 95% للقيم المستقبلية $z_{157}, z_{158}, z_{159}$ نوجدها من صيغة تعريف 21

$$z_n(\ell) \pm u_{\alpha/2}\left\{V\left[e_n(\ell)\right]\right\}^{1/2}$$

$$1 - z_{156}(1) \pm u_{0.025}\left\{V\left[e_{156}(1)\right]\right\}^{1/2} = 0.56 \pm 1.96\sqrt{0.024} = 0.56 \pm 0.304$$

$$2 - z_{156}(2) \pm u_{0.025}\left\{V\left[e_{156}(2)\right]\right\}^{1/2} = 0.62 \pm 1.96\sqrt{0.041} = 0.62 \pm 0.397$$

$$3 - z_{156}(3) \pm u_{0.025}\left\{V\left[e_{156}(3)\right]\right\}^{1/2} = 0.68 \pm 1.96\sqrt{0.054} = 0.68 \pm 0.455$$

أي أن $z_{157} \in (0.256, 0.864)$ بإحتمال 0.95 و وكذلك $z_{158} \in (0.223, 1.017)$ و كذلك أيضا $z_{159} \in (0.225, 1.135)$ .

# الفصل الخامس

## تصميم وبناء نظام تنبؤ إحصائي Designing and Building Statistical Forecasting System :

سبق أن ذكرنا ان الخطوة الأولى لتصميم نظام تنبؤ هي بناء نموذج .إن عملية بناء نموذج إحصائي هي عملية تكرارية Iterative تتكون من تحديد النموذج ، تقدير النموذج (ونقصد بها تقدير معالم النموذج) و إختبار النموذج.

### تعيين أو تحديد النموذج Model Identification (Specification) :

في مرحلة تحديد النموذج نستخدم البيانات أو المشاهدات السابقة ( التاريخ) واي معلومات اخرى عن الكيفية التي تولدت بها المتسلسلة وذلك لإقتراح مجموعة من النماذج المناسبة. ويتم تعيين أو تحديد النموذج حسب الخطوات العريضة التالية:

#### الخطوة الاولى: تحويل تثبيت التباين Variance-stabilizing Transformation :

بعد رسم المتسلسلة في مخطط زمني Time Plot وإجراء بعض الإختبارات الإحصائية لمعرفة فيما إذا كان التباين ثابت، وفي حالة عدم ثبات التباين او إذا كان التباين يتغير مع مستوى المتسلسلة فإننا نطبق التحويل اللوغارتمي على المتسلسلة ونفحصها من جديد فإذا تم تثبيت التباين وإلا نلجأ إلي تطبيق أحد التحويلات التي ذكرناها في جدول صفحة 41.

#### الخطوة الثانية: إختيار درجة التفريق $d$ :

إذا كانت المتلسلسة أو تحويلها غير مستقرة في المتوسط فيجب علينا تحديد درجة التفريق $d$ التي تجعل الممتلسلسة أو تحويلها مستقرة في المتوسط ونقوم بأخذ التفريق الأول ثم نفحص التالي:

1- المخططات الزمنية للممتلسلسة أو تحويلها.

2- مخططات دالتي الترابط الذاتي العيني والترابط الذاتي الجزئي العيني SACF و SPACF .

3- إجراء تفريق آخر إذا احتاج الأمر وإعادة الخطوات 1 و 2 السابقتين.

المخططات الزمنية للمتسلسلات غير المستقرة تبين تغير في المستوى ودالة ترابط ذاتي عيني متخامدة ببطء كما ان دالة الترابط الذاتي الجزئي العيني تعطي قيمة واحدة قريبة من الواحد الصحيح (بغض النظر عن الإشارة) وبقية القيم قريبة جدا من الصفر.

ملاحظة: درجة التفريق $d$ غالبا ما تكون 0 او 1 او 2 .

**الخطوة الثالثة: تحديد $p$ و $q$ :**

بعد ان نحصل على متسلسلة مستقرة في كل من التباين والمتوسط نقوم بتحديد درجة الإنحدار الذاتي $p$ ودرجة المتوسط المتحرك $q$ وذلك بمقارنة أنماط دالتي الترابط الذاتي العيني والترابط الذاتي الجزئي العيني مع الأنماط النظرية لدالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي مسترشدين بخواص نماذج *ARMA(p,q)* المذكورة في صفحة 38 والجدول التالي يعطي هذه الخواص لبعض النماذج الشائعة:

| النموذج | ACF | PACF |
|---|---|---|
| $AR(1)$ و $(1,d,0)$ | تخامد اسي أواسي متردد | $\phi_{kk}=0, k>1$ |
| $AR(2)$ و $(2,d,0)$ | تخامد اسي او تخامد جيبي | $\phi_{kk}=0, k>2$ |
| $AR(p)$ و $(p,d,0)$ | تخامد اسي و/ او تخامد جيبي | $\phi_{kk}=0, k>p$ |
| $MA(1)$ و $(0,d,1)$ | $\rho_k=0, k>1$ | يسيطر عليها تخامد اسي |
| $MA(2)$ و $(0,d,2)$ | $\rho_k=0, k>2$ | يسيطر عليها تخامد اسي او جيبي |
| $MA(q)$ و $(0,d,q)$ | $\rho_k=0, k>q$ | يسيطر عليها تخامد اسي و/ او جيبي |
| $ARMA(1,1)$ و $(1,d,1)$ | تتناقص وتتخامد اسيا من التخلف 1 | تتناقص ويسيطر عليها تخامد اسي من التخلف 1 |
| $ARMA(p,q)$ و $(p,d,q)$ | تتناقص بعد التخلف $q$ - $p$ وتتخامد اسيا و / او جيبيا بعد التخلف $q-p$ | تتناقص بعد التخلف $p-q$ ويسيطر عليها تخامد اسي و/او جيبي بعد التخلف $p-q$ |

**الخطوة الرابعة: إضافة معلم إنجراف:**

إذا كانت المتسلسلة تحتاج إلى تفريق فيجب علينا التأكد فيما إذا كان علينا إضافة إنجراف معلوم $\delta$ إلى النموذج وهذا يتم بمقارنة متوسط العينة $\overline{w}$ للمتسلسلة المفرقة المستقرة مع الخطأ المعياري لهذا المتوسط

$$s.e\left(\overline{w}\right)\cong\left[\frac{c_0}{n}\left(1+2r_1+2r_2+\cdots+2r_K\right)\right]^{1/2}$$

حيث $c_0 = \hat{\gamma}_0$ و $r_1, \cdots, r_K$ هي الترابطات الذاتية العينية المعنوية للدرجة $K$ . ويكون الإختبار

$$H_0 : \delta = 0$$
$$H_1 : \delta \pm 0$$

ونرفض $H_0$ عند $\alpha = 0.05$ إذاكانت $\left| \frac{\bar{w}}{s.e(\bar{w})} \right| > 1.96$ .

## تقدير النموذج Model Estimation :

بعد تحديد شكل النموذج لابد من تقدير معالم النموذج $\delta$ و $\phi_1,\ldots,\phi_p$ و $\theta_1,\ldots,\theta_q$ و $\sigma^2$ وذلك بإستخدام البيانات التاريخية المتوفرة لدينا.

لنفترض ان لدينا المتسلسلة الزمنية المشاهدة $z_1, z_2,\ldots, z_{n-1}, z_n$ والنموذج المقترح

$$\phi_p(B)w_t = \delta + \theta_q(B)a_t,\; a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

أو

$$\phi_p(B)z_t = \delta + \theta_q(B)a_t,\; a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

حيث $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ لايوجد بينها جذور مشتركة وجذور المعادلة $\phi_p(B)=0$ تقع جميعها خارج دائرة الوحدة ( شرط الإستقرار).

هناك طرق كثيرة لتقدير المعالم سنذكر منها هنا فقط طريقتين تدخل ضمن نطاق هذا المقرر وهما طريقة العزوم وطريقة المربعات الدنيا الشرطية.

**أولا: طريقة العزوم The Method of Moments :**

وتعتمد على مساوات عزوم العينة مثل متوسط العينة $\bar{z}$ والترابطات الذاتية للعينة $r_k$ بالعزوم النظرية مثل المتوسط $\mu$ ودالة الترابط الذاتي $\rho_k$ وحل المعادلات الناتجة بالنسبة للمعالم المراد تقديرها.

سوف نستعرض الطريقة للنموذج AR($p$) كالتالي:

1- يقدر المتوسط $\mu$ بالمقدر $\bar{z}$ اي $\hat{\mu} = \bar{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \big/ n$

2- لتقدير $\phi_1,\ldots,\phi_p$ نستخدم العلاقة:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p},\; k>1$$

والتي تنتج من ضرب المعادلة المعرفة لنموذج AR($p$) بالحد $z_{t-k}-\mu$ وأخذ التوقع. في المعادلة السابقة بوضع $k=1,2,\ldots,p$ نحصل على نظام المعادلات المسمى معادلات يول و ووكر Yule-Walker التالي:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{aligned}$$

و بالتعويض عن $\rho_k$ بالمقدر $r_k$ نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\hat{\phi}_1,\ldots,\hat{\phi}_p$ كالتالي:

بوضع معادلات يول و ووكر على الشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix}$$

وبحل هذه المعادلة للمعالم

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & r_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix}$$

تقدر $\sigma^2$ كالتالي

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 \left(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots \hat{\phi}_p r_p\right)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(z_t - \overline{z}\right)^2$$

هو تباين العينة.

**<u>تقدير العزوم لبعض النماذج:</u>**

**<u>1- نموذج AR(1)</u>**

$$z_t - \mu = \phi_1 \left(z_{t-1} - \mu\right) + a_t,\ a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

مقدر العزوم للمعلم $\phi_1$ هو

$$\hat{\phi}_1 = r_1$$

مقدر العزوم للمعلم $\mu$ هو

$$\hat{\mu} = \overline{z}$$

مقدر العزوم للمعلم $\sigma^2$ هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 \left(1 - \hat{\phi}_1 r_1\right)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(z_t - \overline{z}\right)^2$$

## 2- نموذج MA(1)

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1},\ a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

لإيجاد مقدر العزوم للمعلم $\theta_1$ نستخدم العلاقة

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

وبتعويض المعالم بمقدراتها

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^2}$$

وبحل المعادلة للمقدر $\hat{\theta}_1$ نجد

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1}}{2r_1}$$

هذا الحل يعطي قيمتين للمقدر $\hat{\theta}_1$ نأخذ القيمة التي تحقق $\left|\hat{\theta}_1\right| < 1$ . فمثلا لو كانت $r_1 = -0.4$ فإن $\left(\hat{\theta}_1\right)_1 = -0.77$ و $\left(\hat{\theta}_1\right)_2 = 3.27$ وبالتالي يكون مقدر العزوم للمعلم $\theta_1$ هو $\hat{\theta}_1 = -0.77$ .

## 3- نموذج AR(2)

$$z_t - \mu = \phi_1\left(z_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(z_{t-2} - \mu\right) + a_t,\ a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

بإستخدام معادلات يول ووكر مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1$ و $\phi_2$ هي

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

ومنها نجد

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1 - r_1 r_2}{1 - r_1^2}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

مقدر العزوم للمعلم $\mu$ هو

$$\hat{\mu} = \bar{z}$$

مقدر العزوم للمعلم $\sigma^2$ هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2\right)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(z_t - \bar{z}\right)^2$$

### 4- نموذج MA(2)

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2},\ a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\theta_2$ نستخدم العلاقات

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1\left(1-\theta_2\right)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2},\quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

وبتعويض المقدرات $r_1$ و $r_2$ نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\theta_2$

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1\left(1-\hat{\theta}_2\right)}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2},\quad r_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$$

ونحل لكل من $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ونأخذ الحلول التي تحقق $|\theta_2|<1,\quad \theta_2+\theta_1<1,\quad \theta_2-\theta_1<1$.

### 5- نموذج ARMA(1,1)

$$z_t - \mu = \phi_1\left(z_{t-1}-\mu\right) + a_t - \theta_1 a_{t-1},\ a_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\phi_1$ نستخدم العلاقات

$$\rho_1 = \frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1},\quad \rho_2 = \frac{\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_1\right)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}\phi_1$$

وبتعويض المقدرات $r_1$ و $r_2$ نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$ و $\phi_1$

$$r_1 = \frac{\left(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1\right)\left(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1\right)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1},\quad r_2 = \frac{\left(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1\right)\left(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1\right)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}\hat{\phi}_1$$

وبقسمة المعادلة المعرفة للمقدر $r_2$ على المعادلة المعرفة للمقدر $r_1$ نجد

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}$$

وهو مقدر العزوم للمعلم $\phi_1$. لإيجاد مقدر العزوم للمعلم $\theta_1$ نعوض عن $\hat{\phi}_1$ في المعادلة المعرفة للمقدر $r_1$ نجد

$$r_1 = \frac{\left(1-\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1\right)\left(\frac{r_2}{r_1}-\hat{\theta}_1\right)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1}$$

ونحل المعادلة التربيعية الناتجة للمقدر $\hat{\theta}_1$ و نأخذ القيمة التي تحقق $\left|\hat{\theta}_1\right| < 1$ .

**تمارين:** أوجد مقدرات العزوم لمعالم النماذج التالية

ARIMA(1,1,1), ARIMA(2,1,0), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,2,0), ARIMA(0,2,1), ARIMA(0,2,0).

**ملاحظة:** مقدرات العزوم تستخدم كقيم أولية لإيجاد مقدرات أكثر دقة.

## ثانيا: طريقة المربعات الدنيا الشرطية Conditional Least Square Method :

لنماذج ARMA($p$,$q$) والتي تكتب على الشكل

$$\phi_p(B)(z_t-\mu)=\theta_q(B)a_t, \quad a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

حيث $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ لايوجد بينها جذور مشتركة وجذور المعادلة $\theta_q(B)=0$ تقع جميعها خارج دائرة الوحدة ( شرط الإنقلاب). بإعادة كتابة النموذج السابق للأخطاء $a_t$ كالتالي:

$$a_t=\frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)}(z_t-\mu)$$

الطرف الأيمن يمكن إعتبارة كدالة في المعالم $\boldsymbol{\varphi}=\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p\}$ و $\boldsymbol{\theta}=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q\}$ و $\mu$ و يكتب

$$a_t(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)=\frac{\left(1-\phi_1B-\phi_2B^2-\cdots-\phi_pB^p\right)}{\left(1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots-\theta_pB^p\right)}(z_t-\mu)$$

تعتمد طريقة المربعات الدنيا الشرطية و لمشاهدات معطاة $\mathbf{z}=\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ على تصغير الدالة

$$\min_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)=\sum_{t=p+1}^{n}a_t^2\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu\middle|\mathbf{z}\right)$$

وحل المعادلات الطبيعية Normal Equations الناتجة التالية بالنسبة للمقدرات.

$$\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z})\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z})\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu} S_c(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu)\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = \left.\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{t=p+1}^{n} a_t^2(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\mu|\mathbf{z})\right|_{\substack{\boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \mu=\hat{\mu}}} = 0$$

هذه المقدرات تسمى شرطية لأننا هنا نشترط ان القيم $a_p = a_{p-1} = \cdots = a_{p+1-q} = 0$ أي مساوية لتوقعها. ( لاحظ أن التجميع في المعادلات السابقة يبدأ من القيمة $t = p+1$ ).

يقدر التباين $\sigma^2$ من

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_c(\hat{\boldsymbol{\varphi}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\mu)}{n-(p+q+1)}$$

**<u>تقديرات المربعات الدنيا الشرطية لبعض النماذج:</u>**

**<u>1- نموذج AR(1)</u>**

$$z_t - \mu = \phi_1(z_{t-1} - \mu) + a_t,\ a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لتبسيط الإشتقاقات سوف نستبدل $\mu$ بمقدرها $\overline{z}$

$$z_t - \overline{z} = \phi_1(z_{t-1} - \overline{z}) + a_t,\ a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لمشاهدات معطاة $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ نكتب الأخطاء

$$a_t(\phi_1) = (z_t - \overline{z}) - \phi_1(z_{t-1} - \overline{z}),\ t = 2,3,\cdots,n$$

وتربيع الطرفين والجمع على كل المشاهدات

$$a_t^2(\phi_1) = \left[(z_t - \overline{z}) - \phi_1(z_{t-1} - \overline{z})\right]^2,\ t = 2,3,\cdots,n$$
$$S_c(\phi_1) = \sum_{t=2}^{n} a_t^2(\phi_1) = \sum_{t=2}^{n}\left[(z_t - \overline{z}) - \phi_1(z_{t-1} - \overline{z})\right]^2$$

وهذه دالة للمعلم $\phi_1$ فقط ، نشتق المعادلة السابقة بالنسبة للمعلم $\phi_1$ وتكون النتيجة مساوية للصفر عندما $\phi_1 = \hat{\phi}_1$ أي

$$S_c(\phi_1)=\sum_{t=2}^{n}a_t^2(\phi_1)=\sum_{t=2}^{n}\left[(z_t-\overline{z})-\phi_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_1}S_c(\phi_1)=\frac{\partial}{\partial\phi_1}\sum_{t=2}^{n}\left[(z_t-\overline{z})-\phi_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]^2$$

$$=\sum_{t=2}^{n}-2(z_{t-1}-\overline{z})\left[(z_t-\overline{z})-\phi_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_1}S_c(\phi_1)\Big|_{\phi_1=\hat{\phi}_1}=\sum_{t=2}^{n}-2(z_{t-1}-\overline{z})\left[(z_t-\overline{z})-\hat{\phi}_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]=0$$

$$\therefore\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})\left[(z_t-\overline{z})-\hat{\phi}_1(z_{t-1}-\overline{z})\right]=0$$

$$\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})(z_t-\overline{z})-\hat{\phi}_1\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})^2=0$$

أي

$$\hat{\phi}_1=\frac{\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})(z_t-\overline{z})}{\sum_{t=2}^{n}(z_{t-1}-\overline{z})^2}$$

وهو مقدر المربعات الدنيا الشرطية للمعلم $\phi_1$.

تمرين: قارن بين هذا المقدر ومقدر العزوم للمعلم $\phi_1$.

**2- نموذج MA(1)**

$$z_t-\mu=a_t-\theta_1a_{t-1},\ a_t\sim N(0,\sigma^2)$$

لتبسيط الإشتقاقات سوف نستبدل $\mu$ بمقدرها $\overline{z}$ ونعمل على المتسلسلة المعدلة للمتوسط $x_t=z_t-\overline{z}$ فيصبح النموذج

$$x_t=a_t-\theta_1a_{t-1},\ a_t\sim N(0,\sigma^2)$$

وبكتابة المعادلة الأخيرة على الشكل

$$a_t=x_t-\theta_1a_{t-1}$$

ولمشاهدات معطاة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ و بوضع $a_0=0$ شرطيا نكتب الأخطاء

$$\begin{aligned}a_1&=x_1\\a_2&=x_2-\theta_1a_1\\a_3&=x_3-\theta_1a_2\\&\vdots\\a_n&=x_n-\theta_1a_{n-1}\end{aligned}$$

وبالتالي

$$S_c(\theta_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$$

الدالة السابقة غير خطية في المعلم $\theta_1$ و يمكن إيجاد قيمة $\theta_1$ والتي تصغر $S_c(\theta_1)$ بطرق البحث العددية مثل البحث الشبكي في المجال (1,1-) أو إستخدام طريقة جاوس-نيوتن والتي تتلخص في تقريب $a_t = a_t(\theta_1)$ بدالة خطية للمعلم $\theta_1$ حول قيمة أولية $\theta^*$ مثلا أي

$$a_t(\theta_1) \approx a_t(\theta^*) + (\theta_1 - \theta^*)\frac{da_t(\theta^*)}{d\theta_1}$$

المشتقة $\frac{da_t(\theta^*)}{d\theta_1}$ يمكن حسابها تكراريا وذلك بإشتقاق طرفي المعادلة $a_t = x_t - \theta_1 a_{t-1}$ بالنسبة للمعلم $\theta_1$ لنحصل على

$$\frac{da_t(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{\theta_1 da_{t-1}(\theta_1)}{d\theta_1} + a_{t-1}(\theta_1)$$

و بقيمة أولية $\frac{da_0(\theta_1)}{d\theta_1} = 0$ . المعادلة

$$a_t(\theta_1) \approx a_t(\theta^*) + (\theta_1 - \theta^*)\frac{da_t(\theta^*)}{d\theta_1}$$

خطية في المعلم $\theta_1$ وبالتالي بالامكان تصغير مجموع المربعات

$$S_c(\theta_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$$

تحليليا لنحصل علي مقدر جديد وأفضل للمعلم $\theta_1$ ونكرر هذه العملية بإستبدال $\theta^*$ بالمقدر الجديد ونستمر حتى يصبح الفرق بين مقدرين تاليين صغير جدا أو النقص في مجموع المربعات صغير جدا. ممكن إستخدام طريقة العزوم لإيجاد القيمة ألأولية $\theta^*$ لكي نحصل على تقارب سريع. طبعا الطريقة السابقة لاتتم يدويا بل تحتاج إلى حاسب لذلك.

يلاحظ أن تقدير المعالم للنموذج في حالة نماذج المتوسط المتحرك او النماذج المختلطة التي تحوي على متوسط متحرك تشكل تعقيدا لأنها تحوى معالم المتوسط المتحرك بشكل غير خطي ولهذا تحتاج إلى طرق عددية لحلها كما شاهدنا في حالة النموذج MA(1) وهو أبسطها جميعا.

سوف نكتفي في مقررنا هذا على الطريقتين السابقة ولكن نذكر بعض الطرق الاخرى المستخدمة في تقدير معالم النموذج مثل:

1- طريقة الأرجحية العظمى Maximum Likelihood Method

2- طريقة المربعات الدنيا غير الشرطية Unconditional Least Squares Method

3- طرق التقديرغير الخطية Nonlinear Estimation Methods

## تشخيص وإختبار النموذج Model Checking and Diagnostics :

بعد التعرف على نموذج مبدئي وتقدير معالم هذا النموذج نجري بعض التشخيصات على البواقي أو أخطاء التطبيق (انظر تعريف 4) لنرى مدى مطابقة النموذج للمتسلسلة المشاهدة ، ويفترض أن البواقي هي مقدرات لمتسلسلة الضجة البيضاء $a_t$ والتي نفترض انها موزعة طبيعيا بمتوسط صفري وتباين $\sigma^2$. البواقي تعطى بالعلاقة

$$e_t = z_t - \hat{z}_t = \hat{a}_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

أي ان البواقي هي القيم المشاهدة ناقص القيم المطبقة.

يقوم التشخيص والإختبارات على فحص البواقي والنظر في مدى تحقيقها لفرضيات النموذج والتي هي:

1- متوسط صفري

2- العشوائية

3- عدم الترابط

4- موزعة توزيع طبيعي (مستقل ومتطابق بمتوسط صفري وتباين $\sigma^2$ أي $\left( a_t \sim IIDN\left(0, \sigma^2\right) \right)$

لهذا فإننا نجري تشخيص وهو مجموعة من الإختبارات علي البواقي لنري فيما إذا كانت تحقق هذه الشروط وفي هذه الحالة نعتبر النموذج المطبق مقبولا أما إذا فشل احد هذه الإختبارات فيجب علينا إعادة النظر وإقتراح نموذج آخر

**أولا: إختبار المتوسط:**

$$H_0 : E\left(a_t\right) = 0$$
$$H_1 : E\left(a_t\right) \neq 0$$

وهو إختبار بذيلين ونستخدم فية الإحصائة $u = \dfrac{\bar{e}}{se\left(\bar{e}\right)}$ والتي لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $E\left(a_t\right) = 0$ إذا كانت $|u| < 1.96$ ( هذا علي إعتبار ان حجم العينة اكبر من 30 وحدة وهذا دائما متحقق للمتسلسلات الزمنية التي ندرسها )

**ثانيا: إختبار العشوائية:**

نختبر عشوائية البواقي بواسطة إختبار الجري Runs test حول المتوسط وحول الصفر وهو احد الإختبارات اللامعلمية ( يوجد كثير من الإختبارات للعشوائية يدرسها الطالب في المقرر 241 بحث ولكن نكتفي هنا بهذا الإختبار).

**ثالثا: إختبار الترابط أو الإستقلال:**

يختبر ترابط أو إستقلال البواقي بواسطة إختبار الترابط الذاتي Autocorrelation test وذلك بحساب ورسم الترابطات الذاتية العينية SACF للبواقي ومقارنتها مع دالة الترابط الذاتي لمتسلسة الضجة البيضاء.

الإختبار

$$H_0 : \rho_1 = 0$$
$$H_1 : \rho_1 \neq 0$$

حيث الإحصائة $u = \dfrac{r_1}{se(r_1)}$ لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $\rho_1 = 0$ إذا كانت $|u| < 1.96$.

**رابعا: إختبار طبيعية البواقي:**

نختبر في ما إذا كانت البواقي موزعة طبيعيا وذلك بعدة طرق مثل:

1- إختبار حسن التطابق Goodness of Fit Test ونستخدم الإختبار اللامعلمي كولموجوروف- سميرنوف Kolmogorov-Smirnov Test .

2- مخطط الإحتمال الطبيعي Normal Probability Plot .

3- مخطط الربيعات-الربيعات Q-Q Plot .

**بعض المعايير الاخرى لإختيار نموذج المناسب:**

1) إحصائية كيو لـ لجنق-بوكس Ljung-Box Q statistc وتختصر LBQ وتستخدم لإختبار الفرضية:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_K = 0$$

وتعطى بالعلاقة:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}\frac{r_k^2}{n-k} \sim \chi^2(K-m)$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج.

2) معيار المعلومات الذاتي Automatic Information Criteria وتختصر $AIC$ وتعطى بالعلاقة:

$$AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج ونختار النموذج الذي يعطي $\min\limits_{m} AIC(m)$

**أمثلة وحالات دراسة Examples and Case Studies :**

1- البيانات التالية لمتسلسلة زمنية مشاهدة

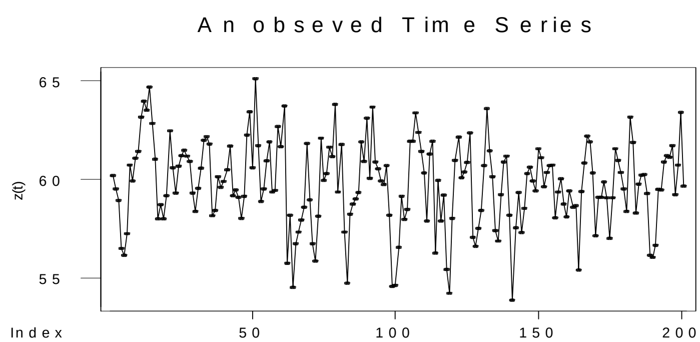
z(t)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60.1815 | 59.5257 | 58.9275 | 56.4828 | 56.1346 | 57.2318 | 60.7196 | 59.9315 |
| 61.0640 | 61.4230 | 63.1547 | 63.9622 | 63.5049 | 64.6886 | 62.8556 | 61.0344 |
| 58.0059 | 58.7108 | 57.9813 | 59.1721 | 62.4654 | 60.5820 | 59.3191 | 60.6643 |
| 61.2223 | 61.4761 | 61.1856 | 60.9225 | 59.3054 | 58.3755 | 59.5353 | 60.5777 |
| 61.9753 | 62.1789 | 61.8108 | 58.1483 | 58.4174 | 60.1325 | 59.6004 | 59.9086 |
| 60.4833 | 61.7008 | 59.1609 | 59.4554 | 59.0903 | 58.0151 | 59.1455 | 62.2658 |
| 63.4411 | 60.5918 | 65.1325 | 61.7122 | 58.8802 | 59.5333 | 60.9492 | 61.9013 |
| 59.3478 | 59.4444 | 62.6899 | 61.6708 | 63.7261 | 55.7339 | 58.1690 | 54.5045 |
| 56.7241 | 57.3334 | 57.9363 | 58.5870 | 61.8370 | 58.9585 | 56.7437 | 55.8451 |
| 58.1281 | 62.1017 | 59.9443 | 60.2990 | 61.6337 | 61.1520 | 63.8189 | 59.3572 |
| 61.7840 | 57.3292 | 54.7163 | 58.2273 | 58.7564 | 59.0087 | 59.3402 | 61.8956 |
| 60.9021 | 63.1070 | 60.0538 | 63.6776 | 60.8942 | 60.5289 | 59.9246 | 59.7252 |
| 60.7001 | 58.1895 | 54.5550 | 54.6083 | 56.5413 | 59.1567 | 57.9624 | 58.4651 |
| 61.9462 | 61.9205 | 63.3933 | 62.3827 | 61.4310 | 60.3373 | 57.8803 | 61.2797 |
| 61.9448 | 56.2599 | 59.9569 | 57.8763 | 59.2086 | 55.4219 | 54.2185 | 58.0143 |
| 60.9805 | 62.1362 | 60.0855 | 60.3843 | 60.8605 | 62.3728 | 57.0642 | 56.6085 |
| 57.5151 | 58.4221 | 60.6919 | 63.5907 | 61.4451 | 60.1458 | 57.3940 | 56.8697 |
| 59.2145 | 60.8962 | 61.1852 | 58.1711 | 53.8560 | 57.5307 | 59.3236 | 57.2961 |
| 58.5278 | 60.3030 | 60.6201 | 59.9346 | 59.4119 | 61.5614 | 61.1107 | 59.6266 |
| 60.3550 | 60.7021 | 60.7227 | 58.0423 | 59.3488 | 60.0377 | 58.7336 | 58.1105 |
| 59.4242 | 58.5790 | 58.6501 | 55.4010 | 59.3839 | 60.8256 | 62.1957 | 61.9152 |
| 60.3319 | 57.1459 | 59.0970 | 59.0997 | 59.8597 | 59.0780 | 56.9972 | 59.0778 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61.5555 | 60.9815 | 60.3563 | 59.5097 | 58.3583 | 63.1777 | 61.8685 | 58.2759 |
| 59.7755 | 60.2052 | 60.2513 | 59.2927 | 56.1494 | 56.0309 | 56.6666 | 59.5015 |
| 59.4755 | 60.9013 | 61.2179 | 61.1168 | 61.7218 | 59.2298 | 60.7356 | 63.4124 |

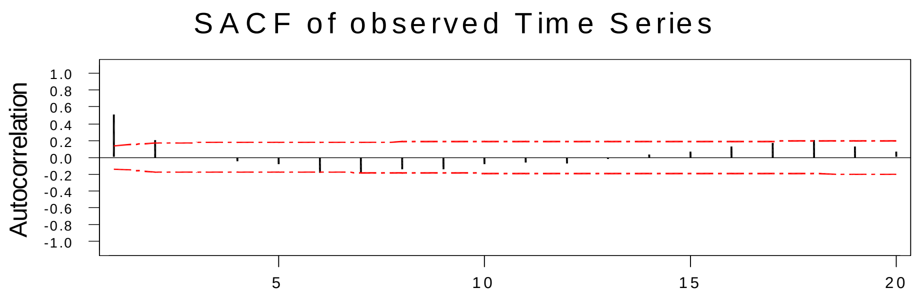
اولا نرسم المتسلسلة في مخطط زمني Time Plot بإستخدام الحزمة الإحصائية MINITAB كالتالي:

```
MTB > TSPlot 'z(t)';
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect;
SUBC>   Title "An obseved Time Series".
```




ثانيا نحسب ونرسم الترابط الذاتي العيني بإستخدام الأمر

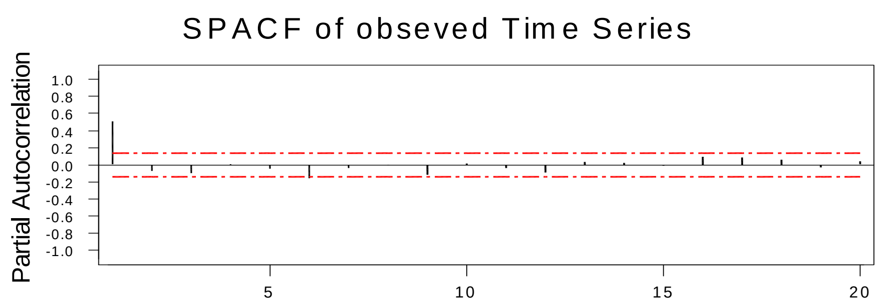
```
MTB > %ACF 'z(t)';
SUBC>   MAXLAG 20;
SUBC>   TITLE"SACF of observed Time Series".
Executing from file: H:\MTBWIN\MACROS\ACF.MAC
```




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.51 | 7.19 | 52.48 | 8 | -0.14 | -1.50 | 81.76 | 15 | 0.07 | 0.68 | 91.23 |
| 2 | 0.20 | 2.32 | 60.78 | 9 | -0.14 | -1.52 | 86.14 | 16 | 0.13 | 1.33 | 94.86 |
| 3 | -0.00 | -0.01 | 60.78 | 10 | -0.09 | -0.90 | 87.73 | 17 | 0.17 | 1.75 | 101.33 |
| 4 | -0.05 | -0.59 | 61.34 | 11 | -0.07 | -0.71 | 88.73 | 18 | 0.20 | 2.06 | 110.63 |
| 5 | -0.08 | -0.95 | 62.82 | 12 | -0.08 | -0.79 | 89.97 | 19 | 0.12 | 1.21 | 113.98 |
| 6 | -0.18 | -2.05 | 69.92 | 13 | -0.02 | -0.21 | 90.05 | 20 | 0.06 | 0.61 | 114.86 |
| 7 | -0.19 | -2.09 | 77.58 | 14 | 0.03 | 0.32 | 90.27 | | | | |

ثالثا نحسب ونرسم الترابط الذاتي الجزئي العيني بإستخدام الأمر

```
MTB > %PACF 'z(t)';
SUBC>   MAXLAG 20;
SUBC>   TITLE"SPACF of obseved Time Series".
Executing from file: H:\MTBWIN\MACROS\PACF.MAC
```




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.51 | 7.19 | 8 | -0.01 | -0.12 | 15 | -0.02 | -0.23 |
| 2 | -0.08 | -1.07 | 9 | -0.12 | -1.63 | 16 | 0.09 | 1.28 |
| 3 | -0.10 | -1.38 | 10 | 0.01 | 0.16 | 17 | 0.08 | 1.20 |
| 4 | 0.00 | 0.04 | 11 | -0.04 | -0.60 | 18 | 0.06 | 0.86 |
| 5 | -0.05 | -0.73 | 12 | -0.09 | -1.34 | 19 | -0.03 | -0.45 |
| 6 | -0.16 | -2.34 | 13 | 0.03 | 0.39 | 20 | 0.04 | 0.52 |
| 7 | -0.04 | -0.50 | 14 | 0.02 | 0.32 | | | |

من أنماط الترابط الذاتي و الترابط الذاتي الجزئي العيني نلاحظ ان المتسلسلة تتبع نموذج AR(1) ولهذا نطبق النموذج المقترح علي المشاهدات بإستخدام الأمر

```
MTB > Name c7 = 'RESI1'
MTB > ARIMA 1 0 0 'z(t)' 'RESI1';
```

```
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 5 c4 c5 c6;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for z(t)

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0         839.667    0.100   53.870
    1         746.819    0.250   44.876
    2         695.840    0.400   35.883
    3         685.086    0.502   29.769
    4         685.054    0.507   29.458
    5         685.054    0.507   29.443
Relative change in each estimate less than  0.0010

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.5073      0.0611      8.30
Constant   29.4429      0.1309    224.98
Mean       59.7571      0.2656

Number of observations:  201
Residuals:    SS = 685.020  (backforecasts excluded)
              MS =   3.442  DF = 199

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                     12               24               36
48
Chi-Square     10.8(DF=11)     27.6(DF=23)     35.9(DF=35)
45.0(DF=47)
```

```
Forecasts from period 201
                                     95 Percent Limits
Period            Forecast              Lower             Upper
Actual
 202           59.7079      56.0707      63.3451
 203           59.7322      55.6537      63.8106
 204           59.7445      55.5600      63.9290
 205           59.7507      55.5394      63.9620
 206           59.7539      55.5357      63.9721
```

ونستنتج التالي:

1- النموذج المقترح هو

$$z_t = 59.76 + 0.51(z_{t-1} - 59.76) + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 3.44\right)$$

2- المعالم المقدرة وإنحرافها المعياري و قيمة t لها هي:

$$\hat{\phi}_1 = 0.51, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.061, \quad t = 8.3$$

$$\hat{\mu} = 59.76, \quad s.e.\left(\hat{\mu}\right) = 0.66$$

$$\hat{\delta} = 29.44, \quad s.e.\left(\hat{\delta}\right) = 0.131, \quad t = 224.98$$

$$\hat{\sigma}^2 = 3.44, \quad with\ d.f. = 199$$

رابعا نفحص البواقي:

1- إختبار متوسط البواقي

```
MTB > ZTest 0.0 1.855 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GDotplot;
SUBC>  GBoxplot.
```

**Z-Test**

```
Test of mu = 0.000 vs mu not = 0.000
The assumed sigma = 1.85
```

| Variable | N | Mean | StDev | SE Mean | Z | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| RESI1 | 201 | -0.002 | 1.851 | 0.131 | -0.01 | 0.99 |

لانرفض الفرضية الصفرية بأن المتوسط يساوي الصفر

2- إختبار عشوائية البواقي

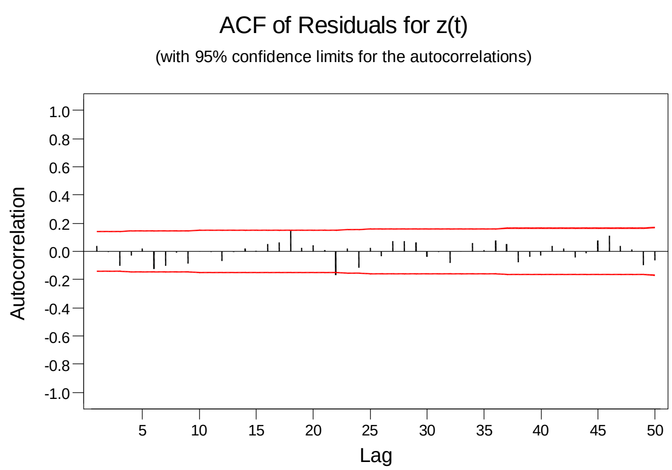
```
MTB > Runs 0 'RESI1'.
```

**Runs Test**

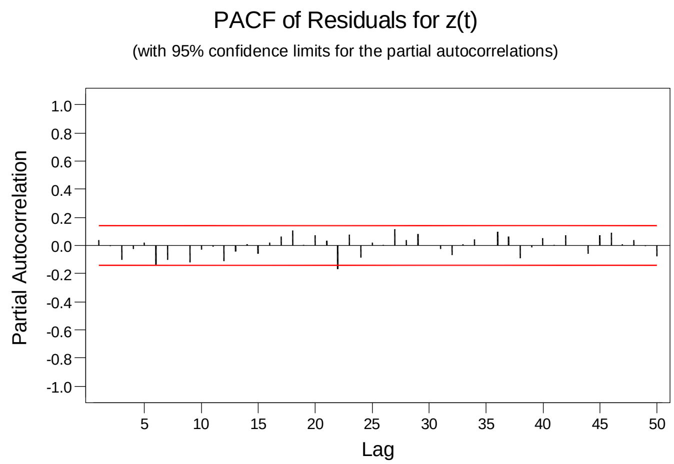
```
    RESI1

    K =      0.0000


    The observed number of runs =  94
    The expected number of runs = 101.0796
   107 Observations above K   94 below
                The test is significant at  0.3149
                Cannot reject at alpha = 0.05
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن البواقي عشوائية

3- الترابط الذاتي للبواقي



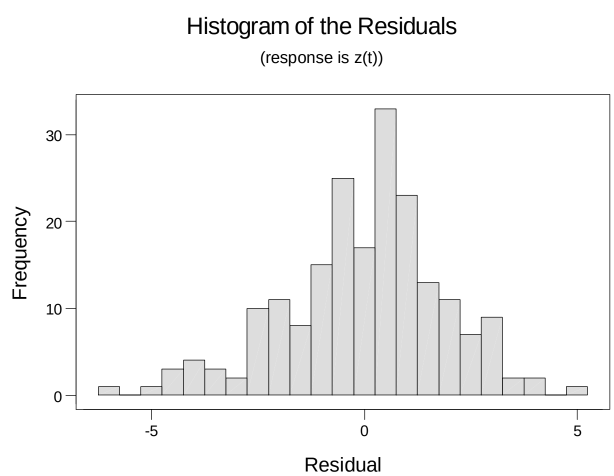

4- الترابط الذاتي الجزئي للبواقي




نلاحظ ان أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي تتبع أنماط متسلسلة الضجة البيضاء

5- إختبار طبيعية البواقي :

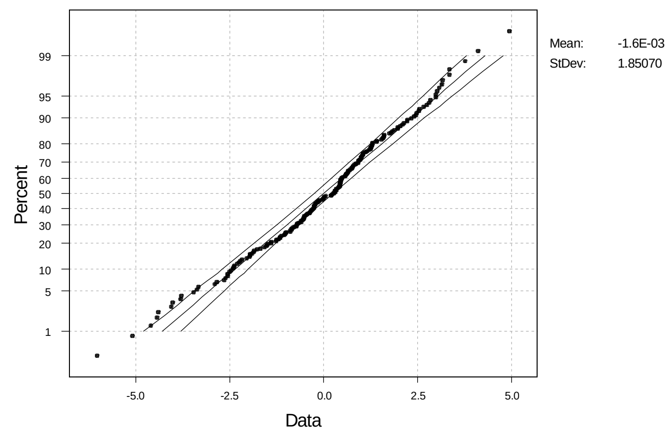
ا- نرسم المضلع التكراري للبواقي




نلاحظ أنه متناظر ولة شكل التوزيع الطبيعي تقريبا. وهذا لايكفي بل يجب ان ننظر الى:

ب- رسم الاحتمال الطبيعي Normal Probability Plot

Normal Probability Plot for RESI1

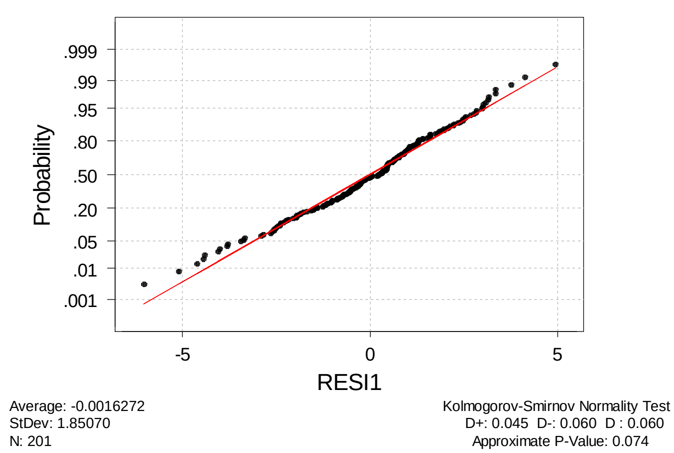



واضح من الرسم أن البواقي طبيعية وللتأكد نقوم:

ج- بإختبار K-S Test لطبيعية البواقي

```
MTB > %NormPlot 'RESI1';
SUBC>   Kstest;
SUBC>   Title "Normal Test for Residuals".
Executing from file: H:\MTBWIN\MACROS\NormPlot.MAC
```

Normal Test for Residuals




ونلاحظ التالي:

الإختبار هو

$$H_0 : \text{Residuals} \sim \mathrm{N}(0,3.44)$$
$$H_1 : \text{Residuals} \nsim \mathrm{N}(0,3.44)$$

إختبار كولموجوروف-سميرنوف اعطى

$$D^+ = 0.045, \quad D^- = 0.06, \quad D = 0.06$$

الـ P-Value للإختبار هي 0.074 وهي أكبر من $\alpha = 0.05$ أي اننا لانرفض الفرضية الصفرية.

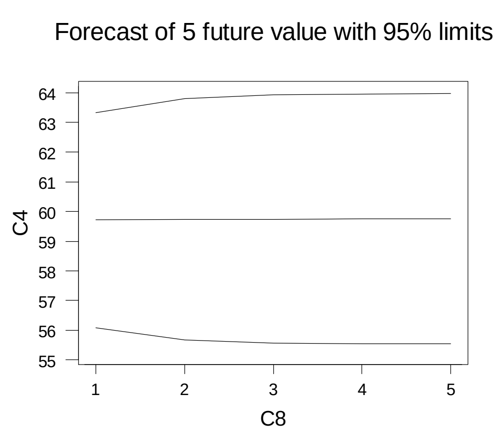
**توليد تنبؤات:**

استخدمنا النموذج للتنبؤ عن 5 قيم مستقبلية

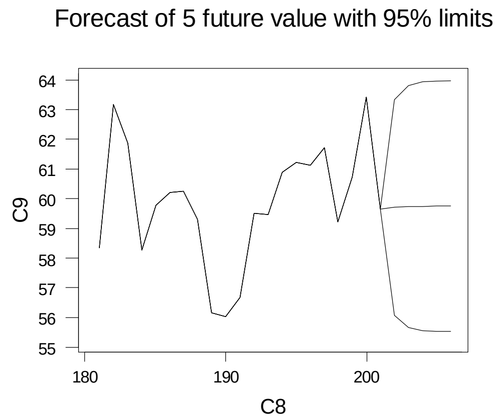
```
Forecasts from period 201
                             95 Percent Limits
Period   Forecast        Lower        Upper       Actual
 202        59.7079      56.0707      63.3451
 203        59.7322      55.6537      63.8106
 204        59.7445      55.5600      63.9290
 205        59.7507      55.5394      63.9620
 206        59.7539      55.5357      63.9721
```

ونرسمها بالأمر التالي

```
Plot C4*C8 C5*C8 C6*C8;
SUBC>   Connect;
SUBC>     Type 1;
SUBC>     Color 1;
SUBC>     Size 1;
SUBC>     Title "Forecast of 5 future value with 95% limits";
SUBC>   Overlay.
```



والرسم التالي يعطي الجزء الأخير من المتسلسلة مع التنبؤات وفترات التنبؤ.



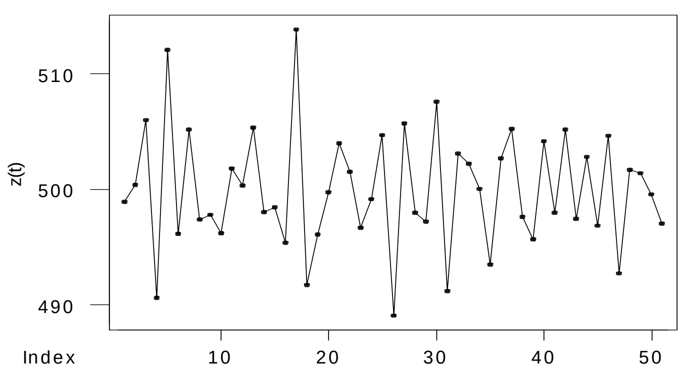

2- البيانات التالية لمتسلسلة زمنية مشاهدة

z(t)

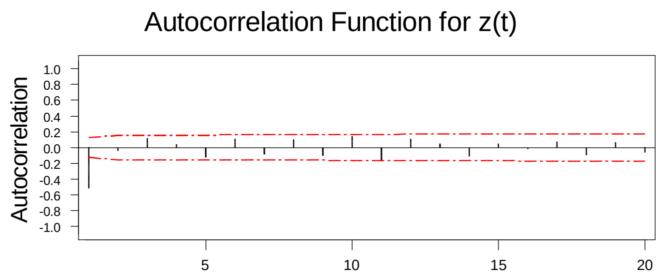
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 499.148 | 496.650 | 511.026 | 488.539 | 498.440 | 507.382 | 496.208 | 494.948 |
| 503.975 | 501.649 | 489.348 | 506.040 | 496.678 | 502.233 | 498.429 | 503.170 |
| 498.758 | 502.969 | 498.229 | 501.605 | 493.371 | 505.884 | 496.227 | 496.806 |
| 493.057 | 506.459 | 502.545 | 497.785 | 506.329 | 496.665 | 491.923 | 504.340 |
| 499.890 | 494.559 | 503.107 | 502.891 | 498.598 | 500.074 | 499.260 | 496.372 |
| 507.416 | 500.508 | 496.830 | 491.981 | 516.373 | 492.286 | 500.356 | 503.506 |
| 498.090 | 498.319 | 507.020 | 493.161 | 499.217 | 508.489 | 494.033 | 496.062 |
| 504.877 | 498.304 | 495.355 | 505.581 | 495.000 | 504.965 | 497.393 | 501.521 |
| 494.918 | 501.527 | 504.712 | 501.064 | 492.352 | 500.664 | 495.431 | 507.886 |
| 499.173 | 494.833 | 504.072 | 497.883 | 495.423 | 507.072 | 496.285 | 506.345 |
| 496.765 | 504.129 | 495.737 | 500.744 | 505.577 | 485.991 | 507.673 | 507.735 |
| 482.567 | 507.594 | 503.580 | 493.866 | 501.819 | 500.921 | 503.415 | 497.295 |
| 500.989 | 498.294 | 501.700 | 495.868 | 501.175 | 503.852 | 499.783 | 497.642 |
| 501.331 | 496.932 | 507.582 | 494.885 | 504.666 | 498.380 | 496.181 | 510.287 |
| 489.314 | 504.394 | 501.928 | 494.814 | 509.407 | 498.060 | 497.133 | 496.029 |
| 502.720 | 499.982 | 503.325 | 495.954 | 504.408 | 500.199 | 494.878 | 503.134 |
| 502.489 | 498.640 | 500.484 | 493.552 | 501.417 | 504.785 | 497.943 | 501.634 |
| 495.691 | 502.173 | 502.066 | 497.130 | 492.318 | 505.517 | 499.299 | 499.611 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 496.252 | 504.346 | 501.082 | 497.626 | 496.757 | 505.475 | 498.787 | 500.388 |
| 499.279 | 504.913 | 493.843 | 506.259 | 498.403 | 497.462 | 499.467 | 505.987 |
| 498.169 | 500.712 | 498.571 | 504.085 | 491.707 | 504.817 | 502.933 | 493.858 |
| 497.015 | 504.204 | 501.703 | 490.683 | 505.429 | 504.336 | 495.430 | 494.857 |
| 503.195 | 506.403 | 498.599 | 487.344 | 514.220 | 490.887 | 511.741 | 497.861 |
| 500.252 | 502.721 | 500.256 | 494.614 | 502.414 | 503.465 | 501.999 | 493.017 |
| 498.158 | 503.746 | 497.643 | 507.438 | 491.418 | 506.649 | 496.078 | 498.931 |
| 500.409 | 506.001 | 490.619 | 512.122 | 496.150 | 505.218 | 497.413 | 497.794 |
| 496.225 | 501.827 | 500.324 | 505.367 | 498.016 | 498.477 | 495.353 | 513.900 |
| 491.726 | 496.063 | 499.779 | 504.012 | 501.542 | 496.680 | 499.134 | 504.717 |
| 489.032 | 505.709 | 497.956 | 497.231 | 507.590 | 491.202 | 503.130 | 502.209 |
| 500.024 | 493.502 | 502.681 | 505.234 | 497.647 | 495.699 | 504.174 | 497.992 |
| 505.194 | 497.421 | 502.823 | 496.877 | 504.640 | 492.716 | 501.701 | 501.387 |
| 499.574 | 497.048 | | | | | | |

اولا : سوف نرسم فقط 50 مشاهدة من هذه المتسلسلة

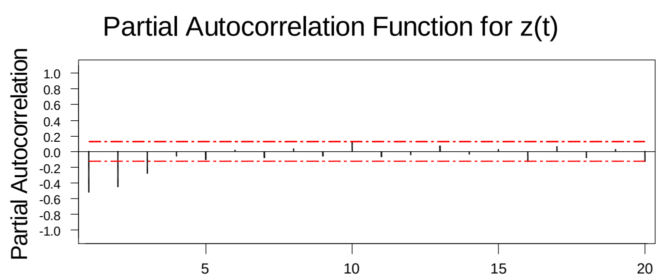



ثانيا: نحسب ونرسم الترابط الذاتي العيني:




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.53 | -8.38 | 71.03 | 8 | 0.10 | 1.19 | 87.98 | 15 | 0.05 | 0.60 | 113.33 |
| 2 | -0.05 | -0.64 | 71.68 | 9 | -0.11 | -1.31 | 91.01 | 16 | -0.02 | -0.26 | 113.47 |
| 3 | 0.12 | 1.52 | 75.39 | 10 | 0.15 | 1.77 | 96.64 | 17 | 0.07 | 0.82 | 114.85 |
| 4 | 0.04 | 0.52 | 75.83 | 11 | -0.18 | -2.16 | 105.32 | 18 | -0.10 | -1.16 | 117.65 |
| 5 | -0.13 | -1.61 | 80.08 | 12 | 0.11 | 1.25 | 108.35 | 19 | 0.07 | 0.75 | 118.81 |
| 6 | 0.11 | 1.39 | 83.33 | 13 | 0.05 | 0.56 | 108.97 | 20 | -0.06 | -0.73 | 119.93 |
| 7 | -0.09 | -1.13 | 85.52 | 14 | -0.12 | -1.36 | 112.61 | | | | |

ثالثا: نحسب ونرسم الترابط الذاتي الجزئي العيني:




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.53 | -8.38 | 8 | 0.04 | 0.65 | 15 | 0.03 | 0.49 |
| 2 | -0.46 | -7.28 | 9 | -0.07 | -1.09 | 16 | -0.13 | -2.09 |
| 3 | -0.29 | -4.52 | 10 | 0.12 | 1.94 | 17 | 0.06 | 1.01 |
| 4 | -0.07 | -1.08 | 11 | -0.07 | -1.15 | 18 | -0.08 | -1.32 |
| 5 | -0.11 | -1.71 | 12 | -0.04 | -0.71 | 19 | 0.03 | 0.44 |
| 6 | 0.02 | 0.30 | 13 | 0.08 | 1.19 | 20 | -0.13 | -2.07 |
| 7 | -0.09 | -1.36 | 14 | -0.04 | -0.59 | | | |

من الأنماط المشاهدة نلاحظ ان المتسلسلة قد تتبع نموذج MA(1) وبتطبيق هذا النموذج نجد

```
MTB > Name c7 = 'RESI1'
MTB > ARIMA 0 0 1 'z(t)' 'RESI1';
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 5 c4 c5 c6;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for z(t)

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0          6081.19    0.100  500.046
    1          5265.34    0.250  500.004
    2          4615.22    0.400  499.980
    3          4109.70    0.550  499.967
    4          3766.60    0.700  499.960
    5          3727.32    0.841  499.959
    6          3687.70    0.797  499.963
    7          3687.08    0.790  499.962
    8          3687.07    0.791  499.962
    9          3687.07    0.790  499.962
Relative change in each estimate less than  0.0010

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
MA   1      0.7905      0.0386     20.50
Constant   499.962       0.051   9708.40
Mean       499.962       0.051

Number of observations:  250
Residuals:    SS = 3684.13  (backforecasts excluded)
              MS =   14.86  DF = 248

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                     12               24               36
48
Chi-Square     26.7(DF=11)     35.9(DF=23)     63.1(DF=35)
82.8(DF=47)

Forecasts from period 250
                               95 Percent Limits
Period    Forecast         Lower         Upper        Actual
 251         502.256       494.700       509.812
 252         499.962       490.330       509.593
 253         499.962       490.330       509.593
 254         499.962       490.330       509.593
```

```
 255            499.962       490.330       509.593
```

ونستنتج التالي:

1- النموذج المقترح هو

$$z_t = 499.962 + a_t - 0.7905 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, 14.86)$$

2- المعالم المقدرة وإنحرافها المعياري و قيمة t لها هي:

$$\hat{\theta}_1 = 0.7905, \quad s.e.\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.0386, \quad t = 20.50$$

$$\hat{\mu} = \hat{\delta} = 499.962, \quad s.e.\left(\hat{\delta}\right) = 0.051, \quad t = 9708.40$$

$$\hat{\sigma}^2 = 14.86, \quad with\ d.f. = 248$$

رابعا نفحص البواقي:

1- إختبار متوسط البواقي

```
MTB > ZTest 0.0 3.847 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**Z-Test**

```
Test of mu = 0.000 vs mu not = 0.000
The assumed sigma = 3.85

Variable      N       Mean     StDev   SE Mean         Z          P
RESI1       250     -0.007     3.847     0.243     -0.03       0.98
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن المتوسط يساوي الصفر

2- إختبار عشوائية البواقي

```
MTB > Runs 0 'RESI1'.
```

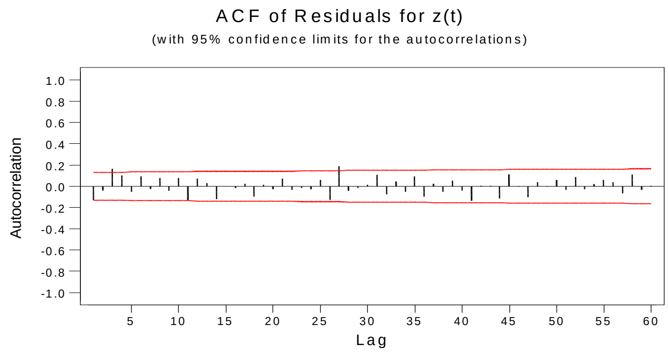
**Runs Test**

```
    RESI1

    K =      0.0000
```

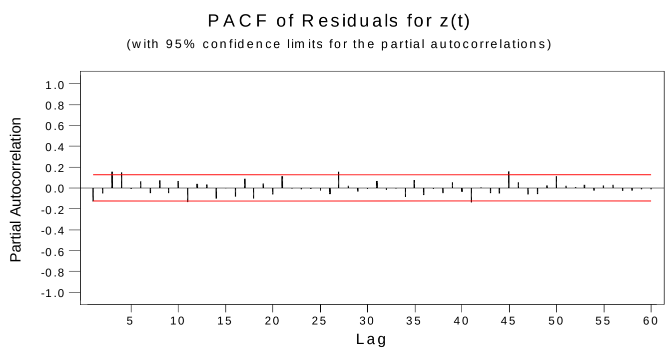
```
 The observed number of runs = 134
 The expected number of runs = 125.9920
126 Observations above K  124 below
           The test is significant at  0.3103
           Cannot reject at alpha = 0.05
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن البواقي عشوائية

3- الترابط الذاتي للبواقي



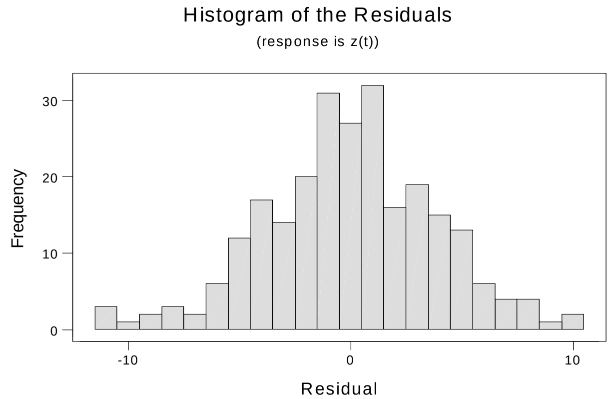

4- الترابط الذاتي الجزئي للبواقي




نلاحظ ان أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي تتبع أنماط متسلسلة الضجة البيضاء

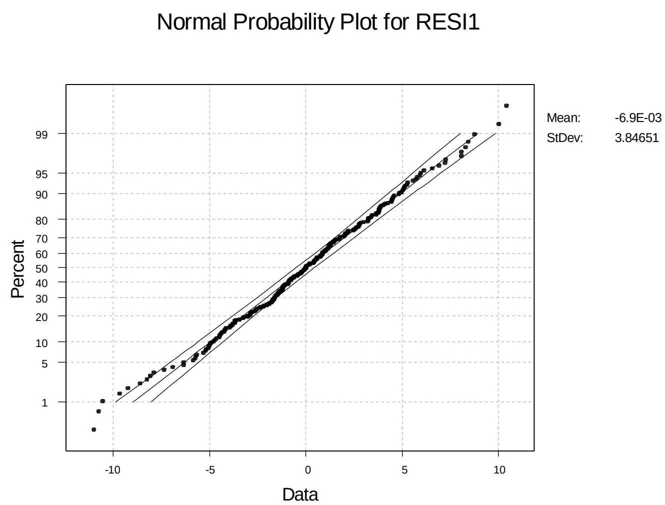
5- إختبار طبيعية البواقي :

ا- نرسم المضلع التكراري للبواقي




نلاحظ أنه متناظر ولة شكل التوزيع الطبيعي تقريبا. وهذا لايكفي بل يجب ان ننظر الى:

ب- رسم الاحتمال الطبيعي Normal Probability Plot




واضح من الرسم أن البواقي طبيعية وللتأكد نقوم:

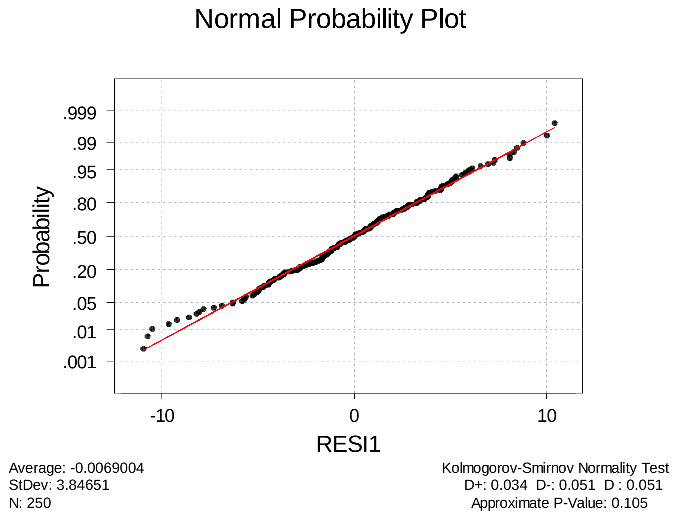
ج- بإختبار K-S Test لطبيعية البواقي

```
MTB > %Qqplot 'RESI1';
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: H:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

```
Normal Dist. Parameter Estimates
```

```
Data     : RESI1
Mean:      -6.9E-03
StDev:     3.84651
MTB > %NormPlot 'RESI1';
SUBC>   Kstest.
Executing from file: H:\MTBWIN\MACROS\NormPlot.MAC
```




إختبار كولموجوروف-سميرنوف اعطى

$D^{+}=0.034,\quad D^{-}=0.051,\quad D=0.051$

الـ P-Value للإختبار هي 0.105 وهي أكبر من $\alpha=0.05$ أي اننا لانرفض الفرضية ان البواقي موزعة طبيعيا.

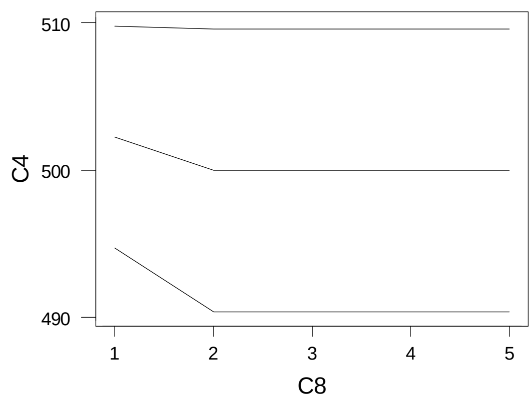
**<u>توليد تنبؤات:</u>**

استخدمنا النموذج للتنبؤ عن 5 قيم مستقبلية

```
Forecasts from period 250
                             95 Percent Limits
Period     Forecast         Lower        Upper        Actual
 251         502.256        494.700      509.812
 252         499.962        490.330      509.593
 253         499.962        490.330      509.593
 254         499.962        490.330      509.593
 255         499.962        490.330      509.593
```

والرسم التالي يعطي التنبؤات مع فترات 95% تنبؤ

Forecast of 5 future values with 95% limits



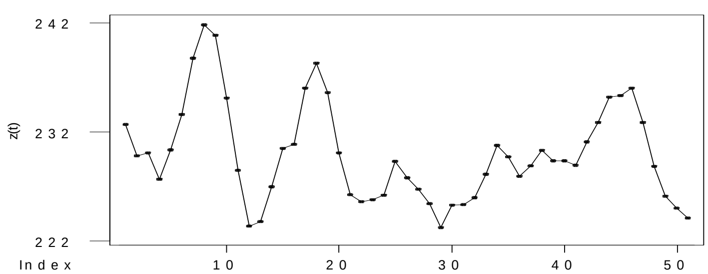

3- البيانات التالية لمتسلسلة زمنية مشاهدة

z(t)

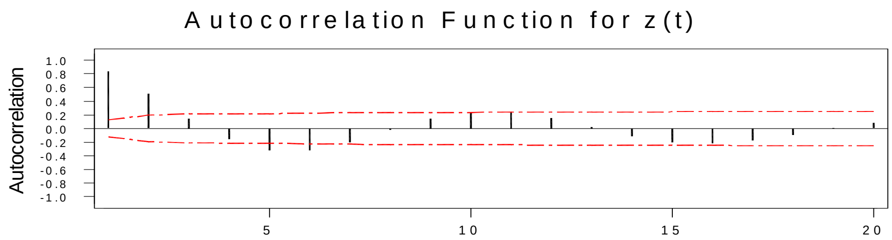
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229.574 | 227.346 | 230.260 | 229.903 | 226.778 | 226.641 | 226.760 | 224.678 |
| 224.077 | 225.772 | 223.390 | 222.482 | 221.562 | 222.515 | 224.063 | 227.500 |
| 230.713 | 234.323 | 236.033 | 236.488 | 232.308 | 229.136 | 225.663 | 221.632 |
| 215.405 | 213.619 | 217.433 | 223.408 | 232.653 | 239.577 | 238.463 | 234.178 |
| 228.758 | 221.484 | 217.123 | 218.067 | 222.156 | 227.621 | 232.209 | 233.005 |
| 234.678 | 236.419 | 235.744 | 229.359 | 229.331 | 229.564 | 230.102 | 232.432 |
| 234.155 | 233.918 | 235.767 | 234.668 | 231.319 | 231.633 | 231.121 | 228.189 |
| 227.075 | 226.765 | 224.927 | 225.721 | 225.734 | 227.982 | 229.848 | 231.718 |
| 230.421 | 228.200 | 228.472 | 230.888 | 230.122 | 227.859 | 223.115 | 222.468 |
| 224.663 | 225.799 | 228.227 | 229.851 | 228.225 | 228.618 | 228.418 | 231.163 |
| 233.335 | 236.399 | 236.659 | 235.024 | 235.122 | 228.989 | 224.483 | 226.479 |
| 223.571 | 222.523 | 225.196 | 226.724 | 228.198 | 229.792 | 232.738 | 234.207 |
| 234.561 | 232.976 | 231.266 | 227.812 | 224.928 | 225.447 | 228.163 | 230.455 |
| 232.473 | 232.067 | 233.891 | 233.841 | 234.707 | 234.825 | 232.232 | 233.640 |
| 231.653 | 230.148 | 230.327 | 228.922 | 231.665 | 235.224 | 236.562 | 233.725 |
| 230.146 | 227.077 | 227.032 | 227.089 | 229.575 | 233.044 | 233.427 | 233.089 |
| 233.444 | 233.256 | 232.820 | 228.954 | 224.747 | 224.207 | 225.484 | 228.655 |
| 230.076 | 231.062 | 232.461 | 232.152 | 226.865 | 222.819 | 220.782 | 220.958 |
| 221.171 | 224.050 | 228.727 | 232.135 | 232.027 | 232.315 | 232.030 | 231.531 |
| 230.582 | 232.032 | 231.411 | 232.684 | 233.852 | 233.127 | 230.938 | 231.363 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 232.344 | 233.622 | 233.799 | 235.038 | 232.160 | 229.733 | 229.757 | 228.285 |
| 224.880 | 223.599 | 225.273 | 223.994 | 224.258 | 227.948 | 230.636 | 229.320 |
| 227.449 | 229.100 | 231.898 | 228.203 | 228.606 | 227.046 | 230.713 | 235.587 |
| 239.660 | 242.860 | 243.963 | 239.883 | 234.243 | 230.662 | 230.360 | 228.729 |
| 225.860 | 225.123 | 225.070 | 229.486 | 231.265 | 234.107 | 234.625 | 232.700 |
| 229.792 | 230.082 | 227.643 | 230.342 | 233.628 | 238.762 | 241.821 | 240.884 |
| 235.112 | 228.468 | 223.381 | 223.795 | 226.994 | 230.499 | 230.865 | 236.017 |
| 238.292 | 235.623 | 230.088 | 226.271 | 225.616 | 225.771 | 226.222 | 229.321 |
| 227.805 | 226.745 | 225.447 | 223.250 | 225.291 | 225.358 | 225.985 | 228.141 |
| 230.794 | 229.727 | 227.934 | 228.920 | 230.296 | 229.369 | 229.352 | 228.958 |
| 231.092 | 232.891 | 235.210 | 235.339 | 236.029 | 232.881 | 228.837 | 226.114 |
| 225.020 | 224.096 | | | | | | |

اولا نرسم المتسلسلة في مخطط زمني Time Plot بإستخدام الحزمة الإحصائية MINITAB كالتالي: (50 مشاهدة فقط)

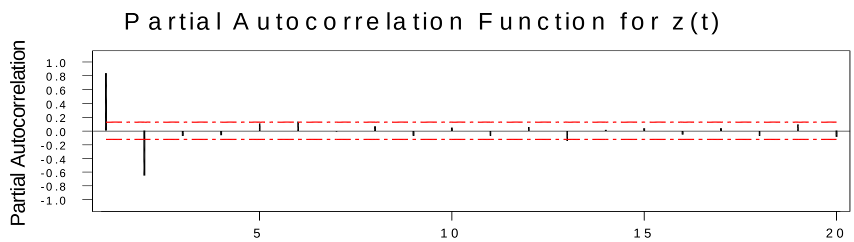



ثانيا نحسب ونرسم الترابط الذاتي العيني




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.84 | 13.27 | 178.21 | 8 | -0.02 | -0.17 | 322.05 | 15 | -0.21 | -1.65 | 376.32 |
| 2 | 0.51 | 5.20 | 244.29 | 9 | 0.14 | 1.18 | 327.24 | 16 | -0.22 | -1.79 | 389.93 |
| 3 | 0.15 | 1.35 | 249.71 | 10 | 0.23 | 1.95 | 341.48 | 17 | -0.18 | -1.42 | 398.81 |
| 4 | -0.16 | -1.46 | 256.21 | 11 | 0.23 | 1.88 | 355.16 | 18 | -0.10 | -0.76 | 401.37 |
| 5 | -0.33 | -2.98 | 283.75 | 12 | 0.15 | 1.22 | 361.17 | 19 | 0.00 | 0.02 | 401.37 |
| 6 | -0.33 | -2.87 | 311.23 | 13 | 0.02 | 0.15 | 361.25 | 20 | 0.08 | 0.61 | 403.05 |
| 7 | -0.20 | -1.73 | 321.95 | 14 | -0.12 | -0.96 | 365.04 | | | | |

ثالثا نحسب ونرسم الترابط الذاتي الجزئي العيني




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.84 | 13.27 | 8 | 0.07 | 1.06 | 15 | 0.04 | 0.67 |
| 2 | -0.66 | -10.39 | 9 | -0.07 | -1.12 | 16 | -0.06 | -0.93 |
| 3 | -0.07 | -1.13 | 10 | 0.05 | 0.73 | 17 | 0.04 | 0.60 |
| 4 | -0.06 | -1.00 | 11 | -0.07 | -1.18 | 18 | -0.07 | -1.14 |
| 5 | 0.11 | 1.78 | 12 | 0.06 | 0.90 | 19 | 0.09 | 1.44 |
| 6 | 0.14 | 2.18 | 13 | -0.15 | -2.41 | 20 | -0.09 | -1.39 |
| 7 | -0.01 | -0.22 | 14 | 0.01 | 0.18 | | | |

من أنماط الترابط الذاتي و الترابط الذاتي الجزئي العيني نلاحظ ان المتسلسلة تتبع نموذج AR(2) ولهذا نطبق النموذج المقترح علي المشاهدات

```
MTB > Name c7 = 'RESI1'
MTB > ARIMA 2 0 0 'z(t)' 'RESI1';
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 10 c4 c5 c6;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

ARIMA model for z(t)

Estimates at each iteration

| Iteration | SSE | Parameters | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4257.23 | 0.100 | 0.100 | 183.784 |
| 1 | 3528.31 | 0.250 | 0.012 | 169.535 |
| 2 | 2889.23 | 0.400 | -0.076 | 155.360 |
| 3 | 2338.97 | 0.550 | -0.165 | 141.201 |
| 4 | 1877.39 | 0.700 | -0.253 | 127.051 |
| 5 | 1504.46 | 0.850 | -0.342 | 112.913 |
| 6 | 1220.13 | 1.000 | -0.430 | 98.789 |
| 7 | 1024.34 | 1.150 | -0.519 | 84.690 |
| 8 | 916.97 | 1.300 | -0.608 | 70.623 |
| 9 | 894.38 | 1.402 | -0.668 | 61.154 |
| 10 | 894.31 | 1.408 | -0.672 | 60.670 |
| 11 | 894.31 | 1.408 | -0.672 | 60.646 |

Relative change in each estimate less than 0.0010

Final Estimates of Parameters

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 1.4079 | 0.0473 | 29.78 |
| AR 2 | -0.6720 | 0.0474 | -14.19 |
| Constant | 60.6458 | 0.1203 | 504.11 |
| Mean | 229.638 | 0.456 | |

Number of observations: 250

Residuals: SS = 893.567 (backforecasts excluded)

MS = 3.618 DF = 247

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

| Lag | 12 | 24 | 36 | 48 |
|---|---|---|---|---|
| Chi-Square | 17.5(DF=10) | 27.2(DF=22) | 49.7(DF=34) | 67.7(DF=46) |

Forecasts from period 250

| Period | Forecast | 95 Percent Limits Lower | Upper | Actual |
|---|---|---|---|---|
| 251 | 224.939 | 221.211 | 228.668 | |
| 252 | 226.747 | 220.308 | 233.186 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 253 | 228.725 | 220.642 | 236.808 |
| 254 | 230.296 | 221.546 | 239.045 |
| 255 | 231.177 | 222.311 | 240.044 |
| 256 | 231.363 | 222.494 | 240.233 |
| 257 | 231.033 | 222.070 | 239.996 |
| 258 | 230.442 | 221.327 | 239.558 |
| 259 | 229.833 | 220.600 | 239.067 |
| 260 | 229.372 | 220.090 | 238.655 |

ونستنتج التالي:

1- النموذج المقترح هو

$$z_t = 60.6458 + 1.4079 z_{t-1} - 0.672 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 3.618\right)$$

2- المعالم المقدرة وإنحرافها المعياري و قيمة t لها هي:

$$\hat{\phi}_1 = 1.4079, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.0473, \quad t = 29.78$$

$$\hat{\phi}_2 = -0.672, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_2\right) = 0.0474, \quad t = -14.19$$

$$\hat{\mu} = 229.638, \quad s.e.\left(\hat{\mu}\right) = 0.456$$

$$\hat{\delta} = 60.6458, \quad s.e.\left(\hat{\delta}\right) = 0.1203, \quad t = 504.11$$

$$\hat{\sigma}^2 = 3.618, \quad with\ d.f. = 247$$

**رابعا نفحص البواقي:**

1- إختبار متوسط البواقي

```
MTB > ZTest 0.0 3.618 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**Z-Test**

```
Test of mu = 0.000 vs mu not = 0.000
The assumed sigma = 3.62
```

| Variable | N | Mean | StDev | SE Mean | Z | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| RESI1 | 250 | -0.005 | 1.894 | 0.229 | -0.02 | 0.98 |

لانرفض الفرضية الصفرية بأن المتوسط يساوي الصفر

2- إختبار عشوائية البواقي

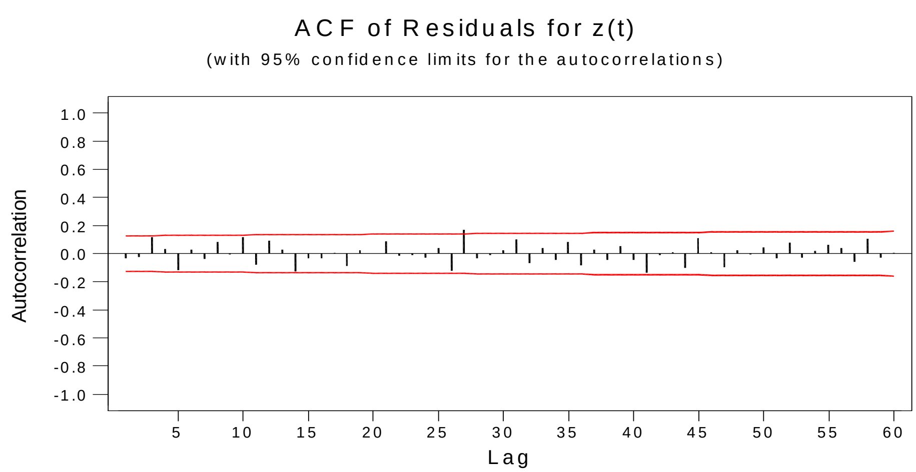
```
MTB > Runs 0 'RESI1'.
```

**Runs Test**

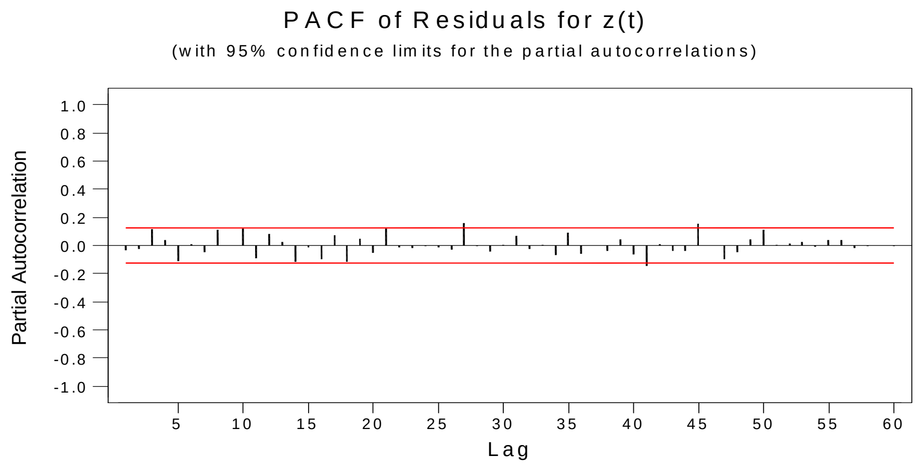
```
    RESI1

    K =      0.0000


    The observed number of runs = 125
    The expected number of runs = 125.8720
  129 Observations above K  121 below
              The test is significant at  0.9119
              Cannot reject at alpha = 0.05
```

لانرفض الفرضية الصفرية بأن البواقي عشوائية

3- الترابط الذاتي للبواقي



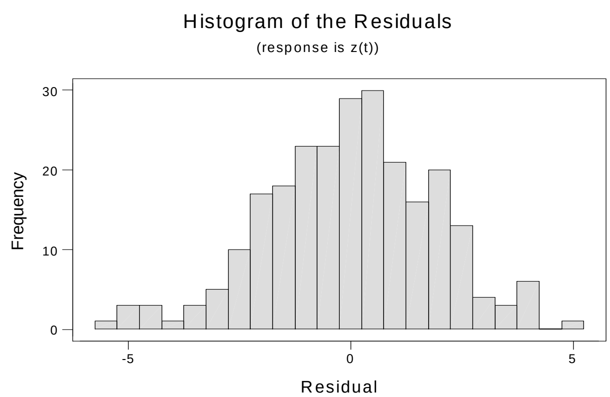

4- الترابط الذاتي الجزئي للبواقي




نلاحظ ان أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي تتبع أنماط متسلسلة الضجة البيضاء

5- إختبار طبيعية البواقي :

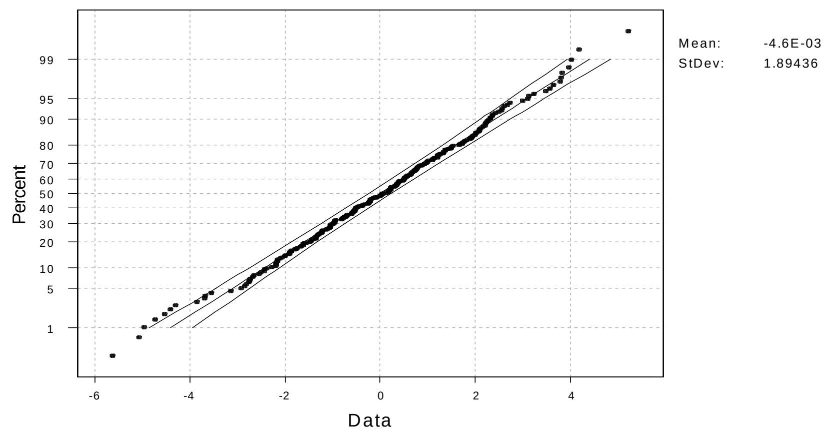
ا- نرسم المضلع التكراري للبواقي




نلاحظ أنه متناظر ولة شكل التوزيع الطبيعي تقريبا. وهذا لايكفي بل يجب ان ننظر الى:

ب- رسم الاحتمال الطبيعي Normal Probability Plot

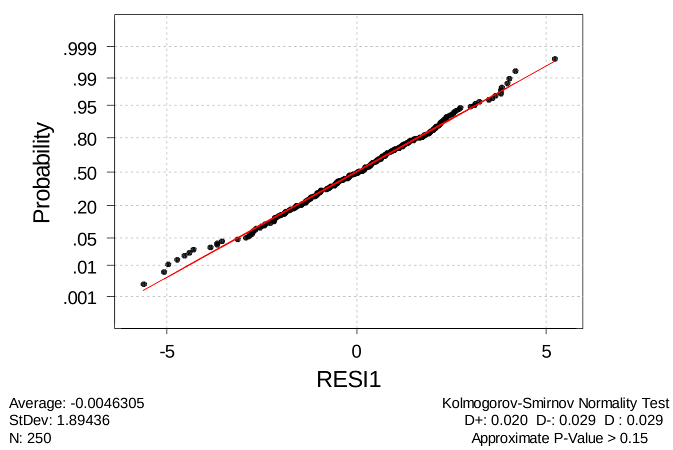
Normal Probability Plot for RESI1




واضح من الرسم أن البواقي طبيعية وللتأكد نقوم:

ج- بإختبار K-S Test لطبيعية البواقي

Normal Probability Plot




إختبار كولموجوروف-سميرنوف اعطى الـ P-Value للإختبار هي 0.15 وهي أكبر من $\alpha = 0.05$ أي اننا لانرفض فرضية طبيعية البواقي.

## توليد تنبؤات:

استخدمنا النموذج للتنبؤ عن 10 قيم مستقبلية

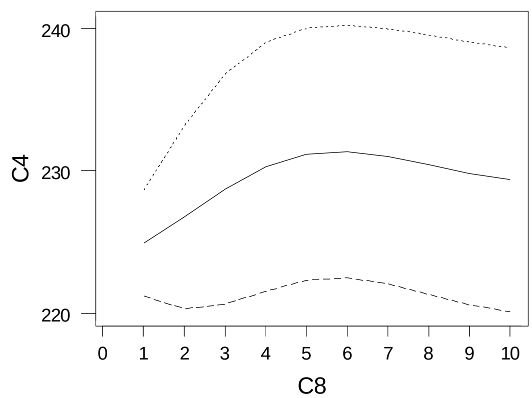
Forecasts from period 250

| | | 95 Percent Limits | | |
|---|---|---|---|---|
| Period | Forecast | Lower | Upper | Actual |
| 251 | 224.939 | 221.211 | 228.668 | |
| 252 | 226.747 | 220.308 | 233.186 | |

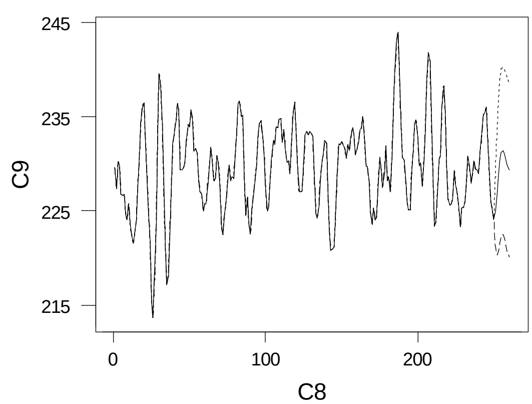
| | | | |
|---|---|---|---|
| 253 | 228.725 | 220.642 | 236.808 |
| 254 | 230.296 | 221.546 | 239.045 |
| 255 | 231.177 | 222.311 | 240.044 |
| 256 | 231.363 | 222.494 | 240.233 |
| 257 | 231.033 | 222.070 | 239.996 |
| 258 | 230.442 | 221.327 | 239.558 |
| 259 | 229.833 | 220.600 | 239.067 |
| 260 | 229.372 | 220.090 | 238.655 |

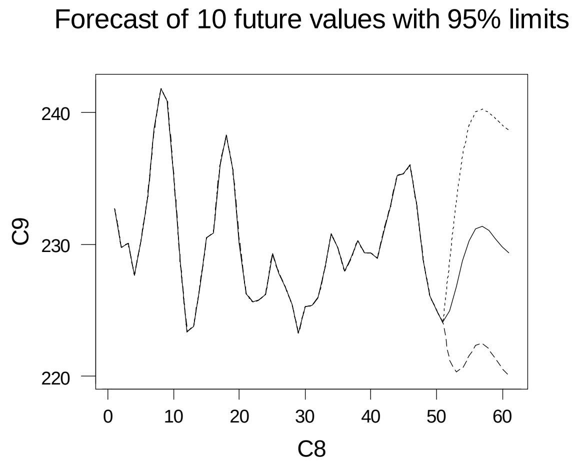
والرسم التالي يعطي التنبؤات و 95% فترات تنبؤ

Forecast of 10 future values with 95% limits




Forecast of 10 future values with 95% limits






الشكل الأول يبين المتسلسلة الزمنية بكاملها مع التنبؤات والشكل الثاني للخمسين قيمة الأخيرة مع التنبؤات لتوضيح شكل دالة التنبؤ.

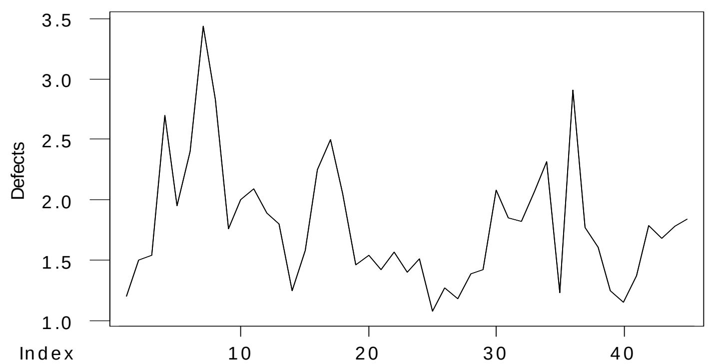
**حالة دراسة:**

المتسلسلة التالية المتوسط اليومي لعدد التلفزيونات المعيبة في خط إنتاج مصنع ما (إقرأ سطرا بسطر)

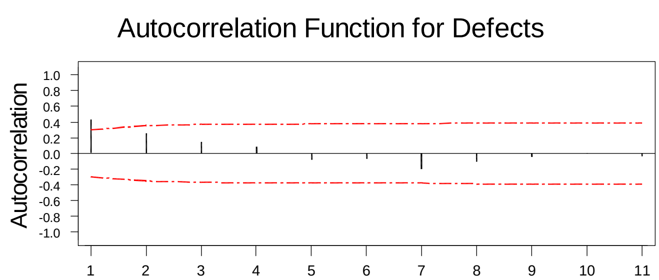
Defects

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.20 | 1.50 | 1.54 | 2.70 | 1.95 | 2.40 | 3.44 | 2.83 | 1.76 | 2.00 |
| 2.09 | 1.89 | 1.80 | 1.25 | 1.58 | 2.25 | 2.50 | 2.05 | 1.46 | 1.54 |
| 1.42 | 1.57 | 1.40 | 1.51 | 1.08 | 1.27 | 1.18 | 1.39 | 1.42 | 2.08 |
| 1.85 | 1.82 | 2.07 | 2.32 | 1.23 | 2.91 | 1.77 | 1.61 | 1.25 | 1.15 |
| 1.37 | 1.79 | 1.68 | 1.78 | 1.84 | | | | | |

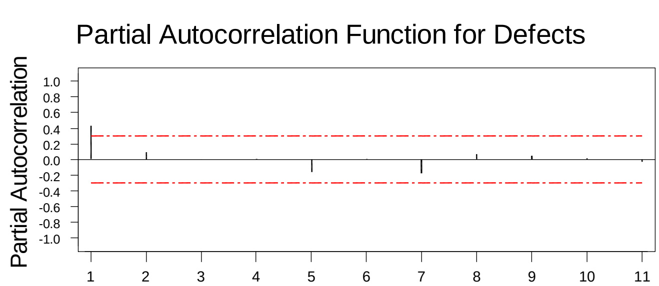
المخطط الزمني للمتسلسلة




التر ابط الذاتي والذاتي الجزئي




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43 | 2.88 | 8.84 | 8 | -0.11 | -0.57 | 17.25 |
| 2 | 0.26 | 1.49 | 12.18 | 9 | -0.05 | -0.27 | 17.41 |
| 3 | 0.14 | 0.77 | 13.18 | 10 | -0.01 | -0.04 | 17.41 |
| 4 | 0.08 | 0.43 | 13.50 | 11 | -0.04 | -0.19 | 17.50 |
| 5 | -0.09 | -0.46 | 13.89 | | | | |
| 6 | -0.07 | -0.39 | 14.18 | | | | |
| 7 | -0.21 | -1.10 | 16.57 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43 | 2.88 | 8 | 0.07 | 0.44 |
| 2 | 0.09 | 0.63 | 9 | 0.05 | 0.35 |
| 3 | -0.00 | -0.01 | 10 | 0.01 | 0.09 |
| 4 | 0.00 | 0.00 | 11 | -0.03 | -0.23 |
| 5 | -0.16 | -1.07 | | | |
| 6 | 0.00 | 0.02 | | | |
| 7 | -0.18 | -1.19 | | | |

لإختيار النموذج المناسب سوف نستخدم معيار المعلومات الذاتي $AIC$ والذي يعطى بالعلاقة:

$$AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج ونختار النموذج الذي يعطي $\min_m AIC(m)$

سوف نطبق النماذج علي التوالي:

```
MTB > ARIMA 1 0 0 'Defects' 'RESI1';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.4421      0.1365      3.24
Constant   0.99280     0.06999     14.19
Mean        1.7795      0.1254
Number of observations:  45
Residuals:    SS = 9.47811  (backforecasts excluded)
              MS = 0.22042  DF = 43
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square      4.9(DF=11)      8.9(DF=23)     30.9(DF=35)
* (DF= *)

MTB > ARIMA 2 0 0 'Defects' 'RESI2';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects
```

```
Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.3999      0.1533      2.61
AR   2      0.0989      0.1531      0.65
Constant   0.89019     0.07047     12.63
Mean        1.7762      0.1406

Number of observations:  45
Residuals:    SS = 9.38567  (backforecasts excluded)
              MS = 0.22347  DF = 42

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                   12               24               36
48
Chi-Square      4.0(DF=10)      8.1(DF=22)     28.8(DF=34)
* (DF= *)

MTB > ARIMA 1 0 1 'Defects' 'RESI3';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.5983      0.2691      2.22
MA   1      0.1926      0.3294      0.58
Constant   0.71334     0.05693     12.53
Mean        1.7759      0.1417

Number of observations:  45
Residuals:    SS = 9.39423  (backforecasts excluded)
              MS = 0.22367  DF = 42

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
```

```
Lag                     12              24              36
48
Chi-Square      4.1(DF=10)      8.3(DF=22)     29.1(DF=34)
* (DF= *)

MTB > ARIMA 0 0 1 'Defects' 'RESI4';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects


Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
MA   1     -0.3409      0.1431     -2.38
Constant   1.78480     0.09651     18.49
Mean       1.78480     0.09651

Number of observations:  45
Residuals:    SS = 10.0362  (backforecasts excluded)
              MS =  0.2334  DF = 43

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                     12              24              36
48
Chi-Square      8.0(DF=11)     13.2(DF=23)     35.7(DF=35)
* (DF= *)

MTB > ARIMA 0 0 2 'Defects' 'RESI5';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects
```

```
Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
MA   1     -0.3869      0.1516     -2.55
MA   2     -0.1816      0.1516     -1.20
Constant    1.7839      0.1118     15.96
Mean        1.7839      0.1118

Number of observations:  45
Residuals:    SS = 9.61059  (backforecasts excluded)
              MS = 0.22882  DF = 42

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square      4.6(DF=10)      9.2(DF=22)    31.0(DF=34)
* (DF= *)

MTB > ARIMA 2 0 1 'Defects' 'RESI6';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.4134      1.5680      0.26
AR   2      0.0929      0.7113      0.13
MA   1      0.0136      1.5749      0.01
Constant   0.87675     0.07036     12.46
Mean        1.7761      0.1425

Number of observations:  45
Residuals:    SS = 9.38561  (backforecasts excluded)
              MS = 0.22892  DF = 41

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
```

```
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square      4.0(DF= 9)      8.1(DF=21)     28.8(DF=33)
* (DF= *)

MTB > ARIMA 1 0 2 'Defects' 'RESI7';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects

* ERROR * Model cannot be estimated with these data

MTB > ARIMA 2 0 2 'Defects' 'RESI8';
SUBC>   Constant;
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Defects

Final Estimates of Parameters
Type           Coef       StDev         T
AR   1       1.6720      0.1165     14.35
AR   2      -0.7263      0.1251     -5.80
MA   1       1.3199      0.0184     71.63
MA   2      -0.3196      0.0731     -4.37
Constant  0.096224    0.003323     28.95
Mean       1.77238     0.06121

Number of observations:  45
Residuals:    SS = 8.33225  (backforecasts excluded)
              MS = 0.20831  DF = 40

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
```

```
Chi-Square       4.7(DF=  8)       8.9(DF=20)     29.7(DF=32)
* (DF= *)
```

ونلخص ذلك بالجدول التالي:

| $Model$ | $\hat{\sigma}^2$ | $m$ | $AIC$ |
|---|---|---|---|
| $AR(1)$ | 0.22042 | 3 | $-62.0499$ |
| $AR(2)$ | 0.22347 | 4 | $-59.4315$ |
| $MA(1)$ | 0.23340 | 3 | $-59.4751$ |
| $MA(2)$ | 0.22882 | 4 | $-58.3669$ |
| $ARMA(1,1)$ | 0.22367 | 4 | $-59.3913$ |
| $ARMA(2,1)$ | 0.22892 | 5 | $-56.3472$ |
| $ARMA(1,2)$ | – | – | – |
| $ARMA(2,2)$ | 0.20831 | 6 | $-58.5928$ |

$$\min_m AIC(m) = -62.0499$$

أي ان أفضل نموذج هو AR(1) .

يترك للطالب كتمرين فحص البواقي وتوليد تنبؤات.

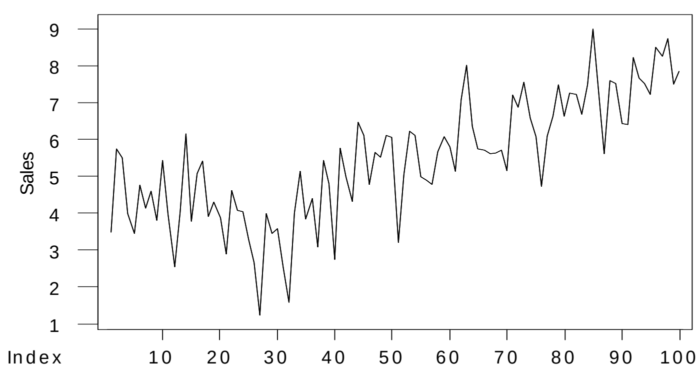
**حالة دراسة:**

المتسلسة التالية هي دخل المبيعات السنوية بملايين الريالات لشركة ما

Sales

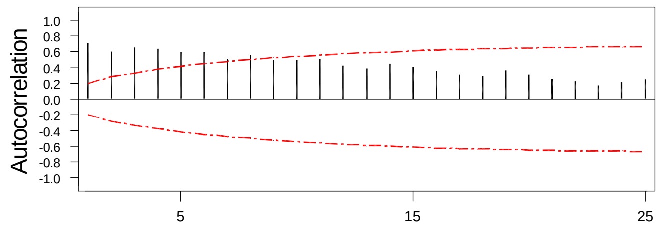
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.49 | 5.74 | 5.51 | 3.99 | 3.45 | 4.77 | 4.14 | 4.60 | 3.80 | 5.43 |
| 3.96 | 2.54 | 4.05 | 6.16 | 3.78 | 5.07 | 5.42 | 3.91 | 4.30 | 3.88 |
| 2.89 | 4.61 | 4.08 | 4.05 | 3.28 | 2.65 | 1.22 | 3.98 | 3.45 | 3.57 |
| 2.52 | 1.58 | 4.00 | 5.14 | 3.84 | 4.40 | 3.08 | 5.43 | 4.80 | 2.75 |
| 5.77 | 4.99 | 4.31 | 6.46 | 6.11 | 4.79 | 5.65 | 5.52 | 6.12 | 6.06 |
| 3.20 | 5.05 | 6.23 | 6.12 | 4.99 | 4.89 | 4.78 | 5.67 | 6.08 | 5.80 |
| 5.13 | 7.07 | 8.02 | 6.36 | 5.75 | 5.70 | 5.61 | 5.63 | 5.71 | 5.16 |
| 7.20 | 6.87 | 7.56 | 6.57 | 6.08 | 4.72 | 6.09 | 6.64 | 7.49 | 6.64 |
| 7.26 | 7.22 | 6.69 | 7.49 | 9.01 | 7.27 | 5.62 | 7.59 | 7.53 | 6.43 |
| 6.42 | 8.22 | 7.67 | 7.53 | 7.23 | 8.50 | 8.27 | 8.75 | 7.50 | 7.86 |

مخطط زمني للمتسلسلة



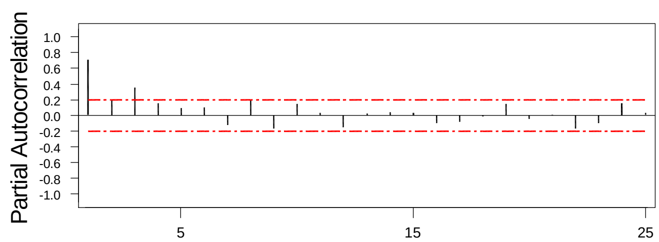

دوال الترابط الذاتي والذاتي الجزئي العينية

Autocorrelation Function for Sales




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.71 | 7.10 | 51.97 | 8 | 0.56 | 2.22 | 317.32 | 15 | 0.41 | 1.32 | 483.85 | 22 | 0.22 | 0.67 | 565.04 |
| 2 | 0.60 | 4.26 | 89.85 | 9 | 0.49 | 1.87 | 344.49 | 16 | 0.35 | 1.13 | 499.04 | 23 | 0.17 | 0.50 | 568.77 |
| 3 | 0.65 | 3.94 | 134.64 | 10 | 0.49 | 1.79 | 371.67 | 17 | 0.31 | 0.97 | 510.68 | 24 | 0.21 | 0.64 | 574.90 |
| 4 | 0.64 | 3.36 | 177.75 | 11 | 0.51 | 1.82 | 401.71 | 18 | 0.30 | 0.92 | 521.52 | 25 | 0.25 | 0.75 | 583.43 |
| 5 | 0.59 | 2.83 | 215.72 | 12 | 0.42 | 1.46 | 422.60 | 19 | 0.36 | 1.11 | 537.81 | | | | |
| 6 | 0.59 | 2.63 | 253.97 | 13 | 0.38 | 1.29 | 439.91 | 20 | 0.31 | 0.95 | 550.11 | | | | |
| 7 | 0.51 | 2.12 | 282.61 | 14 | 0.45 | 1.50 | 464.06 | 21 | 0.26 | 0.77 | 558.52 | | | | |

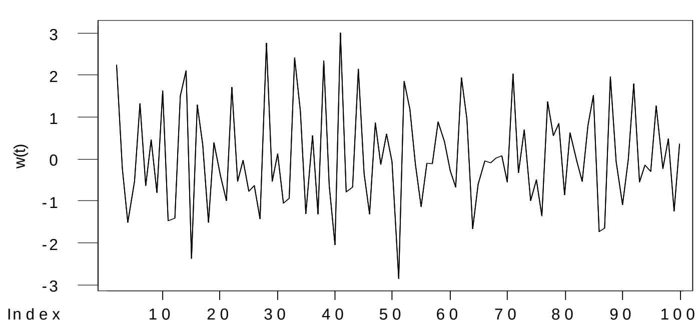
Partial Autocorrelation Function for Sales



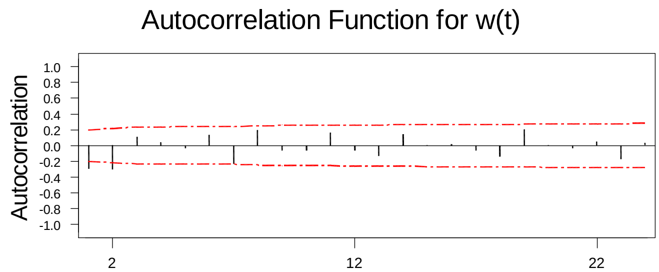

| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.71 | 7.10 | 8 | 0.19 | 1.93 | 15 | 0.03 | 0.32 | 22 | -0.17 | -1.68 |
| 2 | 0.20 | 1.99 | 9 | -0.17 | -1.70 | 16 | -0.10 | -0.96 | 23 | -0.10 | -1.00 |
| 3 | 0.35 | 3.53 | 10 | 0.14 | 1.44 | 17 | -0.08 | -0.84 | 24 | 0.15 | 1.55 |
| 4 | 0.15 | 1.49 | 11 | 0.03 | 0.34 | 18 | -0.01 | -0.10 | 25 | 0.03 | 0.34 |
| 5 | 0.09 | 0.92 | 12 | -0.15 | -1.52 | 19 | 0.14 | 1.43 | | | |
| 6 | 0.10 | 1.03 | 13 | 0.02 | 0.25 | 20 | -0.04 | -0.44 | | | |
| 7 | -0.13 | -1.27 | 14 | 0.04 | 0.39 | 21 | 0.00 | 0.04 | | | |

دالة الترابط الذاتي العيني تدل على تخامد بطيئ مما قد يدل على عدم إستقرار في المتوسط.

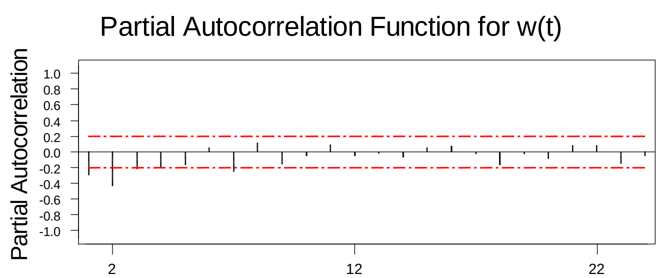
لنجرب التفريق الأول للمتسلسلة $w_t = \nabla z_t$ ونرسمها



تبدو المتسلسلة مستقرة الآن. دوال الترابط الذاتي والذاتي الجزئي للمتسلسلة المستقرة




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.30 | -3.00 | 9.26 | 8 | 0.19 | 1.53 | 33.07 | 15 | 0.00 | 0.00 | 42.37 | 22 | 0.05 | 0.35 | 51.22 |
| 2 | -0.31 | -2.86 | 19.32 | 9 | -0.07 | -0.53 | 33.58 | 16 | 0.02 | 0.13 | 42.40 | 23 | -0.18 | -1.28 | 55.44 |
| 3 | 0.11 | 0.90 | 20.49 | 10 | -0.07 | -0.52 | 34.08 | 17 | -0.07 | -0.52 | 42.99 | 24 | 0.03 | 0.20 | 55.55 |
| 4 | 0.04 | 0.31 | 20.63 | 11 | 0.16 | 1.27 | 37.12 | 18 | -0.15 | -1.09 | 45.65 | | | | |
| 5 | -0.04 | -0.33 | 20.80 | 12 | -0.07 | -0.53 | 37.67 | 19 | 0.20 | 1.48 | 50.73 | | | | |
| 6 | 0.14 | 1.15 | 22.80 | 13 | -0.14 | -1.04 | 39.85 | 20 | 0.01 | 0.05 | 50.74 | | | | |
| 7 | -0.24 | -1.98 | 29.02 | 14 | 0.15 | 1.10 | 42.37 | 21 | -0.04 | -0.25 | 50.90 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.30 | -3.00 | 8 | 0.12 | 1.17 | 15 | 0.06 | 0.59 | 22 | 0.08 | 0.80 |
| 2 | -0.44 | -4.41 | 9 | -0.16 | -1.59 | 16 | 0.07 | 0.70 | 23 | -0.15 | -1.53 |
| 3 | -0.22 | -2.23 | 10 | -0.06 | -0.60 | 17 | -0.03 | -0.32 | 24 | -0.05 | -0.55 |
| 4 | -0.21 | -2.05 | 11 | 0.09 | 0.93 | 18 | -0.17 | -1.65 | | | |
| 5 | -0.17 | -1.72 | 12 | -0.06 | -0.59 | 19 | -0.03 | -0.31 | | | |
| 6 | 0.06 | 0.59 | 13 | -0.02 | -0.17 | 20 | -0.10 | -0.95 | | | |
| 7 | -0.26 | -2.55 | 14 | -0.07 | -0.71 | 21 | 0.09 | 0.85 | | | |

لإختيار النموذج المناسب سوف نستخدم معيار المعلومات الذاتي $AIC$ والذي يعطى بالعلاقة:

$$AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة في النموذج ونختار النموذج الذي يعطي $\min_m AIC(m)$

سوف نطبق النماذج علي التوالي:

```
MTB > ARIMA 1 1 0 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1     -0.3114      0.0959     -3.25

Differencing: 1 regular difference
Number  of  observations:    Original  series  100,  after
differencing 99
Residuals:    SS = 133.134  (backforecasts excluded)
              MS =   1.359  DF = 98

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                   12               24               36
48
Chi-Square     31.9(DF=11)     51.2(DF=23)     62.8(DF=35)
81.0(DF=47)

MTB > ARIMA 2 1 0 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1     -0.4532      0.0897     -5.05
AR   2     -0.4656      0.0901     -5.17

Differencing: 1 regular difference
Number  of  observations:    Original  series  100,  after
differencing 99
Residuals:    SS = 104.715  (backforecasts excluded)
              MS =   1.080  DF = 97
```

```
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square     21.8(DF=10)     40.9(DF=22)     49.4(DF=34)
59.9(DF=46)

MTB > ARIMA 0 1 1 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
MA   1      0.7636      0.0648     11.78

Differencing: 1 regular difference
Number  of  observations:    Original  series  100,  after
differencing 99
Residuals:    SS = 101.411  (backforecasts excluded)
              MS =   1.035  DF = 98

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square     12.6(DF=11)     27.8(DF=23)     35.9(DF=35)
48.5(DF=47)

MTB > ARIMA 0 1 2 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales
```

```
Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
MA   1      0.5756      0.0990      5.81
MA   2      0.2029      0.0998      2.03

Differencing: 1 regular difference
Number of observations: Original series 100, after
differencing 99
Residuals:    SS = 99.2463  (backforecasts excluded)
              MS =  1.0232  DF = 97

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12               24               36
48
Chi-Square     14.3(DF=10)     28.3(DF=22)     36.5(DF=34)
47.0(DF=46)

MTB > ARIMA 1 1 1 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.1283      0.1334      0.96
MA   1      0.8027      0.0799     10.04

Differencing: 1 regular difference
Number of observations: Original series 100, after
differencing 99
Residuals:    SS = 100.421  (backforecasts excluded)
              MS =   1.035  DF = 97

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
```

```
Lag                    12               24               36
48
Chi-Square     13.3(DF=10)     27.9(DF=22)     36.1(DF=34)
48.2(DF=46)

MTB > ARIMA 2 1 1 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales


* WARNING * Back forecasts not dying out rapidly

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1     -1.1389      0.0987    -11.53
AR   2     -0.1440      0.0983     -1.47
MA   1     -0.9889      0.0002  -3987.49

Differencing: 1 regular difference
Number  of  observations:    Original  series  100,  after
differencing 99
Residuals:    SS = 134.250  (backforecasts excluded)
              MS =   1.398  DF = 96

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12               24               36
48
Chi-Square     35.1(DF= 9)     53.5(DF=21)     66.6(DF=33)
83.2(DF=45)

MTB > ARIMA 1 1 2 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1     -0.3476      0.4077     -0.85
MA   1      0.2422      0.3771      0.64
MA   2      0.4506      0.2656      1.70

Differencing: 1 regular difference
Number  of  observations:    Original  series  100,  after
differencing 99
Residuals:    SS = 97.2357  (backforecasts excluded)
              MS =  1.0129  DF = 96

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                   12               24               36
48
Chi-Square     11.9(DF=  9)     25.0(DF=21)     32.1(DF=33)
41.8(DF=45)

MTB > ARIMA 2 1 2 'Sales';
SUBC>   NoConstant.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for Sales

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1     -0.0691      0.3618     -0.19
AR   2     -0.2941      0.1450     -2.03
MA   1      0.5637      0.3737      1.51
MA   2      0.0840      0.3266      0.26

Differencing: 1 regular difference
```

```
Number of observations:   Original series 100, after
differencing 99
Residuals:    SS = 93.6368  (backforecasts excluded)
              MS =  0.9857  DF = 95

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square     11.0(DF= 8)     23.4(DF=20)     30.1(DF=32)
36.5(DF=44)
```

ونلخص ذلك بالجدول التالي:

| $Model$ | $\hat{\sigma}^2$ | $m$ | $AIC$ |
|---|---|---|---|
| $ARI(1,1)$ | 1.359 | 2 | 34.368 |
| $ARI(2,1)$ | 1.080 | 3 | 13.619 |
| $IMA(1,1)$ | 1.035 | 2 | 7.4057 |
| $IMA(1,2)$ | 1.023 | 3 | 8.2706 |
| $ARIMA(1,1,1)$ | 1.035 | 3 | 9.4057 |
| $ARIMA(2,1,1)$ | 1.398 | 4 | 41.169 |
| $ARIMA(1,1,2)$ | 1.013 | 4 | 9.2689 |
| $ARIMA(2,1,2)$ | 0.986 | 5 | 8.5741 |

$$\min_m AIC(m) = 7.406$$

أي ان أفضل نموذج هو IMA(1,1) . يترك للطالب كتمرين فحص البواقي وتوليد تنبؤات.

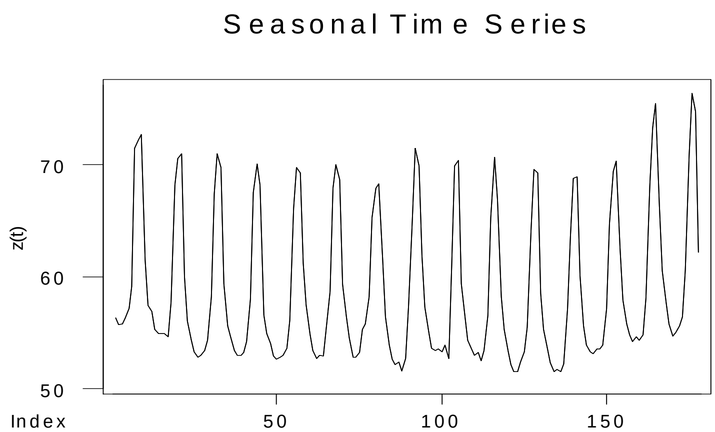
# الفصل السادس

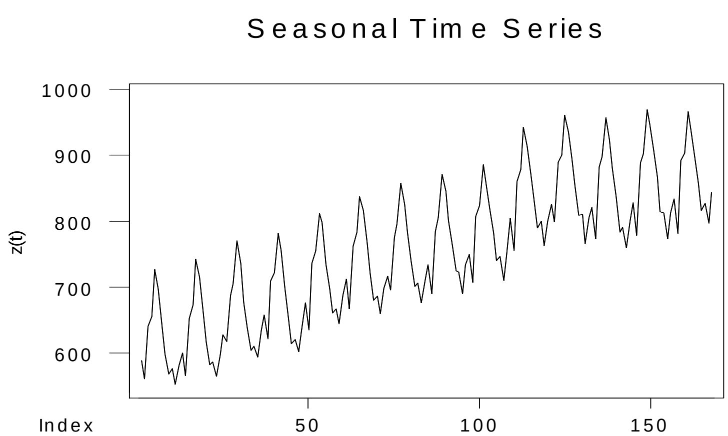
## نماذج الإنحدار الذاتي التكاملي المتوسط المتحرك الموسمية

## Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average Models

المتسلسلات الزمنية الموسمية تعطي انماط متشابهة تتكرر على فترات زمنية متساوية البعد مثل ان يتكرر النمط كل اربعة وعشرون ساعة او كل سبعة ايام او كل شهر او ثلاثة اشهر او سنة.

الأشكال التالية تبين مثل هذه المتسلسلات




في هذا الفصل سوف نستعرض خواص المتسلسلات الزمنية الموسمية وطرق نمذجتها بواسطة نماذج الإنحدار الذاتي التكاملي المتوسط المتحرك $\text{SARIMA}(p,d,q)(P,D,Q)_s$ فمثلا النموذج $\text{SARIMA}(0,1,1)(1,1,0)_{12}$ يكتب على الشكل

$$\left(1-\Phi_1 B^s\right)(1-B) z_t=\left(1-\theta_1 B\right) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

وبشكل عام فإن نموذج الإنحدار الذاتي التكاملي المتوسط المتحرك بالدرجة $(p,d,q)(P,D,Q)_s$ SARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$ يكتب على الشكل

$$\phi_p(B) \Phi_P\left(B^s\right)(1-B)^d\left(1-B^s\right)^D z_t=\delta+\theta_q(B) \Theta_Q\left(B^s\right) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

حيث $\phi_p(B)$ و $\theta_q(B)$ عمال الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك غير الموسمية والتي مرت علينا سابقا و $\Phi_P\left(B^s\right)=1+\Phi_1 B^s+\Phi_2 B^{2s}+\cdots+\Phi_P B^{Ps}$ عامل الإنحدار الذاتي الموسمي و $\Theta_Q\left(B^s\right)=1+\Theta_1 B^s+\Theta_2 B^{2s}+\cdots+\Theta_Q B^{Qs}$ عامل المتوسط المتحرك الموسمي ويسمى هذا بالنموذج الموسمي التضاعفي Multiplicative Seasonal Models.

ملاحظة: في جميع النماذج القادمة سيكون مفهوما ضمنيا أن $a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$

**<u>دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لبعض النماذج الموسمية:</u>**

في الإشتقاقات التالية سوف نستخدم المتسلسلة الموسمية المستقرة $w_t=(1-B)^d\left(1-B^s\right)^D z_t$ والتي تتبع النموذج SARMA$(p,q)(P,Q)_s$

$$\phi_p(B) \Phi_P\left(B^s\right) w_t=\delta+\theta_q(B) \Theta_Q\left(B^s\right) a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

سوف نشتق دالة الترابط الذاتي للنموذج الموسمي التضاعفي SARMA$(0,1)(1,1)_{12}$

$$w_t=\Phi w_{t-12}+a_t-\theta a_{t-1}-\Theta a_{t-12}+\theta \Theta a_{t-13}, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

بضرب طرفي المعادلة المعرفة في $w_t$ وأخذ التوقع نجد

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &=\Phi \gamma_{12}+\sigma^2+\theta^2 \sigma^2-\Theta(\Phi-\Theta) \sigma^2+\theta \Theta(-\Phi \theta+\theta \Theta) \sigma^2 \\
&=\Phi \gamma_{12}+\sigma^2\left[\left(1+\theta^2\right)+\Theta(\Phi-\Theta)\left(1+\theta^2\right)\right] \\
&=\Phi \gamma_{12}+\sigma^2\left(1+\theta^2\right)[1+\Theta(\Phi-\Theta)]
\end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة المعرفة في $w_{t-12}$ وأخذ التوقع نجد

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &=\Phi \gamma_0-\Theta \sigma^2+\theta \Theta(-\theta) \sigma^2 \\
&=\Phi \gamma_0-\Theta \sigma^2\left(1+\theta^2\right)
\end{aligned}$$

وبحل العلاقتين السابقتين نجد

$$\gamma_0=\sigma^2\left(1+\theta^2\right) \frac{1+\Theta^2-2 \Phi \Theta}{1-\Phi^2}$$

$$\gamma_{12}=\sigma^2\left(1+\theta^2\right)\left[\Phi-\Theta+\frac{\Phi(\Theta-\Phi)^2}{1-\Phi^2}\right]$$

أيضا

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E\left(w_t w_{t-1}\right)\\ &=\Phi\gamma_{11} - \theta\sigma^2 - \Theta E\left(a_{t-12}w_{t-1}\right) + \theta\Theta E\left(a_{t-13}w_{t-1}\right)\\ &=\Phi\gamma_{11} - \theta\sigma^2 + \theta\Theta\left(\Phi-\Theta\right)\sigma^2\end{aligned}$$

و

$$\gamma_{11} = E\left(w_t w_{t-11}\right) = \Phi\gamma_1 + \Theta\theta\sigma^2$$

وبحل العلاقتين السابقتين نجد

$$\gamma_1 = -\theta\sigma^2\left[1+\frac{\left(\Theta-\Phi\right)^2}{1-\Phi^2}\right]$$

$$\gamma_{11} = \theta\sigma^2\left[\Theta-\Phi-\frac{\Phi\left(\Theta-\Phi\right)^2}{1-\Phi^2}\right]$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن

$$\begin{aligned}&\gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_{10} = 0\\ &\gamma_{13} = \gamma_{11}\\ &\gamma_k = \Phi\gamma_{k-12}, \quad k > 13\end{aligned}$$

ومن جميع العلاقات السابقة نوجد دالة الترابط الذاتي

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k=0\\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1\\ 0, & k=2,\ldots,10\\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2}\dfrac{\left(\Theta-\Phi\right)\left(1-\Phi\Theta\right)}{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}, & k=11\\ -\dfrac{\left(\Theta-\Phi\right)\left(1-\Phi\Theta\right)}{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}, & k=12\\ \rho_{11}, & k=13\\ \Phi\rho_{k-12}, & k>13\end{cases}$$

**دوال الترابط الذاتي لبعض النماذج الموسمية:**

1- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,0)(0,D,1)_s$ $w_t = \left(1-\Theta B^s\right)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

2- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,0)(1,D,1)_s$ $\left(1-\Phi B^s\right)w_t = a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \Phi^{k/s}, & k=s,2s,\ldots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

3- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,1)(0,D,1)_s$ $w_t = (1-\theta B)\left(1-\Theta B^s\right)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ \dfrac{\theta\Theta}{\left(1+\theta^2\right)\left(1+\Theta^2\right)}, & k=s-1 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ \rho_{s-1}, & k=s+1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

4- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,0)(1,D,1)_s$ $\left(1-\Phi B^s\right)w_t = \left(1-\Theta B^s\right)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{(\Theta-\Phi)(1-\Phi\Theta)}{1+\Theta^2-2\Phi\Theta}\Phi^{k/s-1}, & k=s,2s,\ldots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

5- نموذج $\text{SARIMA}(0,d,1)(1,D,0)_s$ $\left(1-\Phi B^s\right)w_t = (1-\theta B)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k=2,\ldots,s-2 \\ -\dfrac{\theta\Phi}{1+\theta^2}, & k=s-1 \\ \Phi, & k=s \\ \rho_{s-1}, & k=s+1 \\ \Phi\rho_{k-s}, & k>s+1 \end{cases}$$

6- نموذج SARIMA$(0,d,2)(0,D,1)_s$ $\quad w_t = \left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2\right)\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$

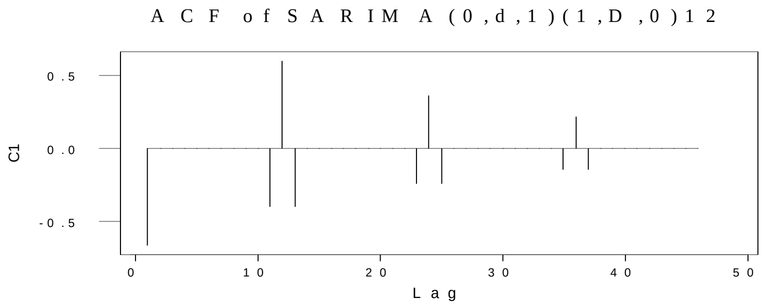
$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta_1\left(1-\theta_2\right)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=1 \\ -\dfrac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=2 \\ \dfrac{\theta_2\Theta}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\left(1+\Theta^2\right)}, & k=s-2 \\ \dfrac{\theta_1\Theta\left(1-\theta_2\right)}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\left(1+\Theta^2\right)}, & k=s-1 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ \rho_{s-1}, & k=s+1 \\ \rho_{s-2}, & k=s+2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

سوف نستعرض بعض الرسومات لدالة الترابط الذاتي للمتسلسلات الزمنية الموسمية لأعطاء فكرة عن أشكالها.

الأشكال التالية لنموذج SARIMA$(0,d,1)(1,D,0)_{12}$ :

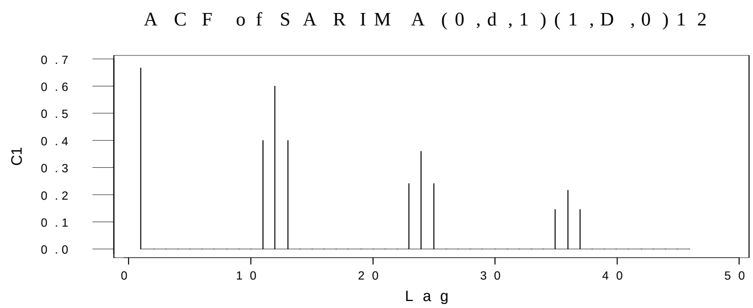
شكل (1)

$$\Phi = 0.6, \quad \theta = 0.5$$



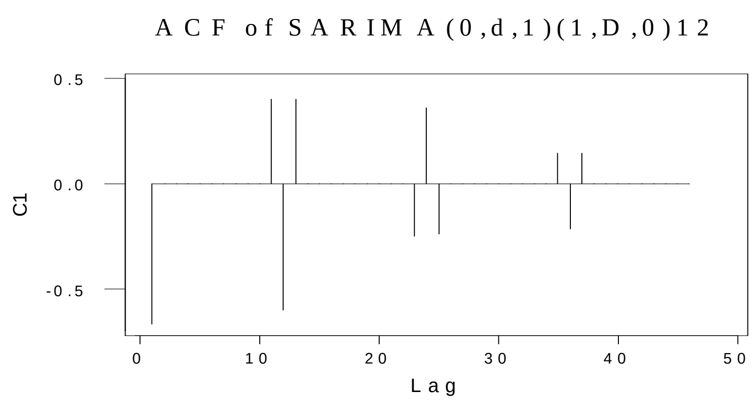

شكل ( 2)

$$\Phi = 0.6, \quad \theta = -0.5$$



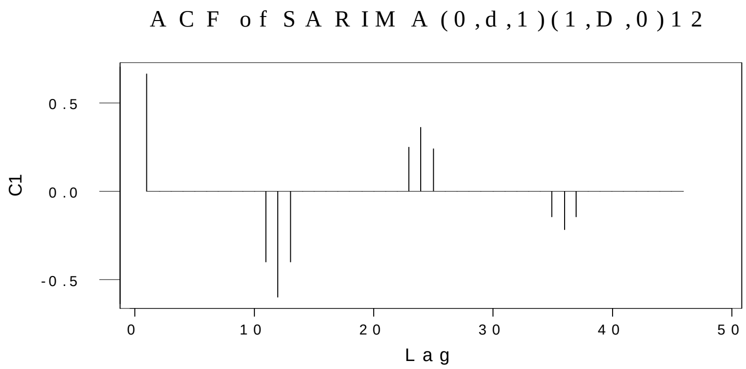

شكل (3)

$$\Phi = -0.6, \quad \theta = 0.5$$



شكل (4)

$$\Phi = -0.6, \quad \theta = -0.5$$



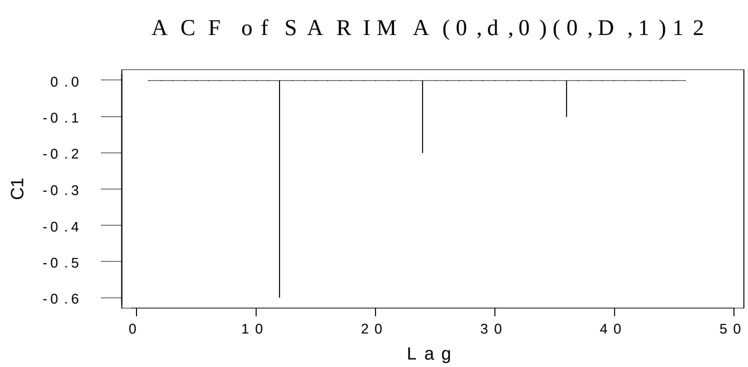

**<u>دالة الترابط الذاتي الجزئي للنموذج الموسمي التضاعفي:</u>**

من الصعوبة إشتقاق وتفسير أنماط دالة الترابط الذاتي الجزئي للنماذج الموسمية التضاعفية ولكنها وبشكل عام فإن أجزاء النموذج الموسمية وغير الموسمية والتي تنمذج المتوسط المتحرك تعطي تخامدات اسية وتخامدات جيبية عند التخلفات الموسمية وغيرالموسمية وفي النماذج التي تحوي إنحدار ذاتي فإن الترابطات الذاتية الجزئية تعطي قطعا cut off .

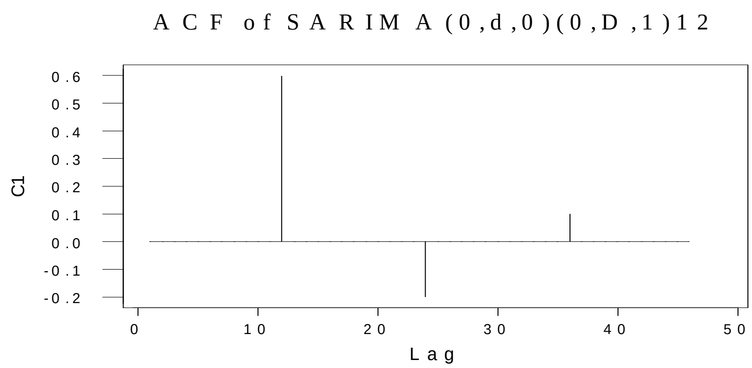
الأشكال التالية لإعطاء فكرة عن بعض دوال الترابط الذاتي الجزئي لبعض النماذج :

1- شكل دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $w_t = \left(1 - \Theta B^{12}\right) a_t$

أ) $\Theta = 0.6$

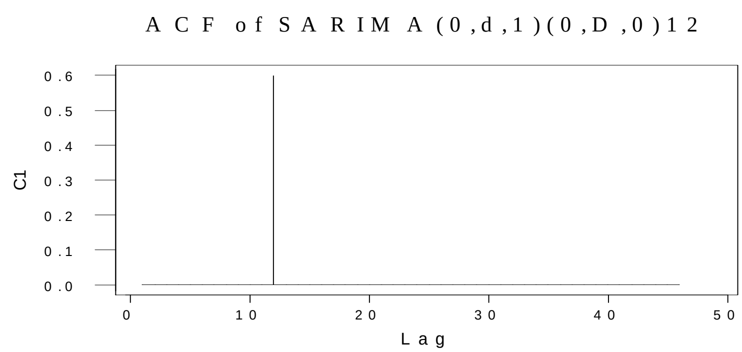



ب) $\Theta = -0.6$

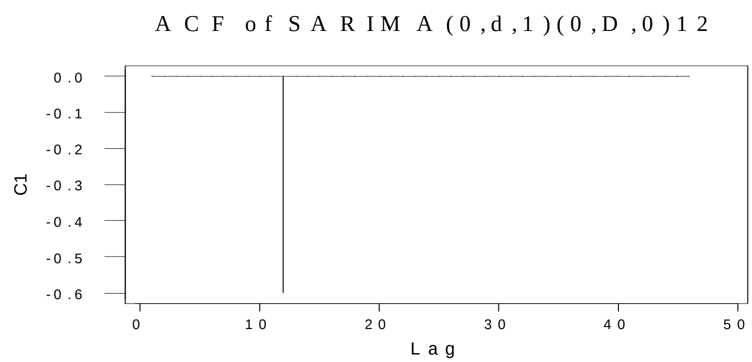



2- شكل دالة الترابط الذاتي الجزئي لنموذج $\left(1-\Phi B^{12}\right)w_t = a_t$

أ) $\Phi = 0.6$




ب) $\Phi = -0.6$



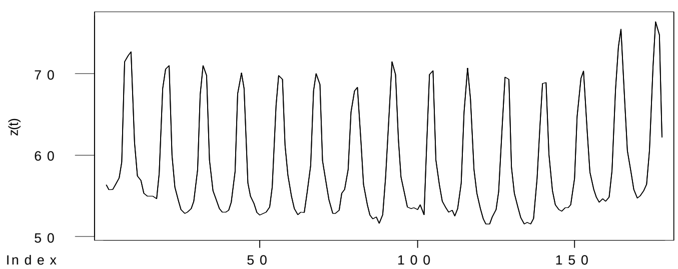

**<u>أمثلة: للمتسلسلة الزمنية الموسمية</u> (في جميع الأمثلة التالية إقرأ سطرا بسطر)**

z(t)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56.3 | 55.7 | 55.8 | 56.3 | 57.2 | 59.1 | 71.5 | 72.2 | 72.7 | 61.5 | 57.4 | 56.9 |
| 55.3 | 54.9 | 54.9 | 54.9 | 54.6 | 57.7 | 68.2 | 70.6 | 71.0 | 60.0 | 56.0 | 54.4 |
| 53.3 | 52.8 | 53.0 | 53.4 | 54.3 | 58.2 | 67.4 | 71.0 | 69.8 | 59.4 | 55.6 | 54.6 |

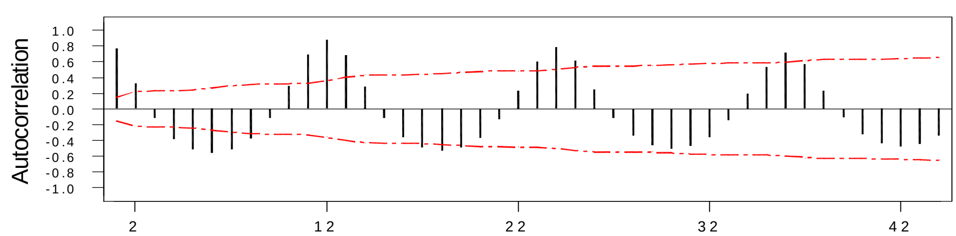
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53.4 | 53.0 | 53.0 | 53.2 | 54.2 | 58.0 | 67.5 | 70.1 | 68.2 | 56.6 | 54.9 | 54.0 |
| 52.9 | 52.6 | 52.8 | 53.0 | 53.6 | 56.1 | 66.1 | 69.8 | 69.3 | 61.2 | 57.5 | 54.9 |
| 53.4 | 52.7 | 53.0 | 52.9 | 55.4 | 58.7 | 67.9 | 70.0 | 68.7 | 59.3 | 56.4 | 54.5 |
| 52.8 | 52.8 | 53.2 | 55.3 | 55.8 | 58.2 | 65.3 | 67.9 | 68.3 | 61.7 | 56.4 | 53.9 |
| 52.6 | 52.1 | 52.4 | 51.6 | 52.7 | 57.3 | 65.1 | 71.5 | 69.9 | 61.9 | 57.3 | 55.1 |
| 53.6 | 53.4 | 53.5 | 53.3 | 53.9 | 52.7 | 61.0 | 69.9 | 70.4 | 59.4 | 56.3 | 54.3 |
| 53.5 | 53.0 | 53.2 | 52.5 | 53.4 | 56.5 | 65.3 | 70.7 | 66.9 | 58.2 | 55.3 | 53.4 |
| 52.1 | 51.5 | 51.5 | 52.4 | 53.3 | 55.5 | 64.2 | 69.6 | 69.3 | 58.5 | 55.3 | 53.6 |
| 52.3 | 51.5 | 51.7 | 51.5 | 52.2 | 57.1 | 63.6 | 68.8 | 68.9 | 60.1 | 55.6 | 53.9 |
| 53.3 | 53.1 | 53.5 | 53.5 | 53.9 | 57.1 | 64.7 | 69.4 | 70.3 | 62.6 | 57.9 | 55.8 |
| 54.8 | 54.2 | 54.6 | 54.3 | 54.8 | 58.1 | 68.1 | 73.3 | 75.5 | 66.4 | 60.5 | 57.7 |
| 55.8 | 54.7 | 55.0 | 55.6 | 56.4 | 60.6 | 70.8 | 76.4 | 74.8 | 62.2 | | |

شكل المتسلسلة هو




دالة الترابط الذاتي

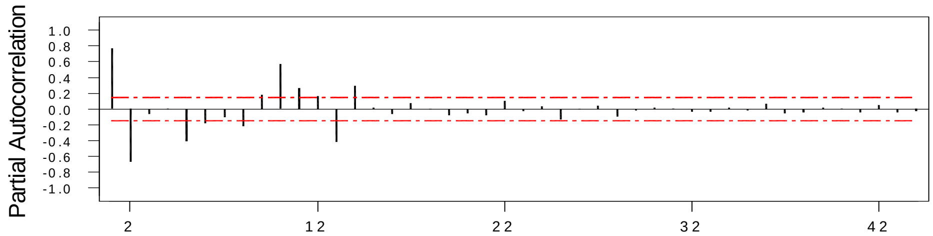
Autocorrelation Function for z(t)




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.77 | 10.31 | 108.10 | 13 | 0.68 | 3.34 | 694.28 | 25 | 0.61 | 2.30 | 1220.07 | 37 | 0.57 | 1.82 | 1709.36 |
| 2 | 0.33 | 2.93 | 127.34 | 14 | 0.28 | 1.30 | 709.82 | 26 | 0.25 | 0.91 | 1233.18 | 38 | 0.23 | 0.73 | 1721.70 |
| 3 | -0.11 | -0.99 | 129.74 | 15 | -0.12 | -0.53 | 712.43 | 27 | -0.11 | -0.42 | 1235.98 | 39 | -0.11 | -0.34 | 1724.43 |
| 4 | -0.38 | -3.28 | 156.83 | 16 | -0.36 | -1.65 | 738.30 | 28 | -0.34 | -1.24 | 1261.29 | 40 | -0.33 | -1.02 | 1749.06 |
| 5 | -0.52 | -4.22 | 207.24 | 17 | -0.49 | -2.21 | 786.28 | 29 | -0.47 | -1.67 | 1308.32 | 41 | -0.44 | -1.38 | 1795.00 |
| 6 | -0.56 | -4.16 | 266.55 | 18 | -0.53 | -2.33 | 843.04 | 30 | -0.51 | -1.80 | 1364.72 | 42 | -0.48 | -1.48 | 1849.41 |
| 7 | -0.52 | -3.50 | 316.80 | 19 | -0.49 | -2.10 | 892.36 | 31 | -0.48 | -1.65 | 1414.08 | 43 | -0.45 | -1.37 | 1897.05 |
| 8 | -0.38 | -2.39 | 343.71 | 20 | -0.37 | -1.54 | 920.39 | 32 | -0.36 | -1.23 | 1442.71 | 44 | -0.34 | -1.04 | 1925.30 |
| 9 | -0.12 | -0.71 | 346.25 | 21 | -0.14 | -0.56 | 924.24 | 33 | -0.14 | -0.49 | 1447.34 | | | | |
| 10 | 0.29 | 1.76 | 362.08 | 22 | 0.23 | 0.95 | 935.37 | 34 | 0.19 | 0.66 | 1455.79 | | | | |
| 11 | 0.69 | 4.15 | 453.58 | 23 | 0.61 | 2.46 | 1011.31 | 35 | 0.54 | 1.82 | 1520.89 | | | | |
| 12 | 0.88 | 4.86 | 603.87 | 24 | 0.79 | 3.10 | 1140.90 | 36 | 0.72 | 2.37 | 1636.49 | | | | |

والترابط الذاتي الجزئي

Partial Autocorrelation Function for z(t)




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.77 | 10.31 | 13 | -0.42 | -5.62 | 25 | -0.13 | -1.75 | 37 | -0.06 | -0.74 |
| 2 | -0.68 | -9.01 | 14 | 0.29 | 3.89 | 26 | -0.00 | -0.05 | 38 | -0.05 | -0.62 |
| 3 | -0.06 | -0.82 | 15 | 0.01 | 0.16 | 27 | 0.04 | 0.50 | 39 | 0.01 | 0.17 |
| 4 | 0.01 | 0.07 | 16 | -0.07 | -0.92 | 28 | -0.10 | -1.30 | 40 | 0.00 | 0.00 |
| 5 | -0.42 | -5.55 | 17 | 0.07 | 0.95 | 29 | -0.03 | -0.34 | 41 | -0.05 | -0.63 |
| 6 | -0.18 | -2.45 | 18 | -0.01 | -0.11 | 30 | 0.01 | 0.19 | 42 | 0.05 | 0.66 |
| 7 | -0.11 | -1.48 | 19 | -0.09 | -1.15 | 31 | 0.01 | 0.07 | 43 | -0.05 | -0.64 |
| 8 | -0.22 | -2.96 | 20 | -0.05 | -0.72 | 32 | -0.04 | -0.55 | 44 | -0.03 | -0.42 |
| 9 | 0.18 | 2.39 | 21 | -0.08 | -1.11 | 33 | -0.04 | -0.52 | | | |
| 10 | 0.57 | 7.65 | 22 | 0.10 | 1.38 | 34 | 0.01 | 0.15 | | | |
| 11 | 0.26 | 3.50 | 23 | -0.03 | -0.35 | 35 | -0.02 | -0.32 | | | |
| 12 | 0.16 | 2.16 | 24 | 0.03 | 0.37 | 36 | 0.07 | 0.90 | | | |

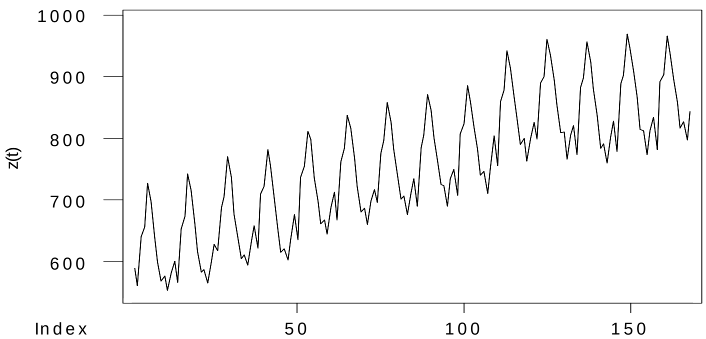
نلاحظ الأنماط الموسمية واضحة في الأشكال السابقة.

<u>**مثال آخر**</u>

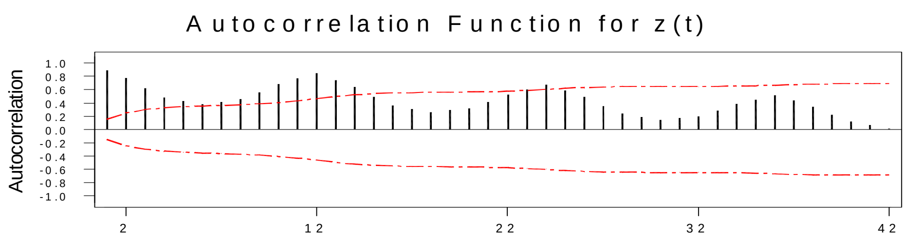
z(t)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 589 | 561 | 640 | 656 | 727 | 697 | 640 | 599 | 568 | 577 | 553 | 582 |
| 600 | 566 | 653 | 673 | 742 | 716 | 660 | 617 | 583 | 587 | 565 | 598 |
| 628 | 618 | 688 | 705 | 770 | 736 | 678 | 639 | 604 | 611 | 594 | 634 |
| 658 | 622 | 709 | 722 | 782 | 756 | 702 | 653 | 615 | 621 | 602 | 635 |
| 677 | 635 | 736 | 755 | 811 | 798 | 735 | 697 | 661 | 667 | 645 | 688 |
| 713 | 667 | 762 | 784 | 837 | 817 | 767 | 722 | 681 | 687 | 660 | 698 |
| 717 | 696 | 775 | 796 | 858 | 826 | 783 | 740 | 701 | 706 | 677 | 711 |
| 734 | 690 | 785 | 805 | 871 | 845 | 801 | 764 | 725 | 723 | 690 | 734 |
| 750 | 707 | 807 | 824 | 886 | 859 | 819 | 783 | 740 | 747 | 711 | 751 |
| 804 | 756 | 860 | 878 | 942 | 913 | 869 | 834 | 790 | 800 | 763 | 800 |
| 826 | 799 | 890 | 900 | 961 | 935 | 894 | 855 | 809 | 810 | 766 | 805 |
| 821 | 773 | 883 | 898 | 957 | 924 | 881 | 837 | 784 | 791 | 760 | 802 |
| 828 | 778 | 889 | 902 | 969 | 947 | 908 | 867 | 815 | 812 | 773 | 813 |
| 834 | 782 | 892 | 903 | 966 | 937 | 896 | 858 | 817 | 827 | 797 | 843 |

شكل المتسلسلة

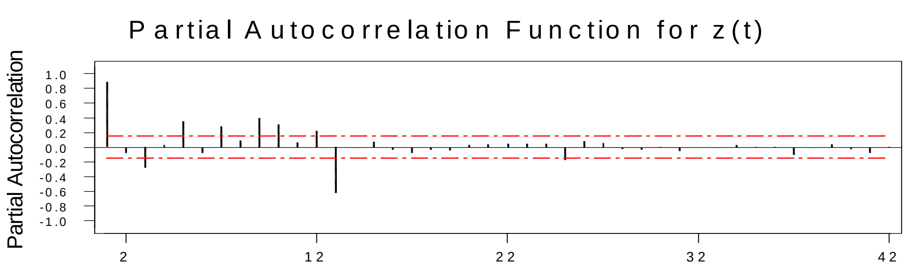



التر ابط الذاتي




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.89 | 11.56 | 135.94 | 13 | 0.74 | 2.96 | 954.68 | 25 | 0.58 | 1.86 | 1483.11 | 37 | 0.43 | 1.27 | 1784.17 |
| 2 | 0.78 | 6.27 | 240.13 | 14 | 0.64 | 2.41 | 1030.09 | 26 | 0.49 | 1.52 | 1530.99 | 38 | 0.35 | 1.00 | 1810.60 |
| 3 | 0.62 | 4.12 | 306.72 | 15 | 0.49 | 1.79 | 1074.85 | 27 | 0.35 | 1.09 | 1556.45 | 39 | 0.22 | 0.64 | 1821.68 |
| 4 | 0.49 | 2.95 | 347.97 | 16 | 0.36 | 1.31 | 1099.68 | 28 | 0.24 | 0.73 | 1568.20 | 40 | 0.12 | 0.33 | 1824.67 |
| 5 | 0.43 | 2.47 | 380.09 | 17 | 0.31 | 1.09 | 1117.39 | 29 | 0.19 | 0.57 | 1575.44 | 41 | 0.06 | 0.18 | 1825.56 |
| 6 | 0.38 | 2.10 | 405.02 | 18 | 0.25 | 0.90 | 1129.76 | 30 | 0.14 | 0.43 | 1579.55 | 42 | 0.02 | 0.05 | 1825.62 |
| 7 | 0.41 | 2.25 | 435.54 | 19 | 0.29 | 1.01 | 1145.59 | 31 | 0.17 | 0.51 | 1585.52 | | | | |
| 8 | 0.45 | 2.40 | 472.37 | 20 | 0.32 | 1.12 | 1165.42 | 32 | 0.20 | 0.60 | 1593.62 | | | | |
| 9 | 0.56 | 2.87 | 529.07 | 21 | 0.42 | 1.44 | 1199.13 | 33 | 0.28 | 0.85 | 1610.35 | | | | |
| 10 | 0.69 | 3.34 | 614.27 | 22 | 0.53 | 1.81 | 1253.81 | 34 | 0.38 | 1.15 | 1641.57 | | | | |
| 11 | 0.77 | 3.52 | 721.72 | 23 | 0.60 | 2.03 | 1325.51 | 35 | 0.45 | 1.35 | 1685.27 | | | | |
| 12 | 0.84 | 3.61 | 852.41 | 24 | 0.67 | 2.21 | 1415.29 | 36 | 0.52 | 1.53 | 1742.95 | | | | |

والترابط الذاتي الجزئي



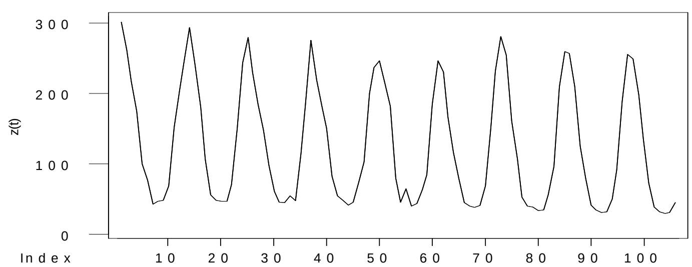

| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.89 | 11.56 | 13 | -0.63 | -8.19 | 25 | -0.18 | -2.36 | 37 | -0.11 | -1.37 |
| 2 | -0.08 | -1.06 | 14 | -0.02 | -0.21 | 26 | 0.08 | 1.06 | 38 | -0.02 | -0.22 |
| 3 | -0.28 | -3.65 | 15 | 0.07 | 0.95 | 27 | 0.06 | 0.73 | 39 | 0.04 | 0.51 |
| 4 | 0.03 | 0.42 | 16 | -0.04 | -0.52 | 28 | -0.03 | -0.44 | 40 | -0.03 | -0.42 |
| 5 | 0.35 | 4.54 | 17 | -0.09 | -1.12 | 29 | -0.04 | -0.47 | 41 | -0.08 | -1.06 |
| 6 | -0.08 | -1.07 | 18 | -0.04 | -0.49 | 30 | 0.00 | 0.02 | 42 | 0.01 | 0.08 |
| 7 | 0.28 | 3.67 | 19 | -0.05 | -0.60 | 31 | -0.06 | -0.72 | | | |
| 8 | 0.09 | 1.19 | 20 | 0.03 | 0.38 | 32 | -0.01 | -0.11 | | | |
| 9 | 0.40 | 5.17 | 21 | 0.04 | 0.46 | 33 | -0.01 | -0.18 | | | |
| 10 | 0.30 | 3.95 | 22 | 0.05 | 0.67 | 34 | 0.03 | 0.38 | | | |
| 11 | 0.06 | 0.81 | 23 | 0.05 | 0.60 | 35 | 0.00 | 0.03 | | | |
| 12 | 0.22 | 2.88 | 24 | 0.05 | 0.59 | 36 | 0.01 | 0.09 | | | |

## مثال آخر

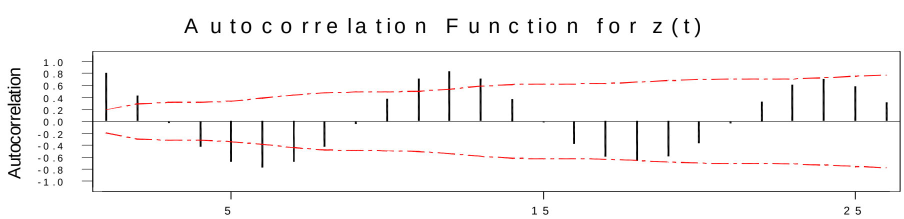
z(t)

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 302 | 262 | 218 | 175 | 100 | 077 | 043 | 047 | 049 | 069 | 152 | 205 | 246 | 294 |
| 242 | 181 | 107 | 056 | 049 | 047 | 047 | 071 | 151 | 244 | 280 | 230 | 185 | 148 |
| 098 | 061 | 046 | 045 | 055 | 048 | 115 | 185 | 276 | 220 | 181 | 151 | 083 | 055 |
| 049 | 042 | 046 | 074 | 103 | 200 | 237 | 247 | 215 | 182 | 080 | 046 | 065 | |
| 040 | 044 | 063 | 085 | 185 | 247 | 231 | 167 | 117 | 079 | 045 | 040 | 038 | 041 |
| 069 | 152 | 232 | 282 | 255 | 161 | 107 | 053 | 040 | 039 | 034 | 035 | 056 | 097 |
| 210 | 260 | 257 | 210 | 125 | 080 | 042 | 035 | 031 | 032 | 050 | 092 | 189 | 256 |
| 250 | 198 | 136 | 073 | 039 | 032 | 030 | 031 | 045 | | | | | |

ولها الشكل

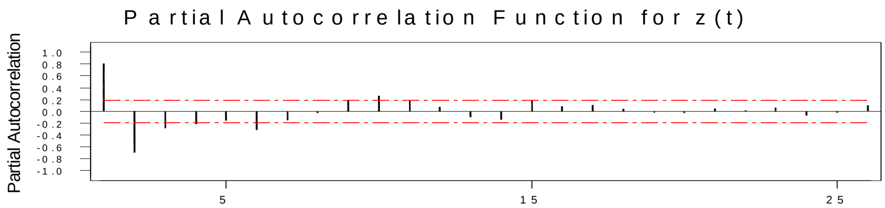



ودالة الترابط الذاتي




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.81 | 8.38 | 72.22 | 8 | -0.43 | -1.78 | 310.66 | 15 | -0.03 | -0.08 | 556.18 | 22 | 0.33 | 0.92 | 756.98 |
| 2 | 0.43 | 2.89 | 92.32 | 9 | -0.04 | -0.18 | 310.88 | 16 | -0.38 | -1.19 | 574.07 | 23 | 0.61 | 1.71 | 808.97 |
| 3 | -0.03 | -0.17 | 92.40 | 10 | 0.38 | 1.54 | 328.22 | 17 | -0.60 | -1.88 | 620.22 | 24 | 0.71 | 1.93 | 879.42 |
| 4 | -0.43 | -2.70 | 113.13 | 11 | 0.71 | 2.82 | 389.72 | 18 | -0.67 | -2.03 | 678.36 | 25 | 0.59 | 1.55 | 928.41 |
| 5 | -0.69 | -4.03 | 166.37 | 12 | 0.84 | 3.10 | 476.22 | 19 | -0.59 | -1.72 | 724.17 | 26 | 0.31 | 0.80 | 942.46 |
| 6 | -0.78 | -3.99 | 235.17 | 13 | 0.71 | 2.42 | 538.84 | 20 | -0.37 | -1.05 | 742.21 | | | | |
| 7 | -0.68 | -3.09 | 289.33 | 14 | 0.37 | 1.20 | 556.10 | 21 | -0.04 | -0.10 | 742.38 | | | | |

ودالة الترابط الذاتي الجزئي




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.81 | 8.38 | 8 | -0.03 | -0.31 | 15 | 0.19 | 1.93 | 22 | 0.01 | 0.15 |
| 2 | -0.70 | -7.17 | 9 | 0.19 | 1.91 | 16 | 0.08 | 0.84 | 23 | 0.07 | 0.70 |
| 3 | -0.29 | -2.98 | 10 | 0.27 | 2.76 | 17 | 0.11 | 1.10 | 24 | -0.07 | -0.72 |
| 4 | -0.22 | -2.28 | 11 | 0.18 | 1.82 | 18 | 0.04 | 0.39 | 25 | -0.02 | -0.23 |
| 5 | -0.16 | -1.61 | 12 | 0.07 | 0.74 | 19 | -0.02 | -0.22 | 26 | 0.10 | 1.01 |
| 6 | -0.32 | -3.29 | 13 | -0.10 | -0.99 | 20 | -0.03 | -0.29 | | | |
| 7 | -0.16 | -1.60 | 14 | -0.15 | -1.52 | 21 | 0.04 | 0.46 | | | |

وكل هذه المتلسلات تبدي انماط موسمية واضحة.

## **إشتقاق دوال تنبؤ لبعض نماذج المتسلسلات الزمنية الموسمية التضاعفية:**

بما ان نماذج المتسلسلات الزمنية الموسمية هي حالة خاصة من نماذج ARIMA فإن طرق التعامل معها هي نفس الطرق السابقة من حيث التعرف علي شكل النموذج وتقدير معالم النموذج والإختبارات التفحصية ومن ثم التنبؤ. جميع الطرق والمعادلات التي درسناها سابقا للنماذج غير الموسمية تنطبق هنا. سوف نشتق دوال التنبؤ لبعض النماذج للتوضيح فقط.

1- دالة التنبؤ للنموذج $SARIMA(0,0,0)(0,1,1)_{12}$ :

ويكتب النموذج على الشكل

$$\left(1-B^{12}\right)z_t=\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$$

من المعادلة الفروقية

$$z_{n+\ell}=z_{n+\ell-12}+a_{n+\ell}-\Theta a_{n+\ell-12}$$

يمكن الحصول على التنبؤات كالتالي

$$\begin{aligned}
&z_n(1)=z_{n-11}-\Theta a_{n-11}\\
&z_n(2)=z_{n-10}-\Theta a_{n-10}\\
&\vdots\\
&z_n(12)=z_n-\Theta a_n\\
&z_n(\ell)=z_n(\ell-12),\quad \ell\ge 12
\end{aligned}$$

أو

$$z_n(\ell)=\begin{cases} z_{n+\ell-12}-\Theta a_{n+\ell-12}, & \ell=1,2,\ldots,12\\ z_n(\ell-12), & \ell>12\end{cases}$$

واضح أن

$$z_n(1) = z_n(13) = z_n(25) = \cdots$$
$$z_n(2) = z_n(14) = z_n(26) = \cdots$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n(24) = z_n(36) = \cdots$$

تباين أخطاء التنبؤ

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2+\cdots+\psi_{\ell-1}^2\right)$$

ودالة الأوزان تعطى بالعلاقة (برهن ذلك)

$$\psi_j = \begin{cases} 1-\Theta, & j = 12, 24, \ldots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

وبتعويض الأوزان في صيغة تباين أخطاء التنبؤ نجد

$$V\left[e_n(\ell)\right] = \sigma^2\left\{1+\left\lfloor \frac{\ell-1}{12} \right\rfloor (1-\Theta)^2\right\}$$

حيث $\lfloor x \rfloor$ تعني الجزء الصحيح من $x$ .

2- دالة التنبؤ للنموذج $\text{SARIMA}(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ :

ويكتب النموذج على الشكل

$$(1-B)\left(1-B^{12}\right)z_t = (1-\theta B)\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$$

من المعادلة الفروقية

$$z_{n+\ell} = z_{n+\ell-1} + z_{n+\ell-12} - z_{n+\ell-13} + a_{n+\ell} - \theta a_{n+\ell-1} - \Theta a_{n+\ell-12} + \theta\Theta a_{n+\ell-13}$$

يمكن الحصول على التنبؤات كالتالي

$$z_n(1) = z_n + z_{n-11} - z_{n-13} - \theta a_n - \Theta a_{n-11} + \theta\Theta a_{n-12}$$
$$z_n(2) = z_n(1) + z_{n-10} - z_{n-11} - \Theta a_{n-10} + \theta\Theta a_{n-11}$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n(11) + z_n - z_{n-1} - \Theta a_n + \theta\Theta a_{n-1}$$
$$z_n(13) = z_n(12) + z_n(1) - z_n + \theta\Theta a_n$$
$$z_n(\ell) = z_n(\ell-1) + z_n(\ell-12) - z_n(\ell-13)$$

وهكذا بقيم أولية

$$z_n(1) = z_n + z_{n-11} - z_{n-13} - \theta a_n - \Theta a_{n-11} + \theta\Theta a_{n-12}$$
$$z_n(2) = z_n(1) + z_{n-10} - z_{n-11} - \Theta a_{n-10} + \theta\Theta a_{n-11}$$
$$\vdots$$
$$z_n(12) = z_n(11) + z_n - z_{n-1} - \Theta a_n + \theta\Theta a_{n-1}$$
$$z_n(13) = z_n(12) + z_n(1) - z_n + \theta\Theta a_n$$

وعلاقة تكرارية

$$z_n(\ell) = z_n(\ell-1) + z_n(\ell-12) - z_n(\ell-13), \quad \ell > 13$$

يمكن توليد العدد المطلوب من التنبؤات.

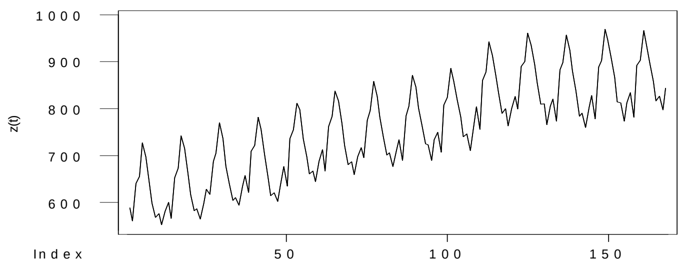
## أمثلة وحالات دراسة لبعض المتسلسلات الزمنية الموسمية:

**مثال (1) :** سوف نحاول إيجاد نموذج من عائلة SARIMA ينطبق على المشاهدات التالية:

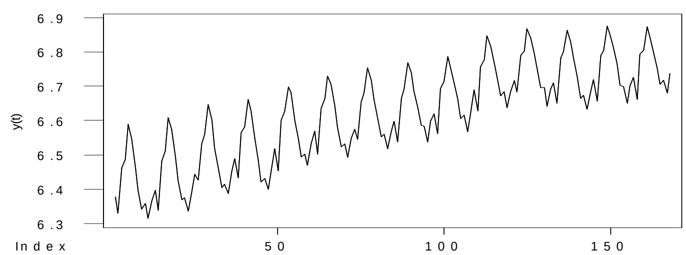
z(t)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 589 | 561 | 640 | 656 | 727 | 697 | 640 | 599 | 568 | 577 | 553 | 582 |
| 600 | 566 | 653 | 673 | 742 | 716 | 660 | 617 | 583 | 587 | 565 | 598 |
| 628 | 618 | 688 | 705 | 770 | 736 | 678 | 639 | 604 | 611 | 594 | 634 |
| 658 | 622 | 709 | 722 | 782 | 756 | 702 | 653 | 615 | 621 | 602 | 635 |
| 677 | 635 | 736 | 755 | 811 | 798 | 735 | 697 | 661 | 667 | 645 | |
| 688 | 713 | 667 | 762 | 784 | 837 | 817 | 767 | 722 | 681 | 687 | 660 |
| 698 | 717 | 696 | 775 | 796 | 858 | 826 | 783 | 740 | 701 | 706 | 677 |
| 711 | 734 | 690 | 785 | 805 | 871 | 845 | 801 | 764 | 725 | 723 | 690 |
| 734 | 750 | 707 | 807 | 824 | 886 | 859 | 819 | 783 | 740 | 747 | 711 |
| 751 | 804 | 756 | 860 | 878 | 942 | 913 | 869 | 834 | 790 | 800 | 763 |
| 800 | 826 | 799 | 890 | 900 | 961 | 935 | 894 | 855 | 809 | 810 | 766 |
| 805 | 821 | 773 | 883 | 898 | 957 | 924 | 881 | 837 | 784 | 791 | 760 |
| 802 | 828 | 778 | 889 | 902 | 969 | 947 | 908 | 867 | 815 | 812 | 773 |
| 813 | 834 | 782 | 892 | 903 | 966 | 937 | 896 | 858 | 817 | 827 | 797 |
| 843 | | | | | | | | | | | |

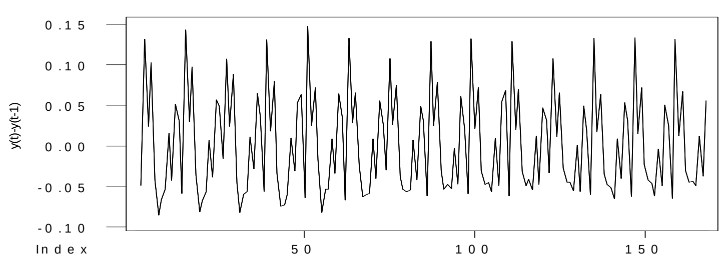
والمخطط الزمني للمشاهدات




يلاحظ ان المتسلسلة غير مستقرة في التباين والمتوسط لذلك نثبت التباين أولا بتحويل لوغارثمي أي $y_t = \ln(z_t)$ ونرسم المخطط الزمني لها

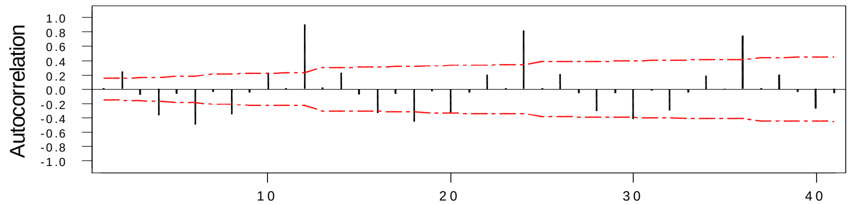



نلاحظ ان المتسلسلة استقرت في التباين ولكن لاتزال غير مستقرة في المتوسط لذلك نأخذ الفرق الأول $x_t = (1-B)\,y_t = (1-B)\ln(z_t)$ ولها الشكل التالي



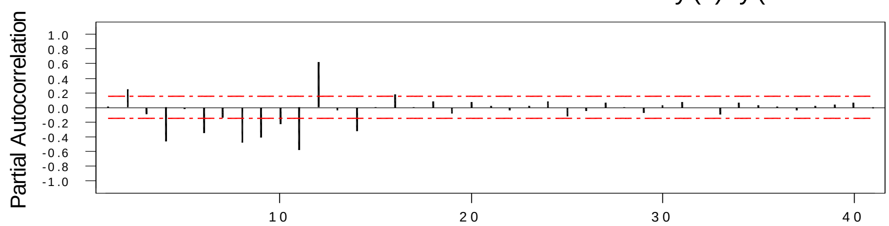

المتسلسلة الآن مستقرة في كل من التباين والمتوسط. لننظر إلى دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لها

Autocorrelation Function for y(t)-y(t



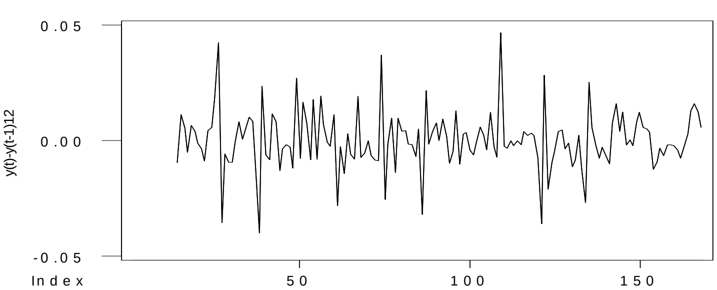

| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01 | 0.12 | 0.02 | 13 | 0.02 | 0.12 | 261.47 | 25 | 0.02 | 0.08 | 497.35 | 37 | 0.01 | 0.05 | 713.16 |
| 2 | 0.25 | 3.23 | 10.70 | 14 | 0.23 | 1.51 | 271.29 | 26 | 0.21 | 1.10 | 506.50 | 38 | 0.20 | 0.90 | 722.06 |
| 3 | -0.08 | -1.01 | 11.88 | 15 | -0.07 | -0.47 | 272.30 | 27 | -0.06 | -0.29 | 507.16 | 39 | -0.04 | -0.19 | 722.45 |
| 4 | -0.37 | -4.48 | 35.60 | 16 | -0.34 | -2.18 | 293.73 | 28 | -0.31 | -1.57 | 526.45 | 40 | -0.27 | -1.21 | 738.86 |
| 5 | -0.06 | -0.68 | 36.28 | 17 | -0.06 | -0.39 | 294.45 | 29 | -0.06 | -0.29 | 527.14 | 41 | -0.05 | -0.24 | 739.51 |
| 6 | -0.50 | -5.41 | 79.97 | 18 | -0.46 | -2.88 | 334.67 | 30 | -0.42 | -2.09 | 563.05 | | | | |
| 7 | -0.04 | -0.33 | 80.19 | 19 | -0.03 | -0.20 | 334.88 | 31 | -0.02 | -0.12 | 563.16 | | | | |
| 8 | -0.35 | -3.30 | 102.37 | 20 | -0.32 | -1.93 | 354.96 | 32 | -0.30 | -1.47 | 582.05 | | | | |
| 9 | -0.05 | -0.43 | 102.80 | 21 | -0.05 | -0.26 | 355.36 | 33 | -0.05 | -0.24 | 582.58 | | | | |
| 10 | 0.23 | 2.01 | 112.29 | 22 | 0.21 | 1.20 | 363.55 | 34 | 0.18 | 0.89 | 589.84 | | | | |
| 11 | 0.01 | 0.11 | 112.32 | 23 | 0.01 | 0.08 | 363.58 | 35 | 0.00 | 0.02 | 589.85 | | | | |
| 12 | 0.90 | 7.74 | 261.41 | 24 | 0.82 | 4.76 | 497.30 | 36 | 0.76 | 3.63 | 713.14 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for y(t)-y(t



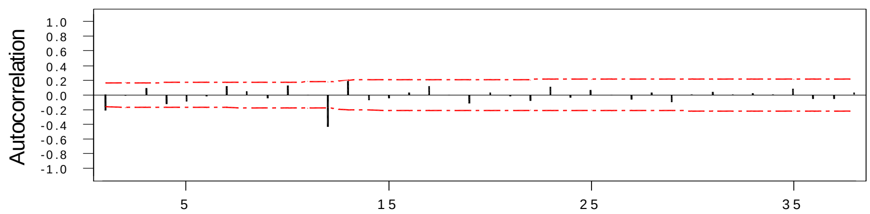

| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01 | 0.12 | 13 | -0.04 | -0.48 | 25 | -0.13 | -1.67 | 37 | -0.04 | -0.51 |
| 2 | 0.25 | 3.23 | 14 | -0.33 | -4.26 | 26 | -0.05 | -0.61 | 38 | 0.02 | 0.30 |
| 3 | -0.09 | -1.20 | 15 | 0.00 | 0.06 | 27 | 0.06 | 0.84 | 39 | 0.04 | 0.48 |
| 4 | -0.46 | -5.97 | 16 | 0.18 | 2.29 | 28 | 0.00 | 0.05 | 40 | 0.06 | 0.81 |
| 5 | -0.02 | -0.22 | 17 | 0.01 | 0.07 | 29 | -0.07 | -0.94 | 41 | -0.02 | -0.20 |
| 6 | -0.35 | -4.52 | 18 | 0.08 | 1.06 | 30 | 0.03 | 0.34 | | | |
| 7 | -0.14 | -1.82 | 19 | -0.08 | -1.04 | 31 | 0.07 | 0.93 | | | |
| 8 | -0.48 | -6.26 | 20 | 0.08 | 0.98 | 32 | -0.01 | -0.09 | | | |
| 9 | -0.41 | -5.36 | 21 | 0.02 | 0.29 | 33 | -0.10 | -1.31 | | | |
| 10 | -0.23 | -2.99 | 22 | -0.04 | -0.53 | 34 | 0.06 | 0.80 | | | |
| 11 | -0.58 | -7.55 | 23 | 0.02 | 0.29 | 35 | 0.03 | 0.39 | | | |
| 12 | 0.63 | 8.08 | 24 | 0.08 | 1.04 | 36 | 0.01 | 0.13 | | | |

يلاحظ من دالة الترابط الذاتي ان المتسلسلة غير مستقرة موسميا لأن قيمها عند التخلفات 12 و 24 و 36 تتخامد ببطء لذلك نأخذ الفرق الموسمي الأول $w_t = \left(1 - B^{12}\right)\left(1 - B\right)\ln\left(z_t\right)$ ونرسمها بعد هذا التفريق



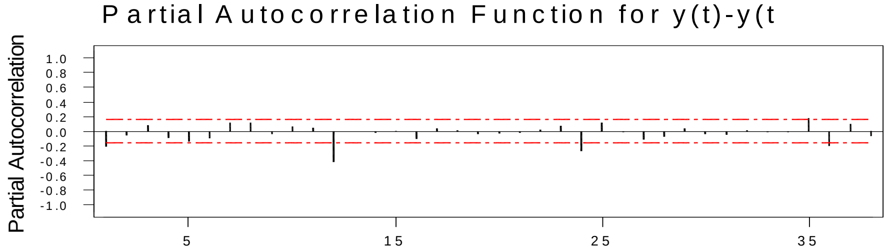

نوجد دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي لها

Autocorrelation Function for y(t)-y(t



| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.21 | -2.65 | 7.15 | 13 | 0.18 | 1.80 | 56.64 | 25 | 0.07 | 0.62 | 67.67 | 37 | -0.06 | -0.54 | 73.71 |
| 2 | -0.01 | -0.13 | 7.17 | 14 | -0.07 | -0.70 | 57.54 | 26 | -0.00 | -0.02 | 67.67 | 38 | 0.03 | 0.26 | 73.88 |
| 3 | 0.10 | 1.14 | 8.63 | 15 | -0.05 | -0.48 | 57.97 | 27 | -0.06 | -0.57 | 68.38 | | | | |
| 4 | -0.13 | -1.49 | 11.20 | 16 | 0.03 | 0.26 | 58.10 | 28 | 0.03 | 0.30 | 68.58 | | | | |
| 5 | -0.10 | -1.11 | 12.67 | 17 | 0.12 | 1.13 | 60.58 | 29 | -0.10 | -0.90 | 70.40 | | | | |
| 6 | -0.02 | -0.28 | 12.77 | 18 | -0.00 | -0.02 | 60.58 | 30 | 0.01 | 0.08 | 70.41 | | | | |
| 7 | 0.12 | 1.33 | 14.95 | 19 | -0.11 | -1.08 | 62.91 | 31 | 0.04 | 0.38 | 70.74 | | | | |
| 8 | 0.05 | 0.54 | 15.31 | 20 | 0.03 | 0.25 | 63.04 | 32 | 0.00 | 0.04 | 70.74 | | | | |
| 9 | -0.05 | -0.58 | 15.75 | 21 | -0.02 | -0.20 | 63.12 | 33 | 0.02 | 0.19 | 70.83 | | | | |
| 10 | 0.13 | 1.45 | 18.49 | 22 | -0.09 | -0.80 | 64.45 | 34 | 0.00 | 0.03 | 70.83 | | | | |
| 11 | -0.01 | -0.09 | 18.50 | 23 | 0.11 | 0.99 | 66.52 | 35 | 0.09 | 0.80 | 72.36 | | | | |
| 12 | -0.44 | -4.90 | 50.88 | 24 | -0.04 | -0.38 | 66.82 | 36 | -0.06 | -0.51 | 72.99 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for y(t)-y(t



| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.21 | -2.65 | 13 | -0.00 | -0.03 | 25 | 0.12 | 1.51 | 37 | 0.10 | 1.23 |
| 2 | -0.06 | -0.73 | 14 | -0.02 | -0.25 | 26 | -0.01 | -0.15 | 38 | -0.06 | -0.79 |
| 3 | 0.08 | 1.06 | 15 | 0.00 | 0.00 | 27 | -0.12 | -1.44 | | | |
| 4 | -0.09 | -1.16 | 16 | -0.11 | -1.40 | 28 | -0.07 | -0.91 | | | |
| 5 | -0.15 | -1.82 | 17 | 0.04 | 0.47 | 29 | 0.04 | 0.44 | | | |
| 6 | -0.10 | -1.19 | 18 | 0.01 | 0.12 | 30 | -0.04 | -0.53 | | | |
| 7 | 0.11 | 1.41 | 19 | -0.04 | -0.52 | 31 | -0.05 | -0.60 | | | |
| 8 | 0.11 | 1.42 | 20 | -0.03 | -0.35 | 32 | 0.02 | 0.19 | | | |
| 9 | -0.04 | -0.51 | 21 | -0.03 | -0.31 | 33 | -0.01 | -0.12 | | | |
| 10 | 0.06 | 0.80 | 22 | 0.03 | 0.32 | 34 | -0.02 | -0.19 | | | |
| 11 | 0.05 | 0.59 | 23 | 0.07 | 0.91 | 35 | 0.18 | 2.21 | | | |
| 12 | -0.42 | -5.23 | 24 | -0.27 | -3.41 | 36 | -0.21 | -2.57 | | | |

من انماط دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للمتسلسلة $w_t=\left(1-B^{12}\right)\left(1-B\right)\ln\left(z_t\right)$

نجد ان قيم $p$ و $q$ الممكنة هي 0 و 0 اي نطبق النموذج

$$\left(1-B^{12}\right)\left(1-B\right)\ln\left(z_t\right)=\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$$

هو $SARIMA(0,1,0)(0,1,1)_{12}$ الأمر التالي في MINITAB يطبق هذا النموذج

ARIMA 0 1 0 0 1 1 12 'y(t)' ;

NoConstant.

لاحظ اننا استخدمنا $y_t=\ln\left(z_t\right)$ وللحصول على النتائج النهائية نجري التحويل $z_t=e^{y_t}$

**النتائج:**

```
MTB > Name c14 = 'RESI3' c15 = 'FITS3'
MTB > ARIMA 0 1 0 0 1 1 12 'y(t)' 'RESI3' 'FITS3';
SUBC>   NoConstant;
SUBC>   Forecast 24 c7 c8 c9;
```

```
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for y(t)

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0       0.0228597    0.100
    1       0.0204943    0.250
    2       0.0187066    0.400
    3       0.0174234    0.550
    4       0.0169841    0.684
    5       0.0169841    0.683
    6       0.0169841    0.683
Relative change in each estimate less than  0.0010

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
SMA 12      0.6831      0.0610     11.20

Differencing: 1 regular, 1 seasonal of order 12
Number  of  observations:    Original  series  168,  after
differencing 155
Residuals:    SS = 0.0165799  (backforecasts excluded)
              MS = 0.0001077  DF = 154
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                    12              24              36
48
Chi-Square      9.0(DF=11)     29.9(DF=23)     44.5(DF=35)
59.4(DF=47)

Forecasts from period 168
                             95 Percent Limits
```

| Period | Forecast | Lower | Upper |
| --- | --- | --- | --- |
| Actual | | | |
| 169 | 6.76750 | 6.74716 | 6.78784 |
| 170 | 6.70901 | 6.68024 | 6.73778 |
| 171 | 6.83815 | 6.80292 | 6.87338 |
| 172 | 6.85381 | 6.81313 | 6.89450 |
| 173 | 6.92288 | 6.87739 | 6.96836 |
| 174 | 6.89349 | 6.84366 | 6.94331 |
| 175 | 6.84654 | 6.79272 | 6.90035 |
| 176 | 6.80008 | 6.74255 | 6.85761 |
| 177 | 6.74395 | 6.68293 | 6.80497 |
| 178 | 6.75028 | 6.68596 | 6.81461 |
| 179 | 6.70664 | 6.63918 | 6.77410 |
| 180 | 6.75999 | 6.68952 | 6.83045 |
| 181 | 6.79052 | 6.71514 | 6.86590 |
| 182 | 6.73203 | 6.65203 | 6.81203 |
| 183 | 6.86117 | 6.77680 | 6.94554 |
| 184 | 6.87684 | 6.78832 | 6.96535 |
| 185 | 6.94590 | 6.85342 | 7.03838 |
| 186 | 6.91651 | 6.82023 | 7.01279 |
| 187 | 6.86956 | 6.76962 | 6.96950 |
| 188 | 6.82310 | 6.71963 | 6.92657 |
| 189 | 6.76697 | 6.66009 | 6.87385 |
| 190 | 6.77330 | 6.66312 | 6.88349 |
| 191 | 6.72966 | 6.61627 | 6.84305 |
| 192 | 6.78301 | 6.66649 | 6.89952 |

أي أن النموذج المقترح لهذه المتسلسلة هو

$$\left(1-B^{12}\right)\left(1-B\right)\ln\left(z_t\right)=\left(1-0.683B^{12}\right)a_t,\quad a_t\sim N\left(0,0.0001077\right)$$

لاحظ ان

$$\Theta=0.683,\quad s.e.\left(\Theta\right)=0.061,\quad t=11.2$$

أي ان المعلم عالي المعنوية.

**فحص البواقي:**

**إختبار المتوسط**

```
MTB > ZTest 0.0 0.0103778 'RESI3';
```

```
SUBC>   Alternative 0.
```

**Z-Test**

```
Test of mu = 0.000000 vs mu not = 0.000000
The assumed sigma = 0.0104

Variable      N       Mean     StDev   SE Mean         Z          P
RESI3       155 -0.000111 0.010375  0.000834     -0.13       0.89
```

لاحظ ان الـ P-value=0.89 وهي اكبر من 0.05 اي لانرفض أن متوسط البواقي صفرا

**<u>إختبار عشوائية البواقي</u>**

```
MTB > Runs 0 'RESI3'.
```

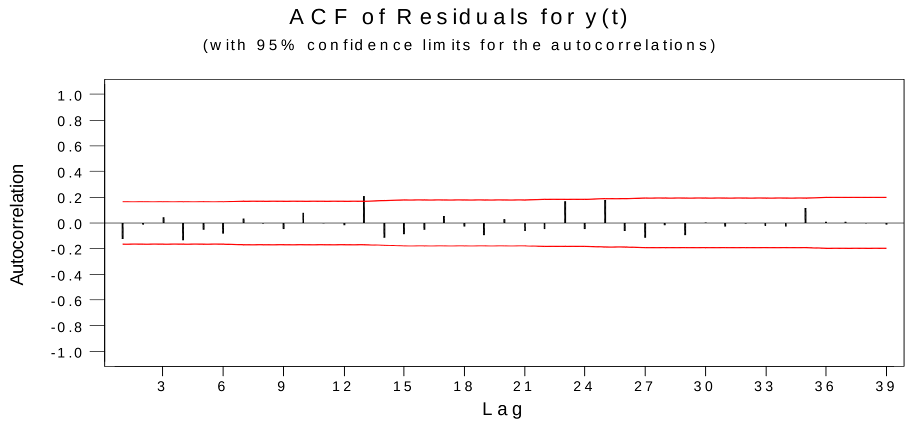
**Runs Test**

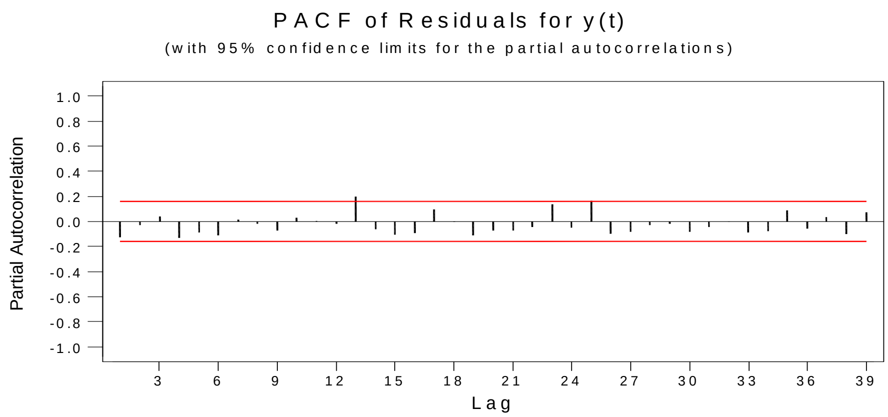
```
    RESI3

    K =      0.0000



    The observed number of runs =  70
    The expected number of runs =  78.1097
    72 Observations above K   83 below
              The test is significant at  0.1893
              Cannot reject at alpha = 0.05
```

الإختبار معنوي عند 0.1893 اي اننا لانرفض فرضية عشوائية البواقي

**<u>إختبار إستقلال البواقي:</u>**

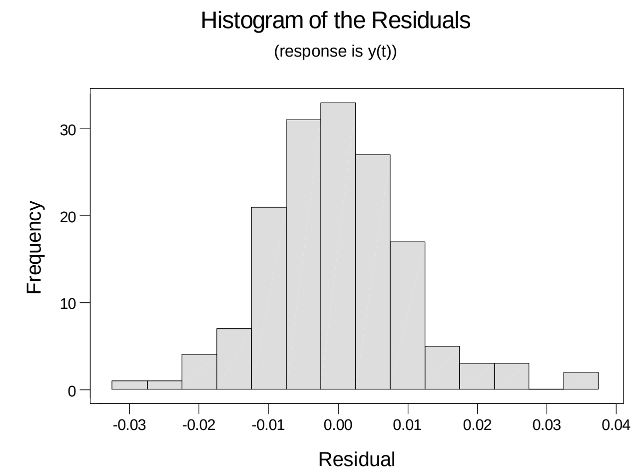
دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

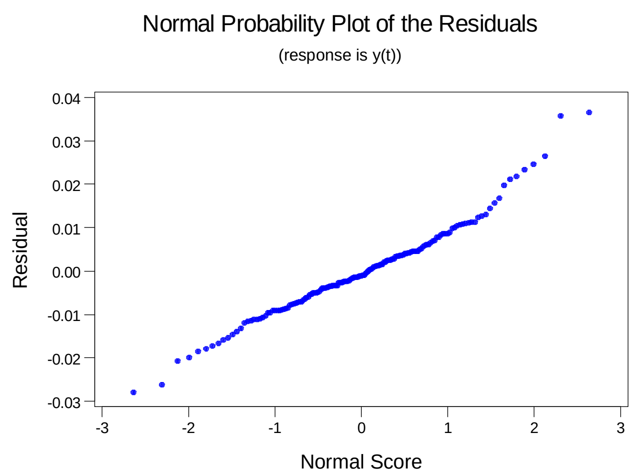


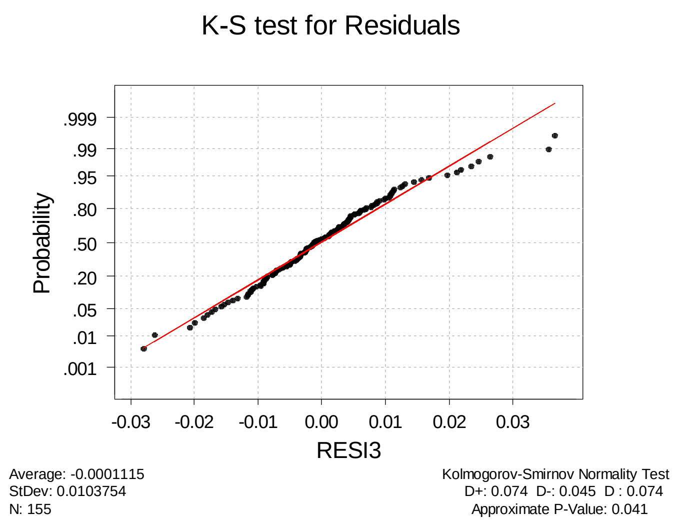




نلاحظ انها تعطي انماط الضجة البيضاء أي انها غير مترابطة وإذا كانت طبيعية فهي مستقلة.

**<u>إختبار طبيعية البواقي:</u>**



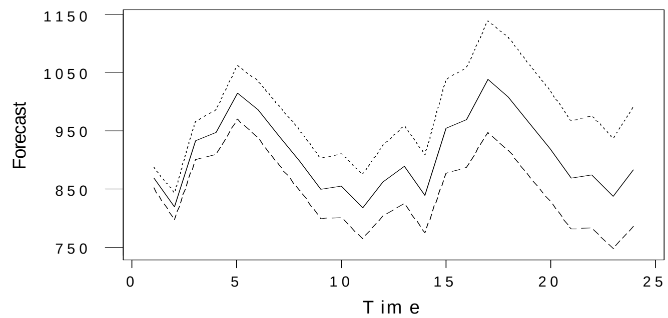



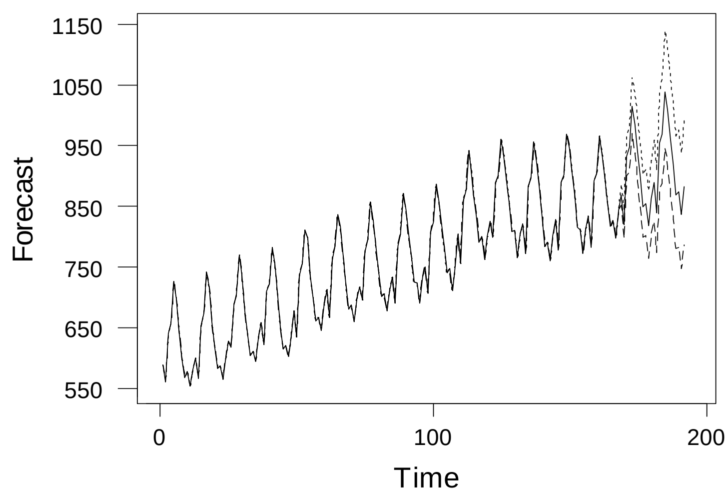

لاحظ ان الـ P-value لإختبار K-S يعطي 0.041 وهي اقل من 0.05 اذا الإختبار معنوي عند $\alpha = 0.05$ اي لانرفض فرضية طبيعية البواقي.

**التنبؤ بإستخدام النموذج:**

في المخرجات السابقة قمنا بالتنبؤ عن 24 قيمة مستقبلية مع 95% فترات تنبؤ ونرسمها بالرسم التالي:




والرسم التالي للمتسلسلة مع التنبؤات وحدود التنبؤ




**حالة دراسة :**

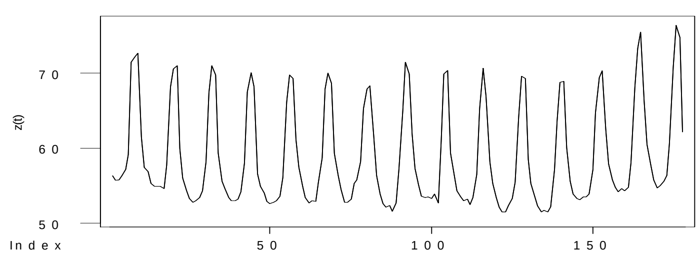
سوف نحاول إيجاد نموذج من عائلة SARIMA ينطبق على المشاهدات التالية:

z(t)

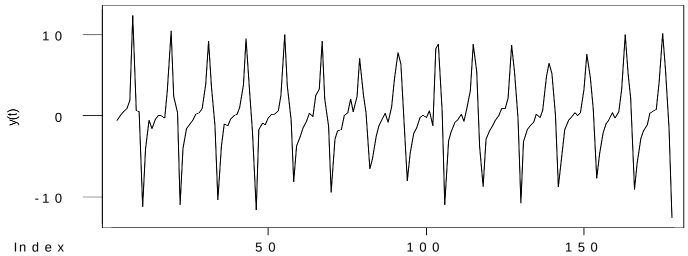
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56.3 | 55.7 | 55.8 | 56.3 | 57.2 | 59.1 | 71.5 | 72.2 |
| 72.7 | 61.5 | 57.4 | 56.9 | 55.3 | 54.9 | 54.9 | 54.9 |
| 54.6 | 57.7 | 68.2 | 70.6 | 71.0 | 60.0 | 56.0 | 54.4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53.3 | 52.8 | 53.0 | 53.4 | 54.3 | 58.2 | 67.4 | 71.0 |
| 69.8 | 59.4 | 55.6 | 54.6 | 53.4 | 53.0 | 53.0 | 53.2 |
| 54.2 | 58.0 | 67.5 | 70.1 | 68.2 | 56.6 | 54.9 | 54.0 |
| 52.9 | 52.6 | 52.8 | 53.0 | 53.6 | 56.1 | 66.1 | 69.8 |
| 69.3 | 61.2 | 57.5 | 54.9 | 53.4 | 52.7 | 53.0 | 52.9 |
| 55.4 | 58.7 | 67.9 | 70.0 | 68.7 | 59.3 | 56.4 | 54.5 |
| 52.8 | 52.8 | 53.2 | 55.3 | 55.8 | 58.2 | 65.3 | 67.9 |
| 68.3 | 61.7 | 56.4 | 53.9 | 52.6 | 52.1 | 52.4 | 51.6 |
| 52.7 | 57.3 | 65.1 | 71.5 | 69.9 | 61.9 | 57.3 | 55.1 |
| 53.6 | 53.4 | 53.5 | 53.3 | 53.9 | 52.7 | 61.0 | 69.9 |
| 70.4 | 59.4 | 56.3 | 54.3 | 53.5 | 53.0 | 53.2 | 52.5 |
| 53.4 | 56.5 | 65.3 | 70.7 | 66.9 | 58.2 | 55.3 | 53.4 |
| 52.1 | 51.5 | 51.5 | 52.4 | 53.3 | 55.5 | 64.2 | 69.6 |
| 69.3 | 58.5 | 55.3 | 53.6 | 52.3 | 51.5 | 51.7 | 51.5 |
| 52.2 | 57.1 | 63.6 | 68.8 | 68.9 | 60.1 | 55.6 | 53.9 |
| 53.3 | 53.1 | 53.5 | 53.5 | 53.9 | 57.1 | 64.7 | 69.4 |
| 70.3 | 62.6 | 57.9 | 55.8 | 54.8 | 54.2 | 54.6 | 54.3 |
| 54.8 | 58.1 | 68.1 | 73.3 | 75.5 | 66.4 | 60.5 | 57.7 |
| 55.8 | 54.7 | 55.0 | 55.6 | 56.4 | 60.6 | 70.8 | 76.4 |
| 74.8 | 62.2 | | | | | | |

المخطط الزمني

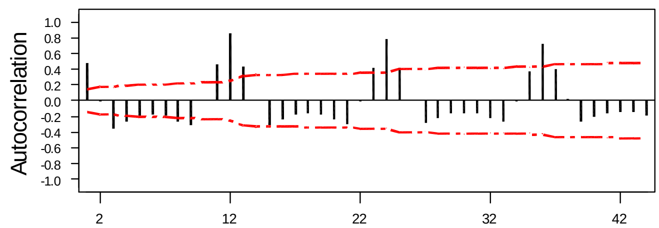



بأخذ الفرق الأول لإستقرار المتوسط $w_t = (1-B)z_t$ نجد



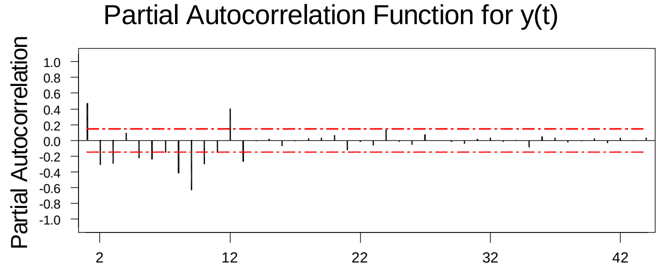

ولها دوال ترابط ذاتي وترابط ذاتي جزئي

Autocorrelation Function for y(t)



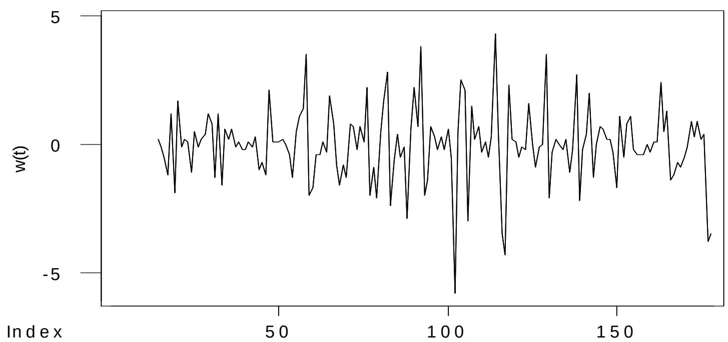

| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.47 | 6.32 | 40.60 | 13 | 0.43 | 2.76 | 354.69 | 25 | 0.41 | 2.06 | 638.60 | 37 | 0.40 | 1.72 | 896.48 |
| 2 | -0.02 | -0.22 | 40.67 | 14 | -0.01 | -0.03 | 354.69 | 26 | -0.00 | -0.01 | 638.60 | 38 | 0.02 | 0.07 | 896.54 |
| 3 | -0.37 | -4.10 | 65.83 | 15 | -0.33 | -2.00 | 375.77 | 27 | -0.29 | -1.43 | 656.89 | 39 | -0.27 | -1.14 | 913.29 |
| 4 | -0.28 | -2.82 | 80.10 | 16 | -0.25 | -1.49 | 388.04 | 28 | -0.23 | -1.08 | 667.77 | 40 | -0.21 | -0.89 | 923.75 |
| 5 | -0.21 | -2.00 | 87.92 | 17 | -0.19 | -1.12 | 395.15 | 29 | -0.17 | -0.82 | 674.14 | 41 | -0.17 | -0.71 | 930.47 |
| 6 | -0.19 | -1.77 | 94.41 | 18 | -0.17 | -0.97 | 400.68 | 30 | -0.16 | -0.78 | 679.93 | 42 | -0.15 | -0.61 | 935.55 |
| 7 | -0.21 | -1.92 | 102.29 | 19 | -0.19 | -1.09 | 407.71 | 31 | -0.17 | -0.83 | 686.56 | 43 | -0.16 | -0.65 | 941.37 |
| 8 | -0.27 | -2.46 | 115.89 | 20 | -0.25 | -1.42 | 419.89 | 32 | -0.23 | -1.06 | 697.63 | 44 | -0.20 | -0.83 | 950.82 |
| 9 | -0.32 | -2.85 | 135.47 | 21 | -0.31 | -1.76 | 439.21 | 33 | -0.28 | -1.31 | 714.89 | | | | |
| 10 | -0.00 | -0.02 | 135.48 | 22 | -0.01 | -0.06 | 439.24 | 34 | -0.01 | -0.06 | 714.93 | | | | |
| 11 | 0.46 | 3.91 | 176.37 | 23 | 0.42 | 2.35 | 475.10 | 35 | 0.37 | 1.70 | 745.11 | | | | |
| 12 | 0.86 | 6.71 | 318.37 | 24 | 0.79 | 4.28 | 602.75 | 36 | 0.72 | 3.27 | 860.42 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for y(t)



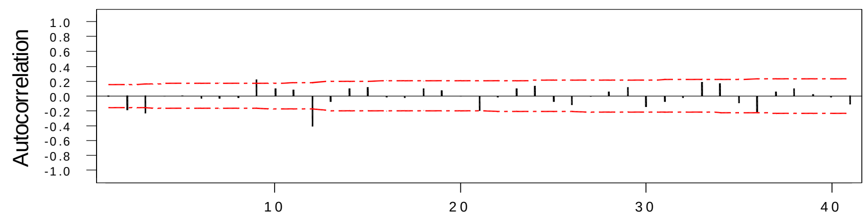

| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.47 | 6.32 | 13 | -0.27 | -3.62 | 25 | -0.02 | -0.33 | 37 | 0.03 | 0.38 |
| 2 | -0.32 | -4.21 | 14 | -0.01 | -0.17 | 26 | -0.06 | -0.74 | 38 | -0.03 | -0.35 |
| 3 | -0.30 | -4.00 | 15 | 0.01 | 0.13 | 27 | 0.07 | 0.99 | 39 | -0.01 | -0.17 |
| 4 | 0.09 | 1.22 | 16 | -0.07 | -0.95 | 28 | -0.00 | -0.05 | 40 | 0.02 | 0.23 |
| 5 | -0.23 | -3.05 | 17 | -0.01 | -0.16 | 29 | -0.02 | -0.26 | 41 | -0.04 | -0.56 |
| 6 | -0.25 | -3.33 | 18 | 0.02 | 0.24 | 30 | -0.04 | -0.60 | 42 | 0.03 | 0.35 |
| 7 | -0.16 | -2.09 | 19 | 0.03 | 0.44 | 31 | 0.01 | 0.20 | 43 | -0.00 | -0.00 |
| 8 | -0.43 | -5.67 | 20 | 0.07 | 0.89 | 32 | 0.03 | 0.37 | 44 | 0.03 | 0.43 |
| 9 | -0.64 | -8.56 | 21 | -0.12 | -1.62 | 33 | -0.02 | -0.25 | | | |
| 10 | -0.31 | -4.11 | 22 | -0.02 | -0.26 | 34 | 0.00 | 0.06 | | | |
| 11 | -0.16 | -2.18 | 23 | -0.06 | -0.86 | 35 | -0.09 | -1.17 | | | |
| 12 | 0.41 | 5.42 | 24 | 0.13 | 1.74 | 36 | 0.05 | 0.61 | | | |

نرى انها تحتاج إلى تفريق موسمي من الرتبة 12 أي $w_t = \left(1 - B^{12}\right)\left(1 - B\right) z_t$ وينتج المتسلسلة التالية



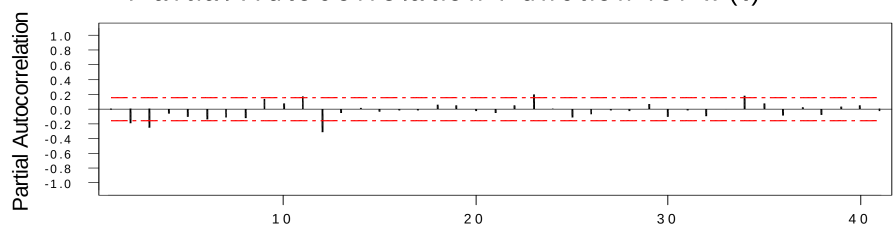

ولها دوال ترابط ذاتي وترابط ذاتي جزئي

Autocorrelation Function for w(t)




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.01 | -0.19 | 0.04 | 13 | -0.08 | -0.84 | 60.69 | 25 | -0.08 | -0.76 | 83.09 | 37 | 0.05 | 0.46 | 122.40 |
| 2 | -0.19 | -2.48 | 6.31 | 14 | 0.10 | 0.98 | 62.50 | 26 | -0.13 | -1.18 | 86.28 | 38 | 0.10 | 0.84 | 124.52 |
| 3 | -0.24 | -2.97 | 16.10 | 15 | 0.12 | 1.15 | 65.01 | 27 | -0.01 | -0.13 | 86.33 | 39 | 0.02 | 0.15 | 124.59 |
| 4 | -0.00 | -0.03 | 16.10 | 16 | -0.02 | -0.17 | 65.07 | 28 | 0.06 | 0.56 | 87.07 | 40 | -0.02 | -0.16 | 124.67 |
| 5 | 0.00 | 0.03 | 16.10 | 17 | -0.03 | -0.28 | 65.22 | 29 | 0.12 | 1.09 | 89.94 | 41 | -0.12 | -1.01 | 127.84 |
| 6 | -0.04 | -0.50 | 16.41 | 18 | 0.10 | 1.01 | 67.24 | 30 | -0.15 | -1.36 | 94.47 | | | | |
| 7 | -0.04 | -0.49 | 16.71 | 19 | 0.07 | 0.70 | 68.23 | 31 | -0.08 | -0.72 | 95.80 | | | | |
| 8 | -0.03 | -0.31 | 16.83 | 20 | -0.01 | -0.05 | 68.24 | 32 | -0.03 | -0.28 | 96.01 | | | | |
| 9 | 0.22 | 2.56 | 25.26 | 21 | -0.20 | -1.94 | 75.94 | 33 | 0.19 | 1.66 | 103.20 | | | | |
| 10 | 0.10 | 1.16 | 27.13 | 22 | -0.02 | -0.23 | 76.05 | 34 | 0.17 | 1.49 | 109.19 | | | | |
| 11 | 0.08 | 0.93 | 28.37 | 23 | 0.10 | 0.95 | 78.02 | 35 | -0.10 | -0.86 | 111.24 | | | | |
| 12 | -0.42 | -4.63 | 59.40 | 24 | 0.14 | 1.30 | 81.78 | 36 | -0.22 | -1.92 | 121.77 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for w(t)




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.01 | -0.19 | 13 | -0.05 | -0.69 | 25 | -0.12 | -1.49 | 37 | 0.02 | 0.24 |
| 2 | -0.19 | -2.48 | 14 | 0.01 | 0.15 | 26 | -0.08 | -0.97 | 38 | -0.08 | -1.06 |
| 3 | -0.26 | -3.28 | 15 | -0.04 | -0.50 | 27 | -0.03 | -0.32 | 39 | 0.03 | 0.44 |
| 4 | -0.07 | -0.85 | 16 | -0.03 | -0.33 | 28 | -0.03 | -0.36 | 40 | 0.05 | 0.63 |
| 5 | -0.11 | -1.43 | 17 | -0.02 | -0.23 | 29 | 0.07 | 0.87 | 41 | -0.03 | -0.36 |
| 6 | -0.14 | -1.84 | 18 | 0.06 | 0.78 | 30 | -0.11 | -1.39 | | | |
| 7 | -0.11 | -1.46 | 19 | 0.05 | 0.62 | 31 | -0.02 | -0.29 | | | |
| 8 | -0.13 | -1.66 | 20 | -0.03 | -0.42 | 32 | -0.10 | -1.29 | | | |
| 9 | 0.14 | 1.76 | 21 | -0.05 | -0.68 | 33 | -0.01 | -0.09 | | | |
| 10 | 0.07 | 0.95 | 22 | 0.05 | 0.63 | 34 | 0.18 | 2.31 | | | |
| 11 | 0.17 | 2.19 | 23 | 0.19 | 2.50 | 35 | 0.07 | 0.95 | | | |
| 12 | -0.32 | -4.08 | 24 | 0.01 | 0.09 | 36 | -0.09 | -1.18 | | | |

من الأنماط المشاهدة لدوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي قد يكون النموذج المناسب هو أي $SARIMA(1,1,1)(0,1,1)_{12}$

$$\left(1-\phi B\right)\left(1-B^{12}\right)\left(1-B\right)z_t=\left(1-\theta B\right)\left(1-\Theta B^{12}\right)a_t$$

نطبق هذا النموذج على المتسلسلة كالتالي:

```
MTB > ARIMA 1 1 1 0 1 1 12 'z(t)' 'RESI2';
SUBC>   NoConstant;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for z(t)

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0         307.653    0.100    0.100    0.100
    1         281.217    0.100    0.100    0.250
    2         262.275    0.226    0.231    0.400
    3         262.027    0.376    0.381    0.401
    4         261.770    0.526    0.531    0.401
    5         261.426    0.675    0.681    0.402
    6         260.905    0.824    0.831    0.403
    7         260.036    0.970    0.981    0.405
    8         227.926    0.835    0.980    0.536
    9         221.838    0.748    0.980    0.576
   10         221.665    0.738    0.980    0.586
   11         221.637    0.738    0.980    0.589
   12         221.610    0.737    0.980    0.589
   13         221.585    0.737    0.980    0.590
Relative change in each estimate less than  0.0010

Final Estimates of Parameters
Type          Coef        StDev         T
AR   1      0.7374      0.0620     11.89
MA   1      0.9796      0.0017    582.86
SMA 12      0.5898      0.0736      8.01
```

```
Differencing: 1 regular, 1 seasonal of order 12
Number of observations:   Original series 178, after
differencing 165
Residuals:    SS = 214.393  (backforecasts excluded)
              MS =   1.323  DF = 162

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag                     12              24              36
48
Chi-Square     15.7(DF=  9)     30.9(DF=21)     61.6(DF=33)
67.1(DF=45)
```

أي أن النموذج المقترح لهذه المتسلسلة هو

$$(1-0.74B)\left(1-B^{12}\right)(1-B)z_t=(1-0.98B)\left(1-0.59B^{12}\right)a_t,\quad a_t\sim N(0,1.323)$$

لاحظ ان

$$\phi=0.74,\quad s.e.(\phi)=0.062,\quad t=11.89$$
$$\theta=0.96,\quad s.e.(\theta)=0.0017,\quad t=582.86$$
$$\Theta=0.59,\quad s.e.(\Theta)=0.074,\quad t=8.01$$

أي ان المعالم عالية المعنوية.

**<u>فحص البواقي:</u>**

**<u>إختبار المتوسط</u>**

```
MTB > ZTest 0.0 1.15 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**Z-Test**

```
Test of mu = 0.0000 vs mu not = 0.0000
The assumed sigma = 1.15
```

| Variable | N | Mean | StDev | SE Mean | Z | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| RESI1 | 165 | -0.0144 | 1.1433 | 0.0895 | -0.16 | 0.87 |

لاحظ ان الـ P-value=0.87 وهي اكبر من 0.05 اي لانرفض أن متوسط البواقي صفرا

**<u>إختبار عشوائية البواقي</u>**

```
MTB > Runs 0 'RESI1'.
```

**Runs Test**

```
    RESI1

    K =      0.0000

    The observed number of runs =  67
    The expected number of runs =  82.4061
    73 Observations above K   92 below
              The test is significant at  0.0149
```

الإختبار غيرمعنوي عند 0.05 اي اننا نرفض فرضية عشوائية البواقي وهذا يحتاج إلى إجراء إختبار آخر أكثر قوة من إختبار الجري مثل إختبار الإشارة Sign Test على الوسيط التالي:

```
MTB > STest 0.0 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**Sign Test for Median**

```
Sign test of median = 0.00000 versus  not =  0.00000

               N    N*  Below  Equal  Above         P     Median
RESI1        165    13     92      0     73    0.1611   -0.08139
```

والإختبار معنوي عند 0.1611 وللتأكد نجري إختبار ولكوكسون لإشارات الرتب على الوسيط التالي

```
MTB > WTest 0.0 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

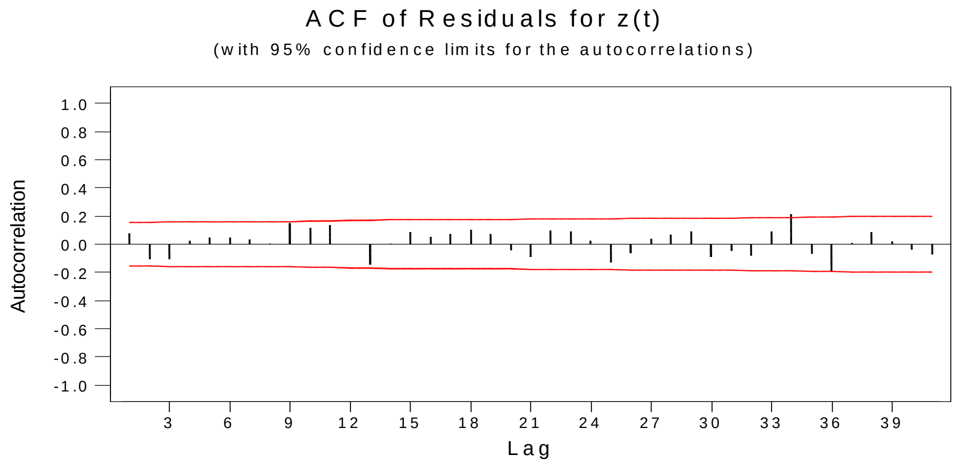
**Wilcoxon Signed Rank Test**

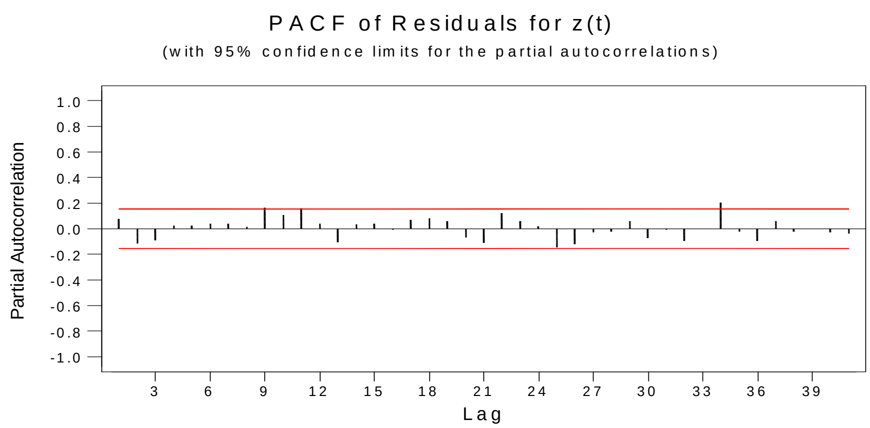
```
Test of median = 0.000000 versus median not = 0.000000

                  Number  N for   Wilcoxon           Estimated
             N   Missing   Test  Statistic       P      Median
RESI1      165        13    165     6321.0   0.392    -0.05940
```

والإختبار ايضا معنوي عند 0.392

**<u>إختبار إستقلال البواقي:</u>**

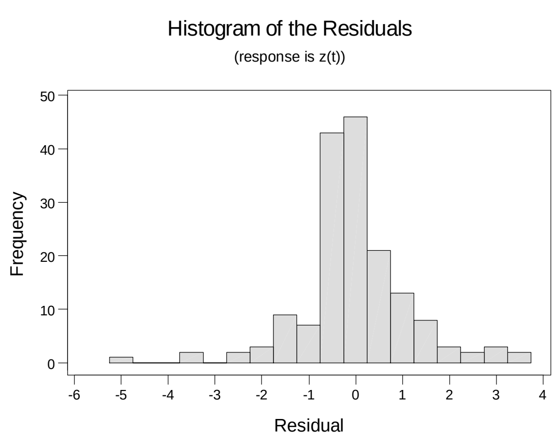
دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

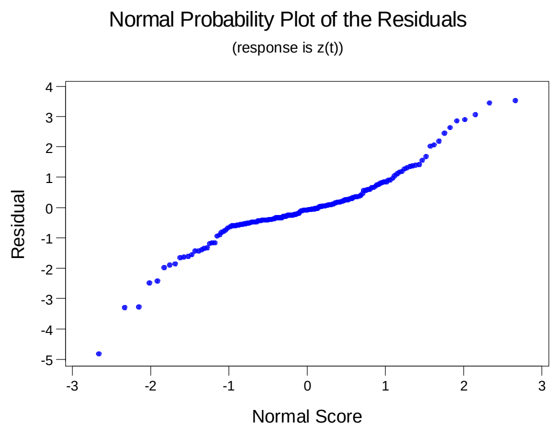


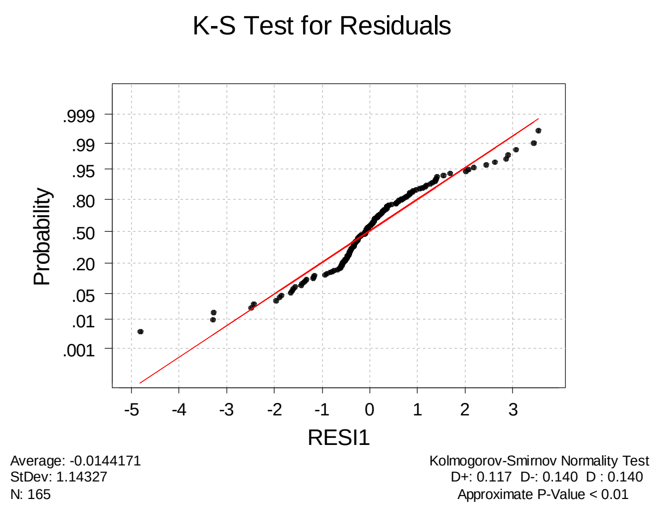




نلاحظ انها تعطي انماط الضجة البيضاء أي انها غير مترابطة وإذا كانت طبيعية فهي مستقلة.

**إختبار طبيعية البواقي:**






لاحظ ان الـ P-value لإختبار K-S أقل من 0.01 اذا الإختبار معنوي عند $\alpha = 0.05$ اي لانرفض فرضية طبيعية البواقي.

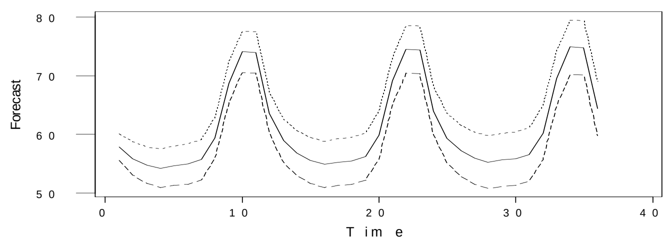
**التنبؤ بإستخدام النموذج:**

سنقوم بالتنبؤ عن 36 قيمة مستقبلية مع 95% فترات تنبؤ

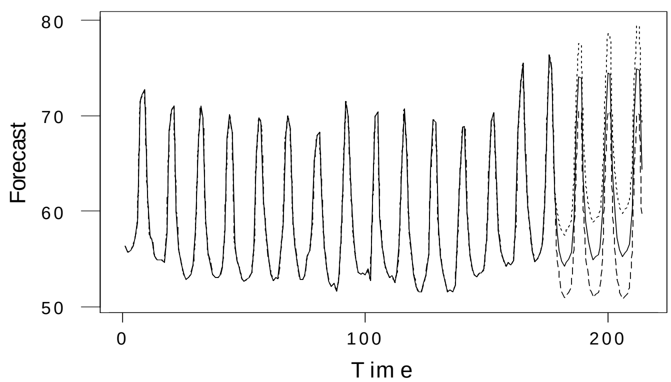
```
Forecasts from period 178
                              95 Percent Limits
Period      Forecast         Lower        Upper        Actual
 179          57.7885        55.5332      60.0437
 180          55.8516        53.0220      58.6812
 181          54.7429        51.6264      57.8594
 182          54.1820        50.9063      57.4578
```

| | | | |
|---|---|---|---|
| 183 | 54.6298 | 51.2601 | 57.9994 |
| 184 | 54.9152 | 51.4875 | 58.3430 |
| 185 | 55.6640 | 52.1986 | 59.1294 |
| 186 | 59.3778 | 55.8869 | 62.8688 |
| 187 | 68.6924 | 65.1833 | 72.2015 |
| 188 | 74.0698 | 70.5472 | 77.5925 |
| 189 | 73.9650 | 70.4317 | 77.4983 |
| 190 | 63.5866 | 60.0447 | 67.1286 |
| 191 | 58.9095 | 55.1843 | 62.6347 |
| 192 | 56.7768 | 52.9407 | 60.6128 |
| 193 | 55.5237 | 51.6169 | 59.4305 |
| 194 | 54.8564 | 50.9022 | 58.8105 |
| 195 | 55.2256 | 51.2380 | 59.2131 |
| 196 | 55.4531 | 51.4409 | 59.4653 |
| 197 | 56.1592 | 52.1278 | 60.1905 |
| 198 | 59.8416 | 55.7947 | 63.8885 |
| 199 | 69.1329 | 65.0729 | 73.1929 |
| 200 | 74.4932 | 70.4217 | 78.5647 |
| 201 | 74.3758 | 70.2940 | 78.4575 |
| 202 | 63.9881 | 59.8968 | 68.0793 |
| 203 | 59.3041 | 55.0418 | 63.5664 |
| 204 | 57.1663 | 52.7962 | 61.5364 |
| 205 | 55.9095 | 51.4676 | 60.3514 |
| 206 | 55.2394 | 50.7472 | 59.7315 |
| 207 | 55.6066 | 51.0774 | 60.1357 |
| 208 | 55.8326 | 51.2749 | 60.3903 |
| 209 | 56.5376 | 51.9568 | 61.1184 |
| 210 | 60.2191 | 55.6189 | 64.8194 |
| 211 | 69.5099 | 64.8927 | 74.1270 |
| 212 | 74.8697 | 70.2374 | 79.5021 |
| 213 | 74.7520 | 70.1057 | 79.3983 |
| 214 | 64.3640 | 59.7046 | 69.0235 |

ونرسمها بالرسم التالي:




الرسم التالي للمتسلسلة بكاملها مع التنبؤات وفترات التنبؤ



# الفصل السابع

**<u>ورقة تدريب عملي على التنبؤ بواسطة نماذج المتوسط المتحرك-الإنحدار الذاتي</u>**

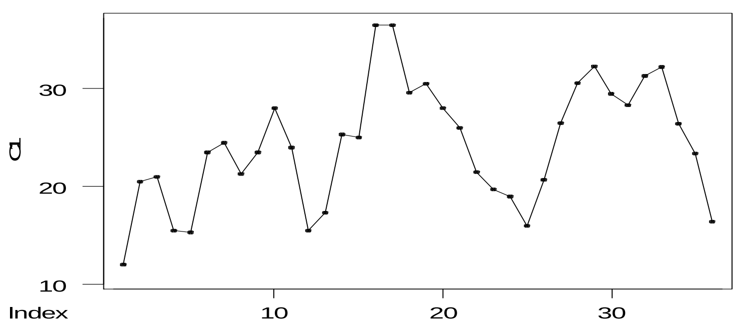
**<u>Forecasting By ARMA Models</u>**

المشاهدات التالية لظاهرة عشوائية مسجلة علي شكل متسلسلة زمنية

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12.0 | 20.5 | 21.0 | 15.5 | 15.3 | 23.5 | 24.5 | 21.3 |
| 23.5 | 28.0 | 24.0 | 15.5 | 17.3 | 25.3 | 25.0 | 36.5 |
| 36.5 | 29.6 | 30.5 | 28.0 | 26.0 | 21.5 | 19.7 | 19.0 |
| 16.0 | 20.7 | 26.5 | 30.6 | 32.3 | 29.5 | 28.3 | 31.3 |
| 32.2 | 26.4 | 23.4 | 16.4 | | | | |

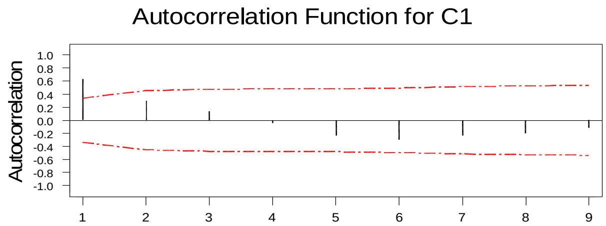
ولها الشكل التالي:

```
MTB > TSPlot C1;
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```



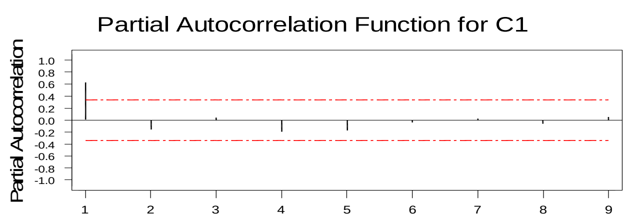

اولا نوجد دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

```
MTB > %ACF C1.
```




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.63 | 3.79 | 15.62 | 8 | -0.20 | -0.78 | 31.42 |
| 2 | 0.30 | 1.35 | 19.27 | 9 | -0.12 | -0.44 | 32.10 |
| 3 | 0.14 | 0.59 | 20.07 | | | | |
| 4 | -0.05 | -0.20 | 20.17 | | | | |
| 5 | -0.24 | -1.01 | 22.71 | | | | |
| 6 | -0.30 | -1.22 | 26.71 | | | | |
| 7 | -0.24 | -0.94 | 29.40 | | | | |

```
MTB > %PACF C1.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\PACF.MAC
```




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.63 | 3.79 | 8 | -0.07 | -0.39 |
| 2 | -0.16 | -0.98 | 9 | 0.05 | 0.29 |
| 3 | 0.04 | 0.22 | | | |
| 4 | -0.20 | -1.20 | | | |
| 5 | -0.18 | -1.09 | | | |
| 6 | -0.04 | -0.23 | | | |
| 7 | 0.02 | 0.12 | | | |

نلاحظ من انماط ا

نطبق النموذج المقترح

```
MTB > Name c17 = 'RESI1'
MTB > ARIMA 1 0 1 C1 'RESI1';
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 5 c14 c15 c16;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for C1

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0         1337.71    0.100    0.100   21.918
    1          936.95    0.250   -0.049   18.193
    2          849.78    0.211   -0.199   19.106
    3          751.53    0.215   -0.349   18.941
    4          658.66    0.266   -0.499   17.594
    5          592.30    0.372   -0.649   14.890
    6          580.80    0.433   -0.699   13.314
    7          579.30    0.455   -0.714   12.698
    8          579.11    0.464   -0.719   12.470
    9          579.08    0.467   -0.721   12.386
   10          579.08    0.468   -0.722   12.356
   11          579.08    0.468   -0.722   12.345
Relative change in each estimate less than  0.0010
Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
AR   1      0.4684      0.1755      2.67
MA   1     -0.7221      0.1380     -5.23
Constant    12.345       1.154     10.70
Mean        23.221       2.170

Number of observations:  36
Residuals:    SS = 523.365  (backforecasts excluded)
              MS =  15.860  DF = 33

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag         12           24           36           48
Chi-Square  7.2(DF=10)   15.9(DF=22)  * (DF= *)    * (DF=
*)


Forecasts from period 36
                             95 Percent Limits
Period         Forecast            Lower             Upper
Actual
  37         14.7649       6.9578      22.5720
```

| | | | |
|---|---|---|---|
| 38 | 19.2606 | 7.1228 | 31.3985 |
| 39 | 21.3663 | 8.4715 | 34.2610 |
| 40 | 22.3524 | 9.2975 | 35.4074 |
| 41 | 22.8143 | 9.7245 | 35.9041 |

النموذج المقترح هو:

$$z_t = 12.345 + 0.4684 z_{t-1} + a_t - 0.7221 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN\left(0, 15.86\right) \forall t$$

حيث

$$\hat{\phi}_1 = 0.4684 \quad se\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.1755 \quad t = 2.67$$

$$\hat{\theta}_1 = -0.7221 \quad se\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.1380 \quad t = -5.23$$

$$\hat{\delta} = 12.345 \quad se\left(\hat{\delta}\right) = 1.154 \quad t = 10.70$$

$$\hat{\sigma}^2 = 15.86 \quad df = 33$$

ونلاحظ ان جميع المقدرات معنوية عند $\alpha = 0.05$ فمثلا الفرضية

$$H_0 : \phi_1 = 0$$
$$H_1 : \phi_1 \neq 0$$

نختبرها بالإحصائة $t = \dfrac{\hat{\phi}_1}{se\left(\hat{\phi}_1\right)} = \dfrac{0.4684}{0.1755} = 2.6689$ وهي معنوية عند $\alpha = 0.05$ أي

اننا نرفض ان $\phi_1 = 0$ وبالمثل لجميع القدرات الاخرى

**<u>ثانيا فحص البواقي</u>**

<u>إختبار متوسط البواقي:</u>

الإختبار هو

$$H_0 : \mu_a = 0, \quad H_1 : \mu_a \neq 0$$

```
MTB > TTest 0.0 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**T-Test of the Mean**

```
Test of mu = 0.000 vs mu not = 0.000

Variable    N    Mean   StDev   SE Mean     T       P
```

```
RESI1       36    0.344  3.851   0.642       0.54   0.60
```

لاحظ ان $t = 0.54$ والـ P-Value لها هي 0.6 وهي اكبر من $\alpha = 0.05$ أي ان الإختبار غير معنوي أي يمكن إعتبار متوسط البواقي يساوي الصفر

**<u>إختبارعشوائية البواقي:</u>**

ونستخدم لذلك إختبار الجري Runs Test

```
MTB > Runs 'RESI1'.
```

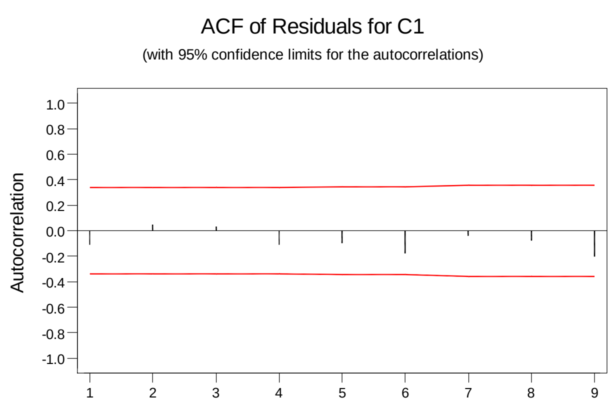
**Runs Test**

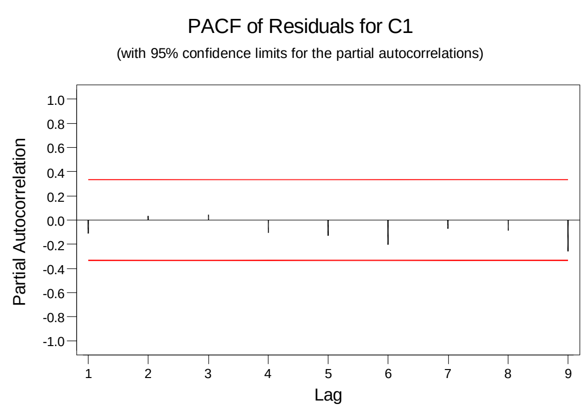
```
    RESI1
    K =     0.3443
    The observed number of runs =  21
    The expected number of runs =  19.0000
    18 Observations above K   18 below
              The test is significant at  0.4989
              Cannot reject at alpha = 0.05
```

لايمكننا رفض عشوائية البواقي عند $\alpha = 0.05$

**<u>إختبار ترابط البواقي:</u>**

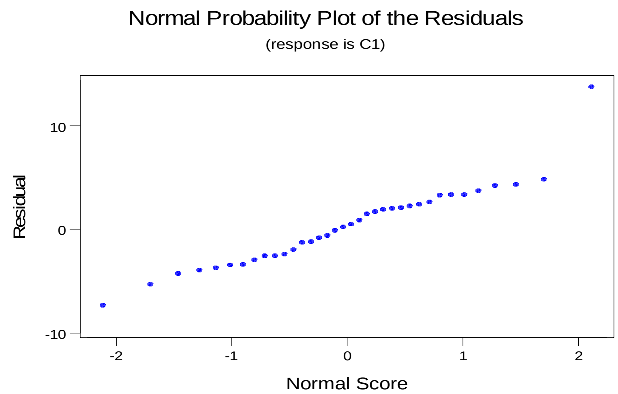
ونستخدم لذلك إختبار الترابط الذاتي



نلاحظ انه لايوجد أي ترابط من أي درجة بين القيم المختلفة للبواقي أي انها تظهر انماط تتمشي مع كونها متسلسلة ضجة بيضاء

واخيرا نختبر طبيعية البواقي بالـ Normal Probability Plot

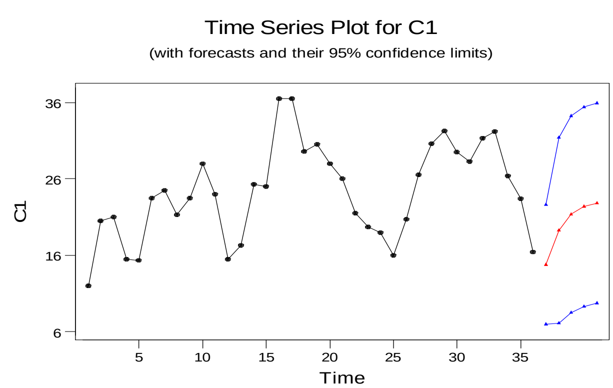



وهو مقبول ( نوعا )

إذا يمكن إعتبار النموذج المقترح مناسبا

الرسم التالي للتنبوئات لخمسة قيم مستقبلية وفترات 95% تنبؤ لها

```
MTB > TSPlot C14 C15 C16;
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect;
SUBC> overlay.
```

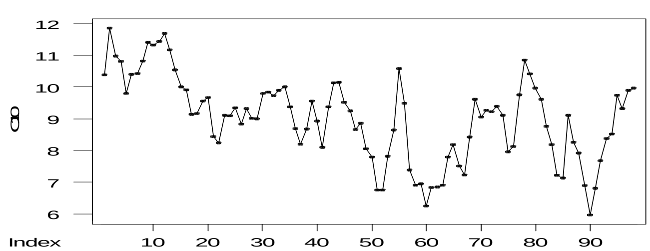


**مثال آخر:**

المشاهدات التالية لظاهرة عشوائية مسجلة علي شكل متسلسلة زمنية

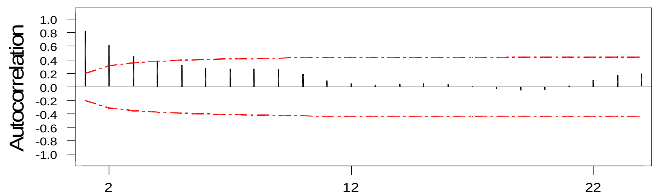
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.38 | 11.86 | 10.97 | 10.80 | 9.79 | 10.39 | 10.42 | 10.82 |
| 11.40 | 11.32 | 11.44 | 11.68 | 11.17 | 10.53 | 10.01 | 9.91 |
| 9.14 | 9.16 | 9.55 | 9.67 | 8.44 | 8.24 | 9.10 | 9.09 |
| 9.35 | 8.82 | 9.32 | 9.01 | 9.00 | 9.80 | 9.83 | 9.72 |
| 9.89 | 10.01 | 9.37 | 8.69 | 8.19 | 8.67 | 9.55 | 8.92 |
| 8.09 | 9.37 | 10.13 | 10.14 | 9.51 | 9.24 | 8.66 | 8.86 |
| 8.05 | 7.79 | 6.75 | 6.75 | 7.82 | 8.64 | 10.58 | 9.48 |
| 7.38 | 6.90 | 6.94 | 6.24 | 6.84 | 6.85 | 6.90 | 7.79 |
| 8.18 | 7.51 | 7.23 | 8.42 | 9.61 | 9.05 | 9.26 | 9.22 |
| 9.38 | 9.10 | 7.95 | 8.12 | 9.75 | 10.85 | 10.41 | 9.96 |
| 9.61 | 8.76 | 8.18 | 7.21 | 7.13 | 9.10 | 8.25 | 7.91 |
| 6.89 | 5.96 | 6.80 | 7.68 | 8.38 | 8.52 | 9.74 | 9.31 |
| 9.89 | 9.96 | | | | | | |

```
MTB > TSPlot C10;
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```



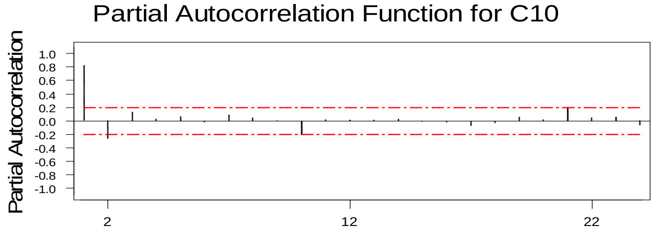

نفحص دوال الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

Autocorrelation Function for C10




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.83 | 8.24 | 69.92 | 8 | 0.26 | 1.26 | 178.83 | 15 | 0.05 | 0.21 | 191.63 | 22 | 0.10 | 0.47 | 194.02 |
| 2 | 0.61 | 3.91 | 107.90 | 9 | 0.26 | 1.21 | 186.14 | 16 | 0.04 | 0.16 | 191.78 | 23 | 0.18 | 0.81 | 198.12 |
| 3 | 0.46 | 2.56 | 129.56 | 10 | 0.18 | 0.84 | 189.86 | 17 | 0.00 | 0.02 | 191.78 | 24 | 0.20 | 0.89 | 203.24 |
| 4 | 0.37 | 1.95 | 143.87 | 11 | 0.09 | 0.43 | 190.87 | 18 | -0.03 | -0.15 | 191.91 | | | | |
| 5 | 0.33 | 1.65 | 155.04 | 12 | 0.04 | 0.20 | 191.09 | 19 | -0.05 | -0.24 | 192.26 | | | | |
| 6 | 0.28 | 1.40 | 163.68 | 13 | 0.03 | 0.13 | 191.19 | 20 | -0.05 | -0.24 | 192.60 | | | | |
| 7 | 0.26 | 1.28 | 171.23 | 14 | 0.04 | 0.19 | 191.39 | 21 | 0.01 | 0.07 | 192.63 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for C10




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.83 | 8.24 | 8 | 0.05 | 0.45 | 15 | -0.01 | -0.15 | 22 | 0.05 | 0.51 |
| 2 | -0.27 | -2.64 | 9 | 0.00 | 0.03 | 16 | -0.03 | -0.25 | 23 | 0.06 | 0.59 |
| 3 | 0.13 | 1.29 | 10 | -0.20 | -1.98 | 17 | -0.07 | -0.73 | 24 | -0.07 | -0.65 |
| 4 | 0.03 | 0.34 | 11 | 0.02 | 0.19 | 18 | -0.03 | -0.26 | | | |
| 5 | 0.06 | 0.61 | 12 | 0.01 | 0.09 | 19 | 0.06 | 0.60 | | | |
| 6 | -0.02 | -0.21 | 13 | 0.01 | 0.12 | 20 | 0.02 | 0.20 | | | |
| 7 | 0.09 | 0.91 | 14 | 0.03 | 0.34 | 21 | 0.21 | 2.03 | | | |

نلاحظ ان الأنماط تقترح نموذج إنحدار ذاتي من الدرجة الثانية $AR(2)$

نطبق النموذج المقترح

```
MTB > Name c17 = 'RESI1'
MTB > ARIMA 2 0 0 C10 'RESI1';
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 5 c14 c15 c16;
SUBC>  GSeries;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GNormalplot.
```

**ARIMA Model**

```
ARIMA model for C10

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0         126.398    0.100    0.100    7.283
    1         103.515    0.250    0.043    6.434
    2          84.535    0.400   -0.014    5.586
    3          69.407    0.550   -0.071    4.738
    4          58.132    0.700   -0.128    3.887
    5          50.724    0.850   -0.184    3.030
    6          47.212    1.000   -0.239    2.163
    7          46.918    1.053   -0.256    1.838
    8          46.916    1.054   -0.255    1.816
    9          46.916    1.054   -0.255    1.814
   10          46.916    1.054   -0.255    1.814
Relative change in each estimate less than  0.0010

Final Estimates of Parameters
Type           Coef       StDev         T
AR   1       1.0542      0.0992     10.63
AR   2      -0.2547      0.0993     -2.56
Constant   1.81360     0.07092     25.57
Mean         9.0480      0.3538

Number of observations:  98
Residuals:    SS = 46.7518  (backforecasts excluded)
              MS =  0.4921  DF = 95

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag        12          24          36           48
Chi-Square     7.2(DF=10)     13.7(DF=22)     21.3(DF=34)
28.8(DF=46)

Forecasts from period 98
                             95 Percent Limits
Period         Forecast            Lower            Upper
Actual
```

```
 99        9.7950      8.4198      11.1703
100        9.6033      7.6050      11.6016
101        9.4432      7.1234      11.7629
102        9.3232      6.8446      11.8018
103        9.2375      6.6825      11.7925
```

النموذج المقترح هو

$$z_t = 1.8136 + 1.0542 z_{t-1} - 0.2547 z_{t-2} + a_t, \quad a_t \sim WN(0, 0.4921) \quad \forall t$$

مقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيم $t$ لها هي

$$\hat{\phi}_1 = 1.0542 \quad se(\hat{\phi}_1) = 0.0992 \quad t = 10.63$$

$$\hat{\phi}_2 = -0.2547 \quad se(\hat{\phi}_2) = 0.0993 \quad t = -2.56$$

$$\hat{\delta} = 1.8136 \quad se(\hat{\delta}) = 0.07092 \quad t = 25.57$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.4921 \quad df = 95$$

نلاحظ ان جميع المقدرات معنوية عند $\alpha = 0.05$

لكي نقبل بهذا النموذج علي انه مناسب للتنبؤ نجري إختبارات علي البواقي

```
MTB > TTest 0.0 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**T-Test of the Mean**

```
Test of mu = 0.0000 vs mu not = 0.0000

Variable     N     Mean   StDev   SE Mean      T      P
RESI1       98   -0.0082 0.6942   0.0701     -0.12   0.91
```

واضح جدا ان الأختبار غير معنوي ( ملاحظة الـ P-Value هي إحتمال ان الفرضية الصفرية صحيحة )

نختبر عشوائية البواقي

MTB > Runs 'RESI1'.

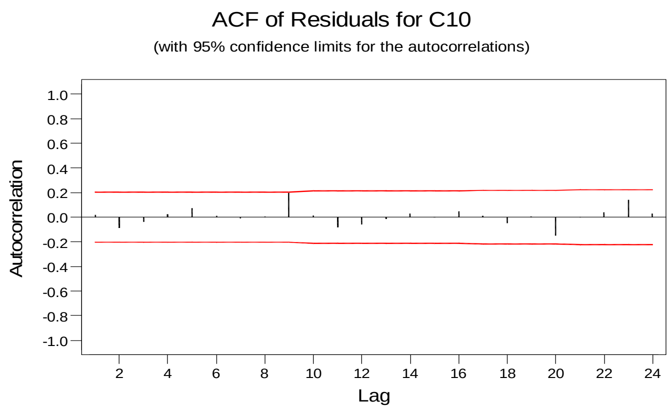
## Runs Test

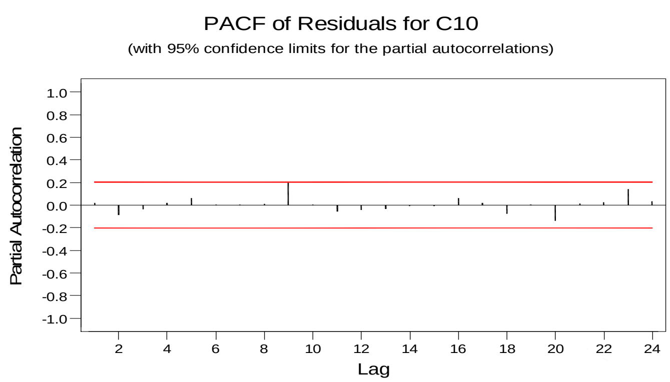
```
    RESI1
    K =    -0.0082
   The observed number of runs =  47
    The expected number of runs =  49.9184
```

```
47 Observations above K   51 below
          The test is significant at  0.5529
          Cannot reject at alpha = 0.05
```

أي لايمكننا رفض فرضية عشوائية البواقي

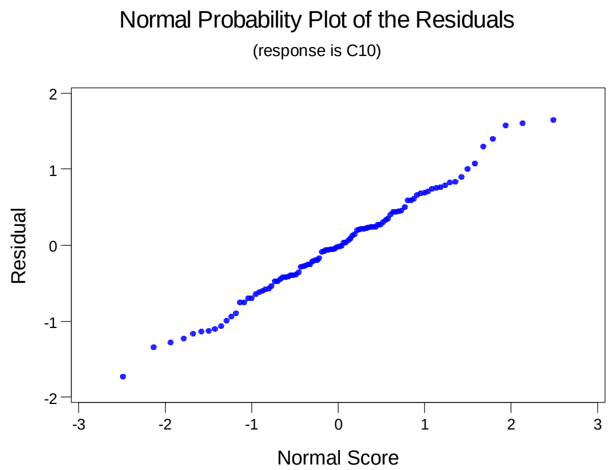
نفحص الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي




واضح جدا انماط الض

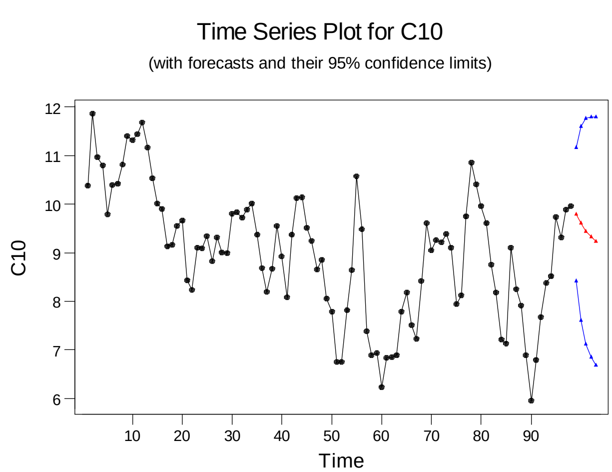
يبقي فحص طبيعية البواقي




ونستطيع ار [illegible] ( $a_t$

الرسم التالي للتنبؤات لخمسة قيم مستقبلية وفترات 95% تنبؤ لها

```
MTB > TSPlot C14 C15 C16;
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect;
SUBC> overlay.
```




تمرين: طبق علي المشاهدات السابقة نموذج $AR(1)$ وقارن بين النتائج

# الفصل الثامن

## مثال على تحليل البواقي ومعايير إختيار النموذج المناسب

## Example on Residual Analysis and Model Selection Criteria :

لقد عرفنا سابقا البواقي علي انها القيم المشاهدة ناقص القيم المطبقة فمن مشاهدات معطاة $z_1, z_2, ..., z_n$ ونموذج مطبق ينتج لدينا قيم مطبقة $\hat{z}_1, \hat{z}_2, ..., \hat{z}_n$ وتكتب البواقي:

$$e_i = z_i - \hat{z}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

والبواقي هي مقدرات الأخطاء في النموذج أي $\hat{a}_i = e_i, i = 1, 2, ..., n$ ولهذا يجب ان تحقق الشروط المفروضة علي الأخطاء في هذا النموذج والتي منها:

1- متوسط الأخطاء يساوي الصفر

2- الأخطاء عشوائية و غير مترابطة أو مستقلة ( وفي كثير من النماذج نفترض ان الأخطاء لها توزيع طبيعي مستقل ومتطابق بمتوسط صفري وتباين $\sigma^2$ أي $a_t \sim IIDN\left(0, \sigma^2\right)$ )

لهذا فإننا نجري تحليلا وهو مجموعة من الإختبارات علي البواقي لنري فيما إذا كانت تحقق هذه الشروط وفي هذه الحالة نعتبر النموذج المطبق مقبولا أما إذا فشل احد هذه الإختبارات فيجب علينا إعادة النظر وإقتراح نموذج آخر

أولا: إختبار المتوسط

$$H_0 : E\left(a_t\right) = 0$$
$$H_1 : E\left(a_t\right) \neq 0$$

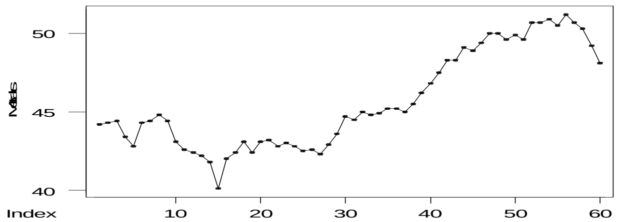
وهو إختبار بذيلين ونستخدم فية الإحصائة $u = \dfrac{\bar{e}}{se\left(\bar{e}\right)}$ والتي لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $E\left(a_t\right) = 0$ إذا كانت $|u| < 1.96$ ( هذا علي إعتبار ان حجم العينة اكبر من 30 وحدة وهذا دائما متحقق للمتسلسلات الزمنية التي ندرسها )

**مثال:**

سوف نعود الي مثال تطبيق متوسط متحرك من الدرجة الثالثة علي المتغير Metals

```
MTB > RETR 'E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW'.
Retrieving worksheet from file: E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW
Worksheet was saved on  6/ 5/1996
MTB > TSPlot 'Metals';
SUBC>   Index;
```

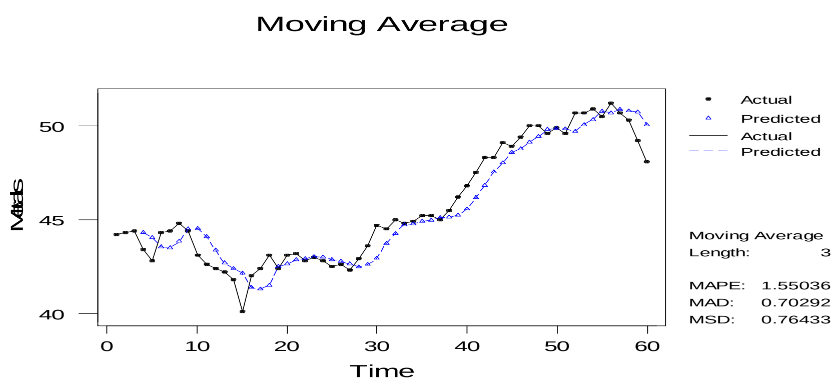
```
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```




```
MTB > Name c4 = 'AVER1' c5 = 'FITS1' c6 = 'RESI1'
MTB > %MA 'Metals' 3;
SUBC>   Averages 'AVER1';
SUBC>   Fits 'FITS1';
SUBC>   Residuals 'RESI1'.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC
```

**Moving average**

```
Data        Metals
Length      60.0000
NMissing    0

Moving Average
Length: 3

Accuracy Measures
MAPE: 1.55036
MAD:  0.70292
MSD:  0.76433
```




لاحظ اننا خزنا البواقي في العمود السادس والقيم المطبقة في العمود الخامس

```
MTB > print c3 c6 c5
```

**Data Display**

| Row | Metals | RESI1 | FITS1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 44.2 | * | * |
| 2 | 44.3 | * | * |
| 3 | 44.4 | * | * |
| 4 | 43.4 | -0.90000 | 44.3000 |
| 5 | 42.8 | -1.23333 | 44.0333 |
| 6 | 44.3 | 0.76667 | 43.5333 |
| 7 | 44.4 | 0.90000 | 43.5000 |
| 8 | 44.8 | 0.96667 | 43.8333 |
| 9 | 44.4 | -0.10000 | 44.5000 |
| 10 | 43.1 | -1.43333 | 44.5333 |
| 11 | 42.6 | -1.50000 | 44.1000 |
| 12 | 42.4 | -0.96667 | 43.3667 |
| 13 | 42.2 | -0.50000 | 42.7000 |
| 14 | 41.8 | -0.60000 | 42.4000 |
| 15 | 40.1 | -2.03333 | 42.1333 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 42.0 | 0.63333 | 41.3667 |
| 17 | 42.4 | 1.10000 | 41.3000 |
| 18 | 43.1 | 1.60000 | 41.5000 |
| 19 | 42.4 | -0.10000 | 42.5000 |
| 20 | 43.1 | 0.46667 | 42.6333 |
| 21 | 43.2 | 0.33333 | 42.8667 |
| 22 | 42.8 | -0.10000 | 42.9000 |
| 23 | 43.0 | -0.03333 | 43.0333 |
| 24 | 42.8 | -0.20000 | 43.0000 |
| 25 | 42.5 | -0.36667 | 42.8667 |
| 26 | 42.6 | -0.16667 | 42.7667 |
| 27 | 42.3 | -0.33333 | 42.6333 |
| 28 | 42.9 | 0.43333 | 42.4667 |
| 29 | 43.6 | 1.00000 | 42.6000 |
| 30 | 44.7 | 1.76667 | 42.9333 |
| 31 | 44.5 | 0.76667 | 43.7333 |
| 32 | 45.0 | 0.73333 | 44.2667 |
| 33 | 44.8 | 0.06667 | 44.7333 |
| 34 | 44.9 | 0.13333 | 44.7667 |
| 35 | 45.2 | 0.30000 | 44.9000 |
| 36 | 45.2 | 0.23333 | 44.9667 |
| 37 | 45.0 | -0.10000 | 45.1000 |
| 38 | 45.5 | 0.36667 | 45.1333 |
| 39 | 46.2 | 0.96667 | 45.2333 |
| 40 | 46.8 | 1.23333 | 45.5667 |
| 41 | 47.5 | 1.33333 | 46.1667 |
| 42 | 48.3 | 1.46667 | 46.8333 |
| 43 | 48.3 | 0.76667 | 47.5333 |
| 44 | 49.1 | 1.06667 | 48.0333 |
| 45 | 48.9 | 0.33333 | 48.5667 |
| 46 | 49.4 | 0.63333 | 48.7667 |
| 47 | 50.0 | 0.86667 | 49.1333 |
| 48 | 50.0 | 0.56667 | 49.4333 |
| 49 | 49.6 | -0.20000 | 49.8000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 50 | 49.9 | 0.03333 | 49.8667 |
| 51 | 49.6 | -0.23333 | 49.8333 |
| 52 | 50.7 | 1.00000 | 49.7000 |
| 53 | 50.7 | 0.63333 | 50.0667 |
| 54 | 50.9 | 0.56667 | 50.3333 |
| 55 | 50.5 | -0.26667 | 50.7667 |
| 56 | 51.2 | 0.50000 | 50.7000 |
| 57 | 50.7 | -0.16667 | 50.8667 |
| 58 | 50.3 | -0.50000 | 50.8000 |
| 59 | 49.2 | -1.53333 | 50.7333 |
| 60 | 48.1 | -1.96667 | 50.0667 |

الآن نختبر متوسط البواقي

```
MTB > TTest 0.0 'RESI1';
SUBC>   Alternative 0.
```

**T-Test of the Mean**

```
Test of mu = 0.000 vs mu not = 0.000
```

| Variable | N | Mean | StDev | SE Mean | T | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| RESI1 | 57 | 0.158 | 0.868 | 0.115 | 1.37 | 0.17 |

ملاحظة: في Minitab يستخدم برنامج عام عندما يكون الإنحراف المعياري ( او التباين ) غير معروف ويطلق عليه Ttest . لاحظ ان قيمة الإحصائة هي T=1.37 وهي اقل من 1.96 أي لانرفض الفرضية الصفرية

ثانيا: نختبر عشوائية البواقي بواسطة إختبار الجري Runs test حول المتوسط وحول الصفر

تابع المثال:

```
MTB > Runs 'RESI1'.
```

**Runs Test**

```
    RESI1

    K =     0.1579


    The observed number of runs =  17
    The expected number of runs =  29.4211
    30 Observations above K   27 below
              The test is significant at  0.0009

MTB > Runs 0 'RESI1'.
```

**Runs Test**

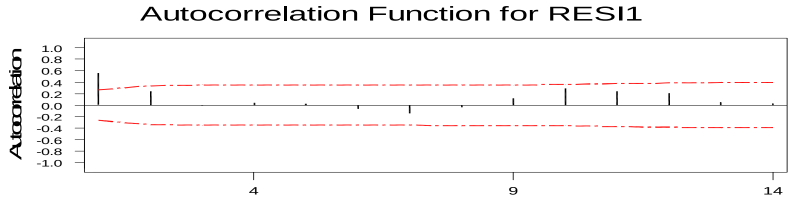
```
    RESI1

    K =     0.0000


    The observed number of runs =  17
    The expected number of runs =  28.7895
    33 Observations above K   24 below
              The test is significant at  0.0013
```

نلاحظ انه في كلتا الحالتين لانرفض عشوائية البواقي

ثالثا: نختبر ترابط أو إستقلال البواقي بواسطة إختبار الترابط الذاتي Autocorrelation test

تابع المثال:

```
MTB > %ACF 'RESI1'.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\ACF.MAC
```




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.56 | 4.24 | 18.93 | 8 | -0.04 | -0.22 | 24.17 |
| 2 | 0.24 | 1.39 | 22.31 | 9 | 0.12 | 0.68 | 25.21 |
| 3 | -0.01 | -0.06 | 22.32 | 10 | 0.29 | 1.64 | 31.36 |
| 4 | 0.04 | 0.21 | 22.40 | 11 | 0.24 | 1.30 | 35.67 |
| 5 | 0.02 | 0.11 | 22.42 | 12 | 0.20 | 1.05 | 38.71 |
| 6 | -0.07 | -0.38 | 22.72 | 13 | 0.05 | 0.25 | 38.90 |
| 7 | -0.14 | -0.81 | 24.07 | 14 | 0.03 | 0.17 | 38.99 |

لاحظ ان الـ T للترابط الذاتي عند التخلف الأول تساوي 4.24 أي اننا نرفض ان $\rho_1 = 0$ أي يوجد ترابط بين البواقي من الدرجة الاولى في الإختبار

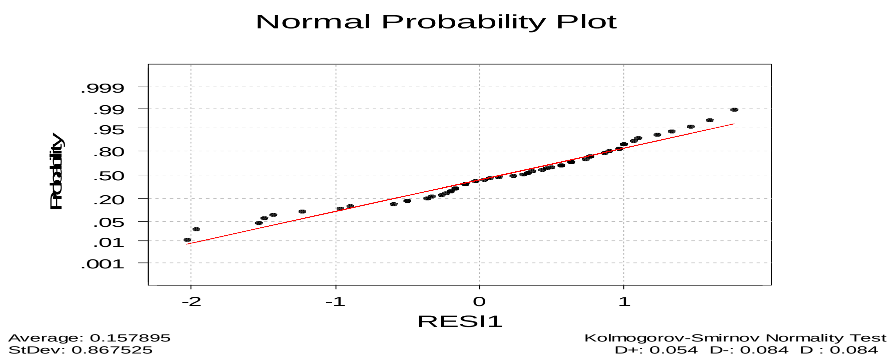
$$H_0 : \rho_1 = 0$$
$$H_1 : \rho_1 \pm 0$$

حيث الإحصائة هي $\frac{r_1}{se(r_1)} = 4.24$

رابعا: نختبر في ما إذا كانت البواقي موزعة طبيعيا

<u>تابع المثال:</u>

```
MTB > %NormPlot 'RESI1';
SUBC>   Kstest.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\NormPlot.MAC
```

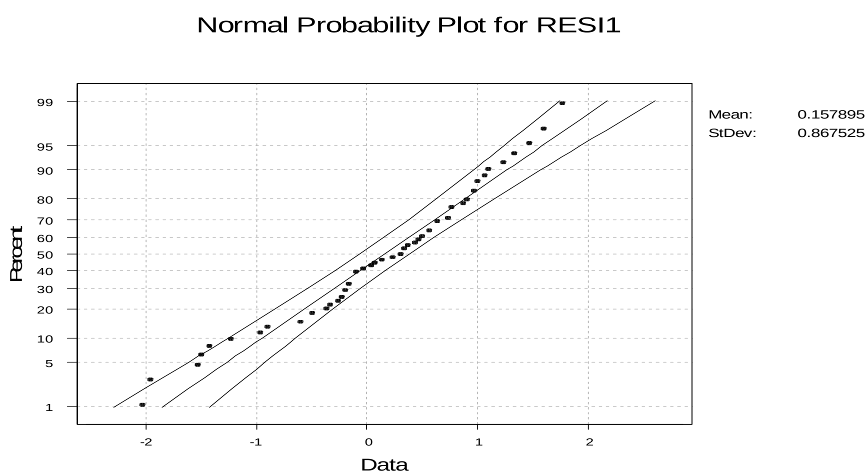


لاحظ الـ P-Value الناتجة تساوي 0.15 وهي اكبر من 0.05 أي لانرفض فرضية التوزيع الطبيعي عند $\alpha = 0.05$ هناك ايضا إختبار آخر للطبيعية هو الـ Q-Q Plot والذي يبين مدي تطابق مشاهدات ما مع توزيع معين

```
MTB > %Qqplot 'RESI1';
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

```
Normal Dist. Parameter Estimates

Data    : RESI1

Mean:      0.157895
StDev:     0.867525
```




لاحظ ان في كلتا الحالتين فإننا لانرفض ان البواقي لها توزيع طبيعي

ملاحظة اخيرة: يبدو ان البواقي تحقق معظم الشروط فيما عدي الترابط الذي يوجد بين القيم المتتالية وهذا يجعلنا نرفض جودة التطبيق لطريقة المتوسط المتحرك من الدرجة الثالثة حيث ادي الي بواقي مترابطة.

# الفصل التاسع

**تحليل او تفكيك المتسلسلة الى مركبات Decomposition Method:**

ينظر إلى المتلسلسة الزمنية على انها مكونة من عدة مركبات أو اجزاء متحدة مع بعضها لتكوين هذه المتسلسلة،

لنفترض ان لدينا المتسلسلة الزمنية المشاهده $z_1, z_2, ..., z_n$ . لقد وجد بالتجربة أنه يمكن نمذجتها على الشكل

$$z_t = T_t + S_t + C_t + E_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

حيث $Z_t$ المتسلسلة الزمنية المشاهدة و $T_t$ مركبة الإنجراف وهي التي تنمذج الإتجاه العام الذي تنحي أو تنجرف اليه المتسلسلة و $S_t$ مركبة موسمية وتنمذج التأثير الموسمي (إذا وجد) وهو التغير الذي يحدث للمتسلسلة نتيجة التأثيرات الموسمية مثل الشهرية والسنوية و $C_t$ مركبة دورية (إذا وجدت) و تنمذج منحى أو إتجاة يتكرر بعد فترات زمنية طويلة غير موسمية و $E_t$ مركبة الخطأ وتشمل جميع العوامل الاخرى التي تؤثر على المتسلسلة والتي لايمكن نمذجتها ضمنيا أو التي لايمكن مشاهدتها او قياسها. النموذج السابق يسمي بالنموذج الإضافي Additive Model وذلك لأن كل المركبات تدخل بشكل إضافي في النموذج. هناك أشكال اخرى مثل

$$z_t = T_t S_t + C_t + E_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$
$$z_t = T_t S_t C_t + E_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

والتي تسمى بالنماذج التضاعفية Multiplicative Models .

في هذا المستوى سوف نهمل المركبة الدورية $C_t$ وذلك لأن المركبة الدورية نادرا ماتكون موجودة في المتسلسلات القصيرة أو الطويلة نسبيا لأنها تحتاج الى مشاهدات طويلة جدا على مدي عدد كبير من العقود.

ونكتفي بالنماذج علي الشكل

$$z_t = T_t + S_t + E_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$
$$z_t = T_t S_t + E_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

أنظر كتاب FORECASTING: METHODS AND APPLICATIONS للمؤلفين MAKRIDAKIS/ WHEELWRIGHT/ McGEE ص 131-141

سوف نستعرض في المثال التالي طرق التحليل الإضافية والتضاعفية بدون المركبة الدورية أي النماذج

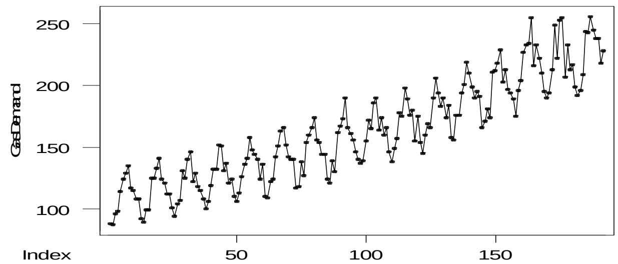
$$z_t = T_t + S_t + E_t, \quad t = 1,2,...,n$$
$$z_t = T_t S_t + E_t \,, \quad t = 1,2,...,n$$

البيانات التالية هي الطلب علي البنزين بملايين اللترات في مدينة اونتاريو بكندة من سنة 1960 وحتى سنة 1975

```
GasDemand
 MONTHLY GASOLINE DEMAND ONTARIO GALLON MILLIONS 1960-1975
 87695  86890  96442  98133 113615 123924 128924 134775 117357 114626
 107677  108087   92188   88591   98683   99207  125485  124677  132543
140735   124008  121194  111634  111565  101007   94228  104255  106922
130621  125251   140318  146174  122318  128770  117518  115492  108497
100482  106140  118581   132371  132042  151938  150997  130931  137018
121271  123548  109894  106061   112539  125745  136251  140892  158390
148314  144148  140138  124075  136485   109895  109044  122499  124264
142296  150693  163331  165837  151731  142491   140229  140463  116963
118049  137869  127392  154166  160227  165869  173522   155828  153771
143963  143898  124046  121260  138870  129782  162312  167211   172897
189689  166496  160754  155582  145936  139625  137361  138963  155301
172026 165004 185861 190270 163903 174270 160272 165614 146182 137728
148932 156751 177998 174559 198079 189073 175702 180097 155202 174508
154277 144998 159644 168646 166273 190176 205541 193657 182617 189614
174176 184416 158167 156261 176353 175720 193939 201269 218960 209861
198688 190474 194502 190755 166286 170699 181468 174241 210802 212262
218099 229001 203200 212557 197095 193693 188992 175347 196265 203526
227443 233038 234119 255133 216478 232868 221616 209893 194784 189756
193522 212870 248565 221532 252642 255007 206826 233231 212678 217173
199024 191813 195997 208684 244113 243108 255918 244642 237579 237579
217775 227621
```

أولا نرسم المتسلسلة في مخطط زمني

```
MTB > TSPlot 'GasDemand';
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```




نلاحظ ان المتسلسلة الزمنية موسمية ومنجرفة الى الاعلى

اولا: تطبيق النموذج الإضافي: $z_t = T_t + S_t + E_t,\ \ t = 1, 2, ..., n$

```
MTB > %Decomp 'GasDemand' 12;
SUBC>  Additive ;
SUBC>   Forecasts 24;
SUBC>   Title "Forecast of Gasoline Demand";
SUBC>  Start 1.
```

**Time Series Decomposition**

```
Data         GasDeman
Length       192.000
NMissing     0
```

Trend Line Equation

$Y_t$ = 96.4074 + 0.680579*t

Seasonal Indices

| Period | Index |
|---|---|
| 1 | -20.5625 |
| 2 | -26.8125 |
| 3 | -14.8958 |
| 4 | -11.0625 |

| | |
|---|---|
| 5 | 9.89583 |
| 6 | 11.8958 |
| 7 | 22.7708 |
| 8 | 25.1875 |
| 9 | 5.64583 |
| 10 | 7.27083 |
| 11 | -4.81250 |
| 12 | -4.52083 |

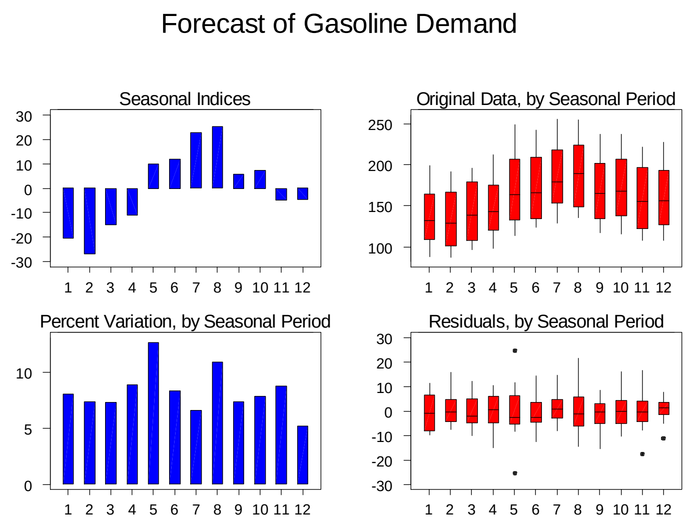
Accuracy of Model

| | |
|---|---|
| MAPE: | 3.6952 |
| MAD: | 5.6622 |
| MSD: | 52.7851 |

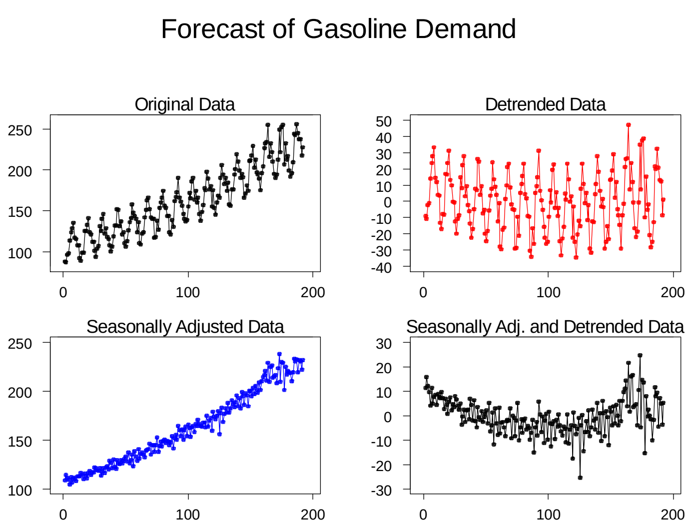
Forecasts

| Row | Period | Forecast |
|---|---|---|
| 1 | 193 | 207.197 |
| 2 | 194 | 201.627 |
| 3 | 195 | 214.225 |
| 4 | 196 | 218.738 |
| 5 | 197 | 240.377 |
| 6 | 198 | 243.058 |
| 7 | 199 | 254.614 |
| 8 | 200 | 257.711 |
| 9 | 201 | 238.850 |
| 10 | 202 | 241.155 |
| 11 | 203 | 229.753 |
| 12 | 204 | 230.725 |
| 13 | 205 | 215.364 |
| 14 | 206 | 209.794 |
| 15 | 207 | 222.391 |
| 16 | 208 | 226.905 |
| 17 | 209 | 248.544 |
| 18 | 210 | 251.225 |
| 19 | 211 | 262.780 |
| 20 | 212 | 265.878 |
| 21 | 213 | 247.017 |
| 22 | 214 | 249.322 |
| 23 | 215 | 237.919 |
| 24 | 216 | 238.892 |

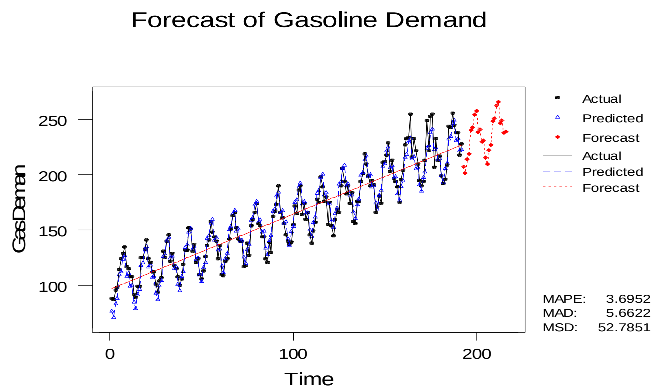
شكل (1)




شكل (2)




شكل (3)




<u>مناقشة النتائج:</u>

<u>شكل (1)</u> يوضح المؤشرات الموسمية Seasonal Indices ، فالشكل الأعلى من اليسار يبين تأثرالطلب في الأشهر المختلفة من السنة ففي الأشهر 11 و 12 و 1 و 2 و 3 و 4 يحدث نقص في الطلب إذ يتناقص تدريجيا حتى يصل إلى أقل معدل له في الشهر 2 ثم يتزايد حتى يصبح موجبا في الشهر 5 ويتزايد حتى يصل اقصى قيمة موجبة في الشهر 8 ثم ينقص بشكل كبير بعدئذ. الشكل الأعلى من اليمين يعطي رسم الصندوق Box Plot للمشاهدات الأصلية موزعة على الأشهر وهو يوضح توزيع وإنتشار المشاهدات على كل شهر والقيم الخارجة Out Liers . الشكل الأسفل من اليسار يعطي التغير النسبي المئوي على الفترات الموسمية (الأشهر). الشكل الأسفل الأيمن يعطي رسم الصندوق للبواقي أو الأخطاء موزعة على الأشهر.

<u>شكل (2)</u> الشكل الأعلى من اليمين يعطي المشاهدات الأصلية، الشكل الأعلى من اليسار يعطي المشاهدات بعد إزاحة مركبة الإنجراف أي

$$
\begin{aligned}
w_t &= z_t - T_t, \quad t = 1,2,\ldots,n \\
&= S_t + E_t, \quad t = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

الشكل الأسفل من اليسار يعطي المشاهدات الأصلية بعد إزاحة المركبة الموسمية أي

$$
\begin{aligned}
y_t &= z_t - S_t, \quad t = 1,2,\ldots,n \\
&= T_t + E_t, \quad t = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

الشكل الأسفل الأيمن يعطي مركبة الخطأ $E_t$ أو البواقي بعد إزاحة مركبتي الإنجراف والموسمية من المشاهدات الأصلية أي

$$
\begin{aligned}
e_t &= z_t - T_t - S_t, \quad t = 1,2,\ldots,n \\
&= E_t, \quad t = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

شكل (3) يعطي التنبوءات للقيم 24 المستقبلية مع مقاييس دقة التطبيق.

ثانيا: تطبيق النموذج التضاعفي: $z_t = T_t S_t + E_t \,, \quad t = 1, 2, ..., n$

```
MTB > %Decomp 'GasDemand' 12;
SUBC>   Forecasts 24;
SUBC>   Title "Forecast of Gasoline Demand";
SUBC>  Start 1.
Executing from file: D:\MTBWIN\MACROS\Decomp.MAC

Macro is running ... please wait
```

Time Series Decomposition

```
Data         GasDeman
Length       192.000
NMissing     0

Trend Line Equation

Yt = 96.4074 + 0.680579*t

Seasonal Indices
Period    Index

   1      0.860355
   2      0.828555
   3      0.892431
   4      0.936273
   5       1.06124
   6       1.07274
   7       1.15775
   8       1.17075
   9       1.03409
  10       1.05059
  11      0.966300
  12      0.968923
```

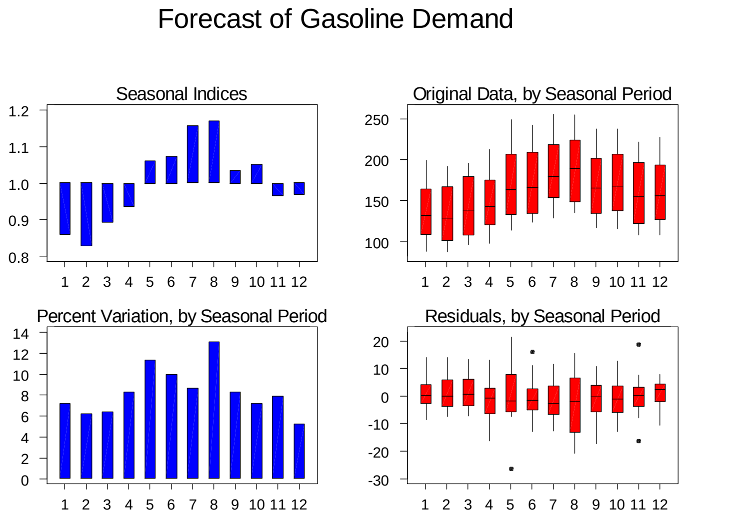
Accuracy of Model

| | |
|---|---|
| MAPE: | 3.6338 |
| MAD: | 5.7720 |
| MSD: | 56.8996 |

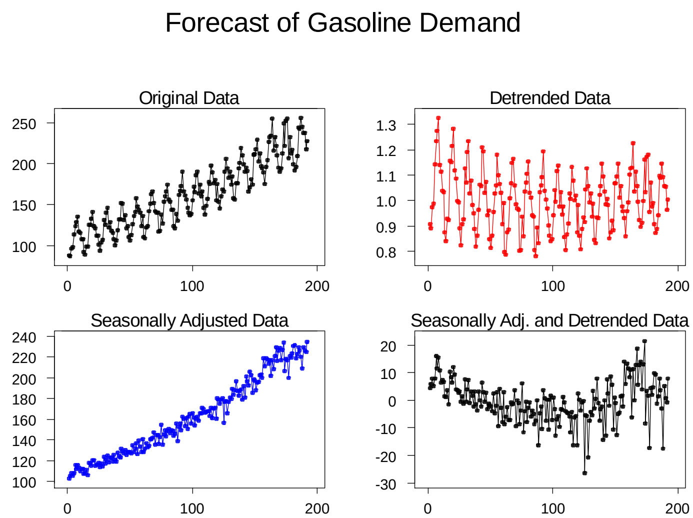
Forecasts

| Row | Period | Forecast |
|---|---|---|
| 1 | 193 | 195.954 |
| 2 | 194 | 189.275 |
| 3 | 195 | 204.474 |
| 4 | 196 | 215.156 |
| 5 | 197 | 244.596 |
| 6 | 198 | 247.977 |
| 7 | 199 | 268.415 |
| 8 | 200 | 272.227 |
| 9 | 201 | 241.154 |
| 10 | 202 | 245.718 |
| 11 | 203 | 226.660 |
| 12 | 204 | 227.935 |
| 13 | 205 | 202.980 |
| 14 | 206 | 196.042 |
| 15 | 207 | 211.762 |
| 16 | 208 | 222.803 |
| 17 | 209 | 253.263 |
| 18 | 210 | 256.738 |
| 19 | 211 | 277.870 |
| 20 | 212 | 281.789 |
| 21 | 213 | 249.599 |
| 22 | 214 | 254.298 |
| 23 | 215 | 234.552 |
| 24 | 216 | 235.848 |

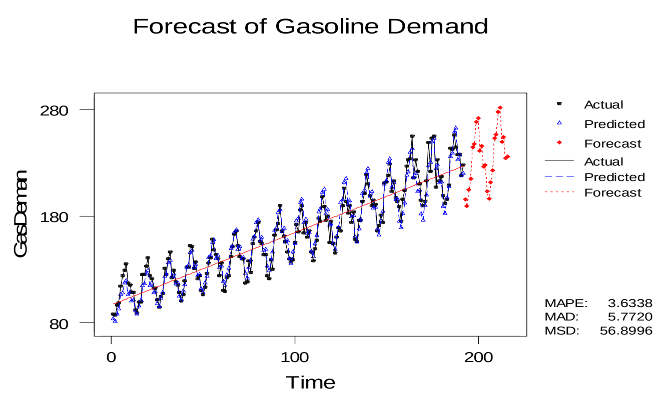
شكل (4)




شكل (5)




شكل (6)




<u>مناقشة النتائج:</u>

الأشكال (4) و (5) و (6) لها نفس التفسير كما في الأشكال (1) و (2) و (3).

بما اننا طبقنا نموذجين على المتسلسلة المشاهدة فيجب أن نختار افضل نموذج، وهنا يأتي دور مقاييس دقة التطبيق والتي تنتج من البرنامج، لدينا ثلاثة مقاييس دقة:

1- متوسط الخطأ النسبي المطلق Mean Absolute Percentage Error أو MAPE ويعطى بالعلاقة

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| \frac{z_t - \hat{z}_t}{z_t} \right|}{n} \times 100, \quad z_t \neq 0$$

2- متوسط الإنحراف المطلق Mean Absolute Deviation أو MAD ويعطى بالعلاقة

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| z_t - \hat{z}_t \right|}{n}$$

3- متوسط ألإنحراف المربع (أو متوسط الخطأ المربع) MSD (أو MSE ) ويعطى بالعلاقة

$$MSD = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left( z_t - \hat{z}_t \right)^2}{n}$$

بإختيار أحد هذة المقاييس نختار النموذج الذي يعطي أقل قيمة لهذا المقياس، المقياس الأكثر إستخداما وشيوعا هو MSD أو MSE وهو الذي سوف هنا.

للنموذج الإضافي مقاييس الدقة هي:

MAPE: 3.6952

MAD: 5.6622

MSD: 52.7851

و للنموذج التضاعفي:

MAPE: 3.6338

MAD: 5.7720

MSD: 56.8996

نلاحظ أن النموذج الإضافي اعطى اقل قيمة للمقياس MSD ولذلك نقرر إستخدام هذا النموذج للتنبؤ عن القيم المستقبلية لمتسلسلة الطلب.

**توضيح طريقة تحليل او تفكيك المتسلسلة الى مركبات Decomposition Method:**

سوف نوضح بالمثال التالي طريقة تحليل أو تفكيك المتسلسلة إلى مركبات. البيانات التالية إنتاج 168 يوما للحليب في أحد المزارع بالكيلو جرام

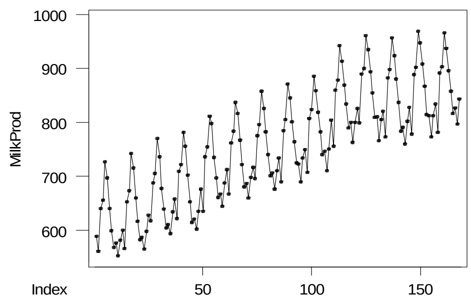
```
MTB > Read "E:\Mtbwin\milk.dat" c1.
Entering data from file: E:\Mtbwin\milk.dat
    168 rows read.
MTB > name c1='MilkProd'
MTB > print c1
```

**Data Display**

```
MilkProd
589   561   640   656   727   697   640   599   568   577
553   582   600   566   653   673   742   716   660   617
583   587   565   598   628   618   688   705   770   736
678   639   604   611   594   634   658   622   709   722
782   756   702   653   615   621   602   635   677   635
736   755   811   798   735   697   661   667   645   688
713   667   762   784   837   817   767   722   681   687
660   698   717   696   775   796   858   826   783   740
701   706   677   711   734   690   785   805   871   845
801   764   725   723   690   734   750   707   807   824
886   859   819   783   740   747   711   751   804   756
860   878   942   913   869   834   790   800   763   800
826   799   890   900   961   935   894   855   809   810
766   805   821   773   883   898   957   924   881   837
784   791   760   802   828   778   889   902   969   947
908   867   815   812   773   813   834   782   892   903
966   937   896   858   817   827   797   843
```

ونرسم البيانات السابقة بالأوامر:

```
MTB > TSPlot 'MilkProd';
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```




اولا: تطبيق النموذج الإضافي:

لمشاهدات $z_1, z_2, ..., z_n$ نكتب النموذج على الشكل $z_t = T_t + S_t + E_t,\ t = 1, 2, ..., n$ لكي نقوم بتفكيك هذه المتسلسلة الزمنية الي المركبات السابقة سوف نستعرض طريقتين ممكنة:

الطريقة الاولي:

1- نطبق إنحدار خطي بسيط للمشاهدات علي الزمن لتقدير مركبة الانجراف $T_t$ أي:

$$\hat{T}_t \equiv \hat{z}_t = a + bt,\ t = 1, 2, ..., 168$$

أي:

```
MTB > set c2
DATA> 1:168
DATA> end
MTB > name c1='MilkProd' c2='Time' c3='Trend'
c5='Detrend' c6='Index' c8='Fitted' c9='Resid'
MTB > regr c1 1 c2;
SUBC> fits c3.
```

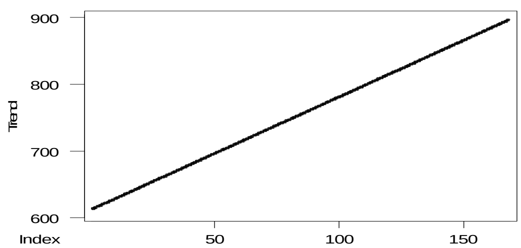
**Regression Analysis**

```
The regression equation is
MilkProd = 612 + 1.69 Time

Predictor        Coef       StDev          T        P
Constant      611.682       9.414      64.97    0.000
Time          1.69262     0.09663      17.52    0.000
```

```
S = 60.74       R-Sq = 64.9%     R-Sq(adj) = 64.7%
```
Analysis of Variance

| Source | DF | SS | MS | F | P |
|---|---|---|---|---|---|
| Regression | 1 | 1132003 | 1132003 | 306.83 | 0.000 |
| Error | 166 | 612439 | 3689 | | |
| Total | 167 | 1744443 | | | |

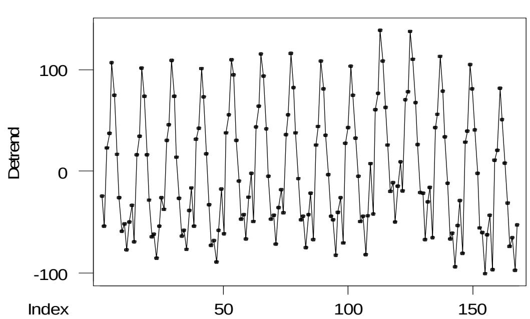
وشكل الإنجراف هو




2- نطرح مركبة الإنجراف من المشاهدات الاصلية فنحصل علي مايسمي بالمتسلسلة مزالة الإنجراف Detrended Series أي $z_t - \hat{z}_t = z_t - \hat{T}_t, t = 1, 2, ..., 168$

```
MTB > let c5=c1-c3
```

ولها الشكل التالي:



نلاحظ انها اصبحت موسمية فقط لأن $z_t - \hat{T}_t = S_t + E_t, t = 1,2,...,168$

3- لتقدير المركبة الموسمية نوجد المؤشرات الموسمية Seasonal Indices كالتالي:

لنرمز للمؤشرات الموسمية بالرمز $I_s, s = 1,2,...,12$ حيث $I_1$ المؤشر الموسمي للشهر الأول و $I_2$ المؤشر الموسمي للشهر الثاني وهكذا ولنرمز بـ $d_t = z_t - \hat{T}_t, t = 1,2,...,168$ تقدر هذه المؤشرات كالتالي:

$$I_1 = \frac{1}{14}\left(d_1 + d_{13} + d_{25} + \cdots + d_{157}\right)$$
$$I_2 = \frac{1}{14}\left(d_2 + d_{14} + d_{26} + \cdots + d_{158}\right)$$
$$\vdots$$
$$I_{12} = \frac{1}{14}\left(d_{12} + d_{24} + d_{36} + \cdots + d_{168}\right)$$

ويتم ذلك بإستخدام الأوامر التالية:

```
MTB > set c4
DATA> 14(1:12)
DATA> end
MTB > stat c5;
SUBC> by c4;
SUBC> mean c6.
MTB > Stack 'Index' 'Index' 'Index' 'Index' 'Index'
'Index' 'Index'  &
CONT>     'Index' 'Index' 'Index' 'Index' 'Index' 'Index'
'Index' c7.
MTB > let c8=c3+c7
MTB > let c9=c1-c8
MTB > set c10
DATA> 1:12
DATA> end
MTB > print c10 c6
```

**Data Display**

| Row | Season | Index |
|---|---|---|
| 1 | 1 | -18.328 |
| 2 | 2 | -57.806 |
| 3 | 3 | 34.716 |
| 4 | 4 | 49.595 |
| 5 | 5 | 110.616 |
| 6 | 6 | 82.281 |
| 7 | 7 | 32.517 |
| 8 | 8 | -9.747 |
| 9 | 9 | -52.297 |
| 10 | 10 | -48.775 |
| 11 | 11 | -79.754 |
| 12 | 12 | -43.018 |

4- التنبؤات تولد كالتالي:

$$z_{168}(\ell) = 612 + 1.69(\ell + 168) + I_{(\ell \bmod 12)}, \ell = 1, 2, \ldots$$

فمثلا التنبؤ عند اليوم 169 هو

$$z_{168}(1) = 612 + 1.69(169) + I_1$$
$$= 897.61 + (-18.328) = 879.282$$

الطريقة الثانية:

وهي التي يستخدمها برنامج Minitab :

1- كالطريقة الاولى نطبق إنحدار خطي بسيط للمشاهدات علي الزمن لتقدير مركبة الانجراف $T_t$ فنحصل على نفس النتيجة كما في الطريقة الاولى (1)
2- ايضا هنا نطرح مركبة الإنجراف من المشاهدات الاصلية فنحصل علي المتسلسلة مزالة الإنجراف Detrended Series
3- نطبق الآن متوسط متحرك من درجة الموسم ونوسطه اذا احتاج الامر
4- نطرح المتوسطات المتحركة من نظيراتها في المتسلسلة مزالة الإنجراف فنحصل علي متسلسلة تحوي المركبات الموسمية
5- تقدر المركبات الموسمية كالتالي:

$$I_1 = Median(d_1, d_{13}, d_{25}, \cdots, d_{157})$$
$$I_2 = Median(d_2, d_{14}, d_{26}, \cdots, d_{158})$$
$$\vdots$$
$$I_{12} = Median(d_{12}, d_{24}, d_{36}, \cdots, d_{168})$$

6- تولد التنبؤات كالسابق

وسوف نستعرض هذا كالتالي:

```
MTB > Read "E:\Mtbwin\milk.dat" c1.
Entering data from file: E:\Mtbwin\milk.dat
    168 rows read.
MTB > name c1='MilkProd'
MTB > set c2
DATA> 1:168
DATA> end
MTB > name c2='Time'
MTB > regr c1 1 c2;
SUBC> fits c3.
```

**Regression Analysis**

```
The regression equation is
MilkProd = 612 + 1.69 Time

Predictor       Coef       StDev          T        P
Constant     611.682       9.414      64.97    0.000
Time         1.69262     0.09663      17.52    0.000

S = 60.74       R-Sq = 64.9%     R-Sq(adj) = 64.7%

Analysis of Variance

Source         DF            SS            MS           F
P
Regression      1       1132003       1132003      306.83
0.000
Error         166       612439        3689
Total         167      1744443
```

```
Unusual Observations
Obs      Time   MilkProd        Fit  StDev Fit   Residual
St Resid
113       113     942.00     802.95       5.44     139.05
2.30R
125       125     961.00     823.26       6.11     137.74
2.28R

R  denotes  an  observation  with  a  large  standardized
residual

MTB > name c3='Trend'
MTB > let c4=c1-c3
MTB > name c4='Detrend'
MTB > Name c5 = 'AVER1'
```

في الخطوة التالية نطبق متوسط متحرك من الدرجة 12 ونوسطه:

```
MTB > %MA 'Detrend' 12;
SUBC>  Center;
SUBC>   Averages 'AVER1'.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data        Detrend
Length      168.000
NMissing    0

Moving Average
Length: 12

Accuracy Measures
MAPE:  111.68
MAD:    52.36
MSD:  3564.77
```

نطرح المتوسطات المتحركة الموسطة من المتسلسلة المزال إنجرافها

```
MTB > let c6=c4-c5
MTB > name c6='DeSeason'
MTB > set c2
DATA> 14(1:12)
DATA> end
MTB > stat c6;
SUBC> by c2;
SUBC> median c7.
MTB > name c7='SeasInx'
```

**Data Display**

```
 Row  Season   SeasInx

   1       1   -20.750
   2       2   -58.958
   3       3    35.625
   4       4    50.083
   5       5   109.542
   6       6    81.292
   7       7    33.917
   8       8   -10.000
   9       9   -52.792
  10      10   -50.250
  11      11   -79.958
  12      12   -44.375
```

نقارن الحسابات التي اجريناها مع البرنامج الأصلي:

```
MTB > %Decomp 'MilkProd' 12;
SUBC>  Additive ;
SUBC>  Start 1.
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\Decomp.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Time Series Decomposition**

```
Data         MilkProd
Length       168.000
NMissing     0

Trend Line Equation

Yt = 611.682 + 1.69262*t

Seasonal Indices

Period    Index

   1      -20.1979
   2      -58.4062
   3       36.1771
   4       50.6354
   5       110.094
   6       81.8437
   7       34.4687
   8      -9.44792
   9      -52.2396
  10      -49.6979
  11      -79.4063
  12      -43.8229


Accuracy of Model

MAPE:       1.583
MAD:       12.088
MSD:      244.406
```

وبمقارنة النتيجتين نجد انهما تقريبا متساويتان.

سوف نولد تنبؤات باستخدام البرنامج Decomp% كالتالي:

```
MTB > %Decomp 'MilkProd' 12;
SUBC>  Additive ;
```

```
SUBC>   Forecasts 12;
SUBC>  Start 1.
```

والتي تعطي التنبؤات:

```
Forecasts


 Row  Period  Forecast

   1     169    877.54
   2     170    841.02
   3     171    937.30
   4     172    953.45
   5     173   1014.60
   6     174    988.04
   7     175    942.36
   8     176    900.13
   9     177    859.04
  10     178    863.27
  11     179    835.25
  12     180    872.53
```

تمرين: ولد تنبؤات لإنتاج الحليب اليومي بإستخدام الطريقتين المعطاة وقارنها بالقيم الأخيرة الناتجة من البرنامج

# الفصل العاشر

## <u>التمهيد و التنبؤ بواسطة المتوسط المتحرك Using Moving Average Smoothing for Forecasting</u>

يستخدم المتوسط المتحرك لتمهيد المشاهدات وذلك بتقليل تباين الأخطاء فمثلا لو كان لدينا مشاهدات من متسلسلة زمنية $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ فالمتوسط المتحرك من الدرجة $m$ للمشاهدات يحسب من العلاقة

$$\hat{z}_t = \frac{1}{m}\left(z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \cdots + z_{t-m+1}\right),\ t = m, m+1, \ldots, n$$

أو

$$\hat{z}_t = \hat{z}_{t-1} + \frac{1}{m}\left(z_t - z_{t-m}\right),\ t = m, m+1, \ldots, n$$

لاحظ ان عدد المشاهدات اصبح بعد التمهيد $n - m + 1$.

فمثلا لو كانت $m=3$ فإن المتوسط المتحرك من الدرجة الثالثة هو

$$\hat{z}_3 = \frac{1}{3}\left(z_3 + z_2 + z_1\right)$$

$$\hat{z}_4 = \frac{1}{3}\left(z_4 + z_3 + z_2\right) \quad or \quad \hat{z}_4 = \hat{z}_3 + \frac{1}{3}\left(z_4 - z_1\right)$$

$$\vdots$$

$$\hat{z}_n = \frac{1}{3}\left(z_n + z_{n-1} + z_{n-2}\right) \quad or \quad \hat{z}_n = \hat{z}_{n-1} + \frac{1}{3}\left(z_n - z_{n-3}\right)$$

ولكي نرى كيف يعمل التمهيد لتقليل تباين الأخطاء لنفترض ان المشاهدات تتبع النموذج

$$z_t = \mu + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right), t = 1, 2, \ldots, n$$

فيكون

$$V\left(z_t\right) = \sigma^2, \quad \forall t$$

وبالتالي

$$V\left(\hat{z}_t\right) = \frac{\sigma^2}{m},\ t = m, m+1, \ldots, n$$

أي ان المشاهدات الممهدة اصبح تباينها أصغر بـ $m$ ضعف من المشاهدات الأصلية وهذا التمهيد للأخطاء يظهر أي نمط في المتسلسلة كان مدفونا او مغطى من تأثير الأخطاء.

ملاحظة: تؤخذ $m$ دائما فردية وذلك لنتجنب توسيط القيم الممهدة.

**التنبؤ بإستخدام المتوسط المتحرك:**

يؤخذ كمتنبئ للقيم المستقبلية المتوسط المتحرك:

$$z_n(\ell) = \hat{z}_{n-1}, \quad \ell > 0$$

**مثال:**

بإستخدام الحزمة الأحصائية MINITAB نحمل البيانات من ورقة العمل EMPLOY.MTW

```
MTB > Retrieve  'E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW'.
```

ننظر ماذا تحوي من متغيرات

```
MTB > info
```

**Information on the Worksheet**

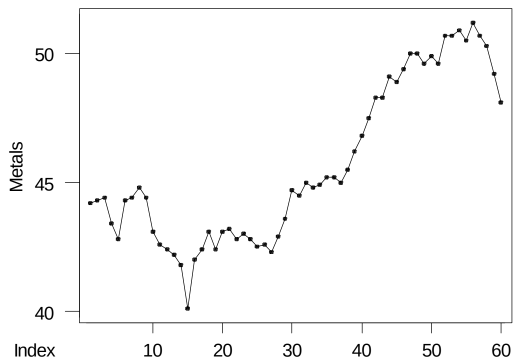
```
Column  Count  Name
C1         60  Trade
C2         60  Food
C3         60  Metals
```

سوف نستخدم المشاهدات للمتغير Metals

```
Metals
44.2     44.3     44.4     43.4     42.8     44.3     44.4
44.8     44.4     43.1     42.6     42.4     42.2     41.8
40.1     42.0     42.4     43.1     42.4     43.1     43.2
42.8     43.0     42.8     42.5     42.6     42.3     42.9
43.6     44.7     44.5     45.0     44.8     44.9     45.2
45.2     45.0     45.5     46.2     46.8     47.5     48.3
48.3     49.1     48.9     49.4     50.0     50.0     49.6
49.9     49.6     50.7     50.7     50.9     50.5     51.2
50.7    50.3    49.2    48.1
```

نرسم هذه المشاهدات:

```
MTB > TSPlot 'Metals';
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```




نطبق الآن تمهيدا لهذه المشاهدات بإستخدام المتوسط المتحرك من الدرجة $m$=3 ونوجد تنبؤات لـ 6 قيم مستقبليه:

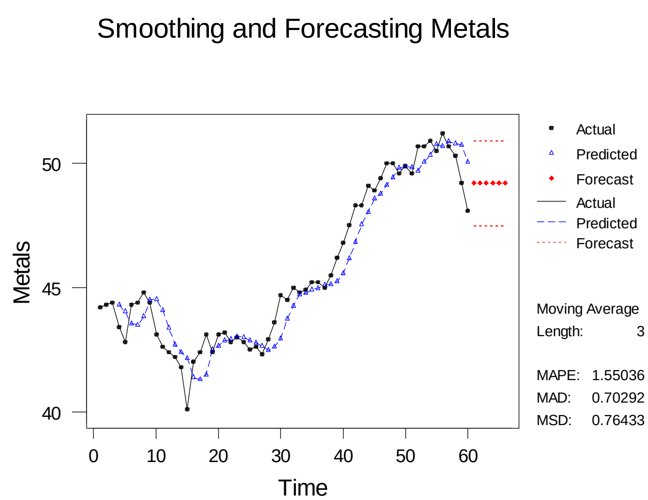
```
MTB > %MA 'Metals' 3;
SUBC>   Forecasts 6;
SUBC>   Title "Smoothing and Forecasting Metals".
Executing from file: E:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC
```

Moving average

```
Data         Metals
Length       60.0000
NMissing     0
Moving Average
Length: 3
Accuracy Measures
MAPE: 1.55036
```

```
MAD:  0.70292
MSD:  0.76433
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 49.2 | 47.4865 | 50.9135 |
| 2 | 62 | 49.2 | 47.4865 | 50.9135 |
| 3 | 63 | 49.2 | 47.4865 | 50.9135 |
| 4 | 64 | 49.2 | 47.4865 | 50.9135 |
| 5 | 65 | 49.2 | 47.4865 | 50.9135 |
| 6 | 66 | 49.2 | 47.4865 | 50.9135 |




ثانيا: مناقشة النتائج

في المثال الحالي

$$\hat{z}_{59} = \frac{50.3+49.2+48.1}{3} = \frac{147.6}{3} = 49.2$$

تؤخذ التنبؤات للقيم الـ 6 المستقبلية أي للقيم $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+6}$ أو في هذا المثال $z_{61}, z_{62}, \ldots, z_{66}$ كالتالي:

$$z_{60}(1) = z_{60}(2) = \cdots = z_{60}(6) = 49.2$$

لحساب فترات تنبؤ 95% نحسب الكميات $\ell > 0$ $\left[z_n(\ell) \pm 1.96\hat{\sigma}\right]$, أي $\left[49.2 \pm 1.96\hat{\sigma}\right]$ لجميع قيم التنبؤات المستقبلية ، نأخذ القيمة $MSD = 0.76433$ كمقدر لـ

$\sigma^2$ أي $\hat{\sigma}^2 = 0.76433$ فيكون $\hat{\sigma} = 0.8743$ وعليه تكون فترة تنبؤ 95% لجميع القيم المستقبلية هي:

$$\left[49.2 \pm 1.96(0.8743)\right] = \left[49.2 \pm 1.7135\right] = \left[47.4865, 50.9135\right]$$

أي:

$$z_{60+\ell} \in \left[47.4865, 50.9135\right], \quad \ell > 0 \quad \textit{with probability } 0.95$$

ملاحظة: تحسب MSD كالآتي

$$MSD = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n-1}\left(z_i - \hat{z}_i\right)}{n-2}$$

تمرين:

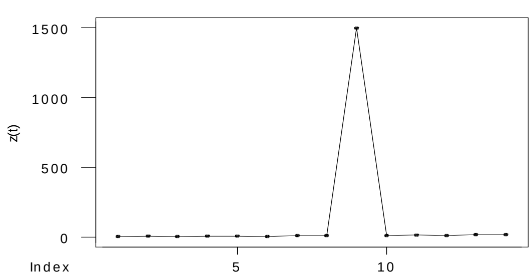
طبق متوسطات متحركة من الدرجات 5 و 7 علي المشاهدات السابقة وقرر ايها افضل للتنبؤ عن القيم المستقبلية؟.

**<u>الوسيط الجارى Running Median</u>**

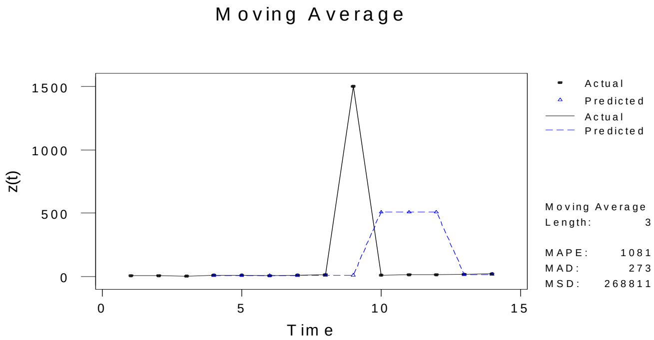
المتوسط المتحرك يتأثر كثيرا بالمشاهدات الخارجة Outliers او المتطرفة فالقيمة المتطرفة الواحدة تؤثر علي *m* من المتوسطات المتحركة المتتالية فمثلا لوكانت لدين المشاهدات

```
z(t)
5    7    3    8    9    6   10   12   1500    11    15
13     18     20
```

ولها الشكل



بأخذ متوسط متحرك من الدرجة 3 نجد



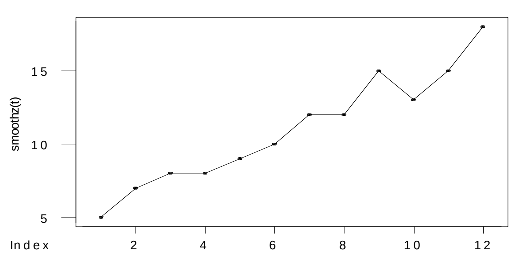

لاحظ ان المتوسط المتحرك الناتج تأثرت فية ثلاثة قيم بالقيمة المتطرفة.

للتغلب على مثل هذه الصعوبات يستخدم الوسيط الجاري ذا الطول الفردي كممهد غير خطي والذي لايتأثر باقيم المتطرفة.

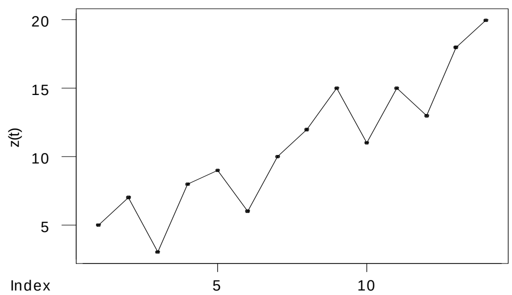
الوسيط الجاري ذا الطول الفردي $j = 2i + 1$ لمشاهدات $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ يحسب من العلاقة

$$\tilde{z}_t = med\left(z_{t-i}, ..., z_t, ..., z_{t+i}\right),\ j = 2i + 1$$

فمثلا لقيمة $j = 3$ تصبح العلاقة $\tilde{z}_t = med\left(z_{t-1}, z_t, z_{t+1}\right)$ وبأخذ وسيط جاري ذا الطول 3 للمشاهدات السابقة نجد




واذا كانت القيمة الحقيقية لـ $z_9$ هي 15 وليس 1500 فإن المشاهدات الحقيقية لها الشكل التالي




قارن بين النتيجتين.

# الفصل الحادي عشر

## التمهيد و التنبؤ بواسطة التمهيد الاسي البسيط Using Single Exponential Smoothing for Forecasting :

التمهيد بواسطة المتوسط المتحرك يعطي جميع البيانات نفس الأهمية وبالتالي فإن القيم القديمة نوعا تؤثر نفس التأثير كالقيم الحديثة وهذا قد لايكون من الناحية العملية صحيحا، التمهيد الاسي على العكس يعطي القيم الأكثر

حداثة أهمية أكبر والقيم الاخري تعطى اهمية تتناقص اسيا مع قدمها. فمثلا لو كان لدينا مشاهدات من متسلسلة زمنية $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ فالمتوسط المتحرك من الدرجة $m$ للمشاهدات يحسب من العلاقة

$$\hat{z}_t = \frac{1}{m}\left(z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \cdots + z_{t-m+1}\right),\ t = m, m+1, \ldots, n$$

والتي يمكن كتابتها

$$\hat{z}_t = \frac{1}{m} z_t + \frac{1}{m} z_{t-1} + \frac{1}{m} z_{t-2} + \cdots + \frac{1}{m} z_{t-m+1},\ t = m, m+1, \ldots, n$$

$$\hat{z}_t = \beta z_t + \beta z_{t-1} + \beta z_{t-2} + \cdots + \beta z_{t-m+1},\ t = m, m+1, \ldots, n, \quad \beta = \frac{1}{m}$$

أي ان المتوسط المتحرك يعطي جميع البيانات نفس الوزن $\beta$

الآن لو أعطينا البيانات اوزان تتناقص اسيا مع بُعد المشاهدات عن القيمة الحاضرة $z_n$ كالتالي

$$s_t = \alpha z_t + \alpha(1-\alpha) z_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 z_{t-2} + \cdots, \quad t = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 < \alpha < 1$$

القيمة $s_t$ هي متوسط موزون بأوزان تتناقص اسيا لجميع القيم السابقة وهذا مايسمى بالتمهيد الاسي البسيط ويكتب بشكل تكراري

$$s_t = \alpha z_t + (1-\alpha) s_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots, n, \quad s_0 = \bar{z}$$

وتؤخذ التنبؤات

$$z_n(\ell) = s_n,\ \ell \ge 1$$

**مثال:**

تحمل البيانات من ورقة العمل EMPLOY.MTW

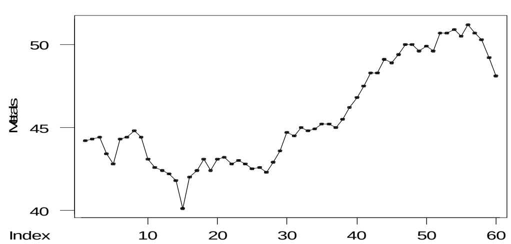
```
MTB > Retrieve  'E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW'.
```

سوف نستخدم المشاهدات في التغير Metals

```
Metals
44.2    44.3    44.4    43.4    42.8    44.3    44.4
44.8    44.4    43.1    42.6    42.4    42.2    41.8
40.1    42.0    42.4    43.1    42.4    43.1    43.2
42.8    43.0    42.8    42.5    42.6    42.3    42.9
43.6    44.7    44.5    45.0    44.8    44.9    45.2
45.2    45.0    45.5    46.2    46.8    47.5    48.3
48.3    49.1    48.9    49.4    50.0    50.0    49.6
49.9    49.6    50.7    50.7    50.9    50.5    51.2
50.7    50.3    49.2    48.1
```

نرسم هذه المشاهدات:

```
MTB > TSPlot 'Metals';
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```



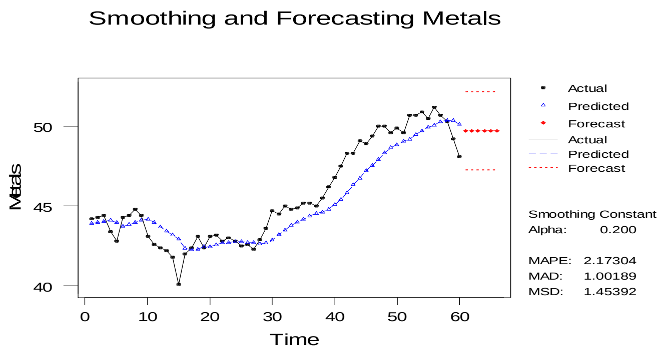
نطبق الآن تمهيدا لهذه المشاهدات بإستخدام التمهيد الاسي البسيط ونأخذ ثابت تمهيد $\alpha = 0.2$ ونوجد تنبؤات لـ 6 قيم مستقبليه:

```
MTB > %SES 'Metals';
SUBC>   Weight 0.2;
SUBC>   Forecasts 6;
SUBC>   Title "Smoothing and Forecasting Metals";
SUBC>   Initial 6.
```

Single Exponential Smoothing

```
Data         Metals
Length       60.0000
NMissing     0
Smoothing Constant
Alpha: 0.2
Accuracy Measures
MAPE: 2.17304
MAD:  1.00189
MSD:  1.45392
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 49.7216 | 47.2670 | 52.1763 |
| 2 | 62 | 49.7216 | 47.2670 | 52.1763 |
| 3 | 63 | 49.7216 | 47.2670 | 52.1763 |
| 4 | 64 | 49.7216 | 47.2670 | 52.1763 |
| 5 | 65 | 49.7216 | 47.2670 | 52.1763 |
| 6 | 66 | 49.7216 | 47.2670 | 52.1763 |




## ثانيا: مناقشة النتائج

1- يحسب التمهيد الاسي البسيط لمشاهدات $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-2}$ بثابت تمهيد $\alpha = 0.2$ من العلاقة التكرارية:

$$s_i = \alpha z_i + (1-\alpha) s_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

لكي نبدأ العلاقة التكرارية لحساب القيم الممهدة اسيا نحتاج الي القيمة الاولية $s_0$ والتي تحسب بعدة طرق، أحد هذه الطرق والتي سنستخدمها هي وضع $s_0$ مساوية للمتوسط

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i}{m}, m = 6 \left(\text{or n, if n<6}\right)$$ ففي مثالنا

$$s_0 = \frac{44.2 + 44.3 + 44.4 + 43.4 + 42.8 + 44.3}{6} = 43.9$$

وبالتالي يكون

$$s_1 = \alpha z_1 + (1-\alpha) s_0 = 0.2(44.2) + 0.8(43.9) = 8.84 + 35.12 = 43.96$$

$$s_2 = \alpha z_2 + (1-\alpha) s_1 = 0.2(44.3) + 0.8(43.96) = 8.86 + 35.168 = 44.028$$

و هكذا نستمر حتي آخر مشاهدة فينتج التالي:

| Time | Metals | SMOO1 | FITS1 | RESI1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 44.2 | 43.9600 | 43.9000 | 0.30000 |
| 2 | 44.3 | 44.0280 | 43.9600 | 0.34000 |
| 3 | 44.4 | 44.1024 | 44.0280 | 0.37200 |
| 4 | 43.4 | 43.9619 | 44.1024 | -0.70240 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 42.8 | 43.7295 | 43.9619 | -1.16192 |
| 6 | 44.3 | 43.8436 | 43.7295 | 0.57046 |
| 7 | 44.4 | 43.9549 | 43.8436 | 0.55637 |
| 8 | 44.8 | 44.1239 | 43.9549 | 0.84510 |
| 9 | 44.4 | 44.1791 | 44.1239 | 0.27608 |
| 10 | 43.1 | 43.9633 | 44.1791 | -1.07914 |
| 11 | 42.6 | 43.6906 | 43.9633 | -1.36331 |
| 12 | 42.4 | 43.4325 | 43.6906 | -1.29065 |
| 13 | 42.2 | 43.1860 | 43.4325 | -1.23252 |
| 14 | 41.8 | 42.9088 | 43.1860 | -1.38601 |
| 15 | 40.1 | 42.3470 | 42.9088 | -2.80881 |
| 16 | 42.0 | 42.2776 | 42.3470 | -0.34705 |
| 17 | 42.4 | 42.3021 | 42.2776 | 0.12236 |
| 18 | 43.1 | 42.4617 | 42.3021 | 0.79789 |
| 19 | 42.4 | 42.4494 | 42.4617 | -0.06169 |
| 20 | 43.1 | 42.5795 | 42.4494 | 0.65065 |
| 21 | 43.2 | 42.7036 | 42.5795 | 0.62052 |
| 22 | 42.8 | 42.7229 | 42.7036 | 0.09642 |
| 23 | 43.0 | 42.7783 | 42.7229 | 0.27713 |
| 24 | 42.8 | 42.7826 | 42.7783 | 0.02171 |
| 25 | 42.5 | 42.7261 | 42.7826 | -0.28264 |
| 26 | 42.6 | 42.7009 | 42.7261 | -0.12611 |
| 27 | 42.3 | 42.6207 | 42.7009 | -0.40089 |
| 28 | 42.9 | 42.6766 | 42.6207 | 0.27929 |
| 29 | 43.6 | 42.8613 | 42.6766 | 0.92343 |
| 30 | 44.7 | 43.2290 | 42.8613 | 1.83875 |
| 31 | 44.5 | 43.4832 | 43.2290 | 1.27100 |
| 32 | 45.0 | 43.7866 | 43.4832 | 1.51680 |
| 33 | 44.8 | 43.9892 | 43.7866 | 1.01344 |
| 34 | 44.9 | 44.1714 | 43.9892 | 0.91075 |
| 35 | 45.2 | 44.3771 | 44.1714 | 1.02860 |
| 36 | 45.2 | 44.5417 | 44.3771 | 0.82288 |
| 37 | 45.0 | 44.6334 | 44.5417 | 0.45830 |
| 38 | 45.5 | 44.8067 | 44.6334 | 0.86664 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 39 | 46.2 | 45.0853 | 44.8067 | 1.39331 |
| 40 | 46.8 | 45.4283 | 45.0853 | 1.71465 |
| 41 | 47.5 | 45.8426 | 45.4283 | 2.07172 |
| 42 | 48.3 | 46.3341 | 45.8426 | 2.45738 |
| 43 | 48.3 | 46.7273 | 46.3341 | 1.96590 |
| 44 | 49.1 | 47.2018 | 46.7273 | 2.37272 |
| 45 | 48.9 | 47.5415 | 47.2018 | 1.69818 |
| 46 | 49.4 | 47.9132 | 47.5415 | 1.85854 |
| 47 | 50.0 | 48.3305 | 47.9132 | 2.08683 |
| 48 | 50.0 | 48.6644 | 48.3305 | 1.66947 |
| 49 | 49.6 | 48.8515 | 48.6644 | 0.93557 |
| 50 | 49.9 | 49.0612 | 48.8515 | 1.04846 |
| 51 | 49.6 | 49.1690 | 49.0612 | 0.53877 |
| 52 | 50.7 | 49.4752 | 49.1690 | 1.53101 |
| 53 | 50.7 | 49.7202 | 49.4752 | 1.22481 |
| 54 | 50.9 | 49.9561 | 49.7202 | 1.17985 |
| 55 | 50.5 | 50.0649 | 49.9561 | 0.54388 |
| 56 | 51.2 | 50.2919 | 50.0649 | 1.13510 |
| 57 | 50.7 | 50.3735 | 50.2919 | 0.40808 |
| 58 | 50.3 | 50.3588 | 50.3735 | -0.07353 |
| 59 | 49.2 | 50.1271 | 50.3588 | -1.15883 |
| 60 | 48.1 | 49.7216 | 50.1271 | -2.02706 |

العمود الرابع SMOO1 يحوى القيم الممهدة أي $s_i, i=1,2,\ldots,60$ العمود الخامس FITS1 يحوى القيم المطبقة أي $\hat{z}_i = s_{i-1}, i=1,2,\ldots,60$ العمود الخامس RESI1 يحوي الأخطاء (البواقي Residuals) أي $e_i = z_i - \hat{z}_i, i=1,2,\ldots,60$

2- يؤخذ كمتنبئ للقيم المستقبلية آخر قيمة ممهدة أي:

$$z_n(\ell) = s_n, \quad \ell > 0$$

ففي المثال الحالي

$$z_{60}(\ell) = 49.7216, \quad \ell > 0$$

تؤخذ التنبؤات للقيم الـ 6 المستقبلية أي للقيم $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+6}$ أو في هذا المثال $z_{61}, z_{62}, \ldots, z_{66}$ كالتالي:

$$z_{60}(1) = z_{60}(2) = \cdots = z_{60}(6) = 49.7216$$

3- لحساب فترات تنبؤ 95% نحسب الكميات $\ell > 0$ $\left[z_n(\ell) \pm 1.96\hat{\sigma}\right],$ أي $\left[49.7216 \pm 1.96\hat{\sigma}\right]$ لجميع قيم التنبؤات المستقبلية ، نأخذ القيمة $MSD = 1.45392$ كمقدر لـ $\sigma^2$ أي $\hat{\sigma}^2 = 1.45392$ فيكون $\hat{\sigma} = 1.205786$ وعليه تكون فترة تنبؤ 95% لجميع القيم المستقبلية هي:

$$\left[49.7216 \pm 1.96(1.205786)\right] = \left[49.7216 \pm 2.3633\right] = \left[47.35826, 52.08494\right]$$

أي:

$$z_{60+\ell} \in \left[47.3582, 50.0849\right], \quad \ell > 0 \quad \textit{with probability } 0.95$$

ملاحظة: تحسب MSD كالآتي

$$MSD = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \hat{z}_i\right)}{n-1}$$

تمرين:

طبق تمهيد اسي بسيط علي المشاهدات السابقة مستخدما $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5$ وقرر ايها افضل للتنبؤ عن القيم المستقبلية؟.

# الفصل الثاني عشر

## التمهيد و التنبؤ بواسطة التمهيد الاسي المزدوج Using Double Exponential Smoothing for Forecasting :

أولا: طريقة براون Brown's Method:

لمشاهدات $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-2}$ ولثابت تمهيد $0 < \alpha < 1$ نوجد التالي:

$$s_t^{(1)} = \alpha z_t + (1-\alpha) s_{t-1}^{(1)}, \; t = 1, 2, ..., n$$

حيث $s_t^{(1)}$ تمهيد اسي بسيط $s_t^{(1)} = s_t$ (انظر التمهيد الاسي البسيط) و $(1)$ ترمز الي درجة هذا التمهيد

$$s_t^{(2)} = \alpha s_t^{(1)} + (1-\alpha) s_{t-1}^{(2)}, \; t = 1, 2, ..., n$$

حيث $s_t^{(2)}$ تمهيد اسي مزدوج و $(2)$ ترمز الي درجة هذا التمهيد

$$a_t = 2s_t^{(1)} - s_t^{(2)}, \; t = 1, 2, ..., n$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(s_t^{(1)} - s_t^{(2)}\right), \; t = 1, 2, ..., n$$

تحسب القيم المطبقة من المعادلة

$$\hat{z}_t = a_t + b_t t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

وتحسب التنبؤات للقيم المستقبلية $z_{n+\ell}, \ell > 0$ من

$$z_n(\ell) = a_n + b_n \ell, \quad \ell > 0$$

حساب القيم الاولية $s_0^{(1)}$ و $s_0^{(2)}$ : من العلاقات السابقة نجد

$$s_0^{(1)} = a_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_0$$

$$s_0^{(2)} = a_0 - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} b_0$$

نوجد $a_0$ و $b_0$ بإنحدار المشاهدات علي الزمن $z_t = \alpha + \beta t + e_t, \quad t = 1, 2, ..., n$ ويكون

$a_0 = \hat{\alpha}$ و $b_0 = \hat{\beta}$

ثانيا: طريقة هولت Holt's Method:

لمشاهدات $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_{n-2}$ ولثابتي تمهيد $0 < \alpha < 1$ و $0 < \gamma < 1$ نوجد التالي:

$$s_t = \alpha z_t + (1-\alpha)(s_{t-1} + b_{t-1}), \quad t = 1, 2, ..., n$$
$$b_t = \gamma(s_t - s_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1}, \quad t = 1, 2, ..., n$$

نحسب القيم المطبقة من

$$\hat{z}_t = s_t + b_t t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

والتنبؤات للقيم المستقبلية من

$$z_n(\ell) = s_n + b_n \ell, \quad \ell > 0$$

نحسب القيم الاولية $s_0$ و $b_0$ من

$$s_0 = z_1$$
$$b_0 = z_2 - z_1 \quad \text{or}$$
$$b_0 = \frac{(z_2 - z_1) + (z_3 - z_2)}{2} = \frac{(z_3 - z_1)}{2} \quad \text{or}$$
$$b_0 = \frac{(z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + (z_4 - z_3)}{3} = \frac{(z_4 - z_1)}{3}$$

**مثال:**

تحمل البيانات من ورقة العمل EMPLOY.MTW

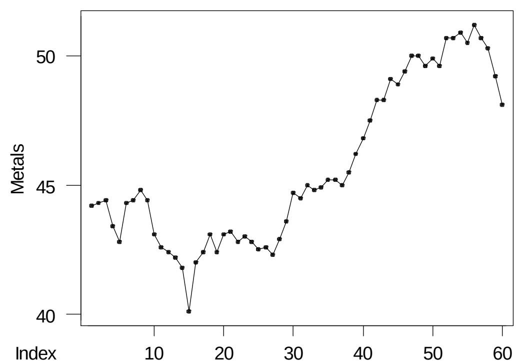
MTB > Retrieve 'E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW'.

سوف نستخدم المشاهدات في التغير Metals

```
Metals
44.2     44.3     44.4     43.4     42.8     44.3     44.4
44.8     44.4     43.1     42.6     42.4     42.2     41.8
40.1     42.0     42.4     43.1     42.4     43.1     43.2
42.8     43.0     42.8     42.5     42.6     42.3     42.9
43.6     44.7     44.5     45.0     44.8     44.9     45.2
45.2     45.0     45.5     46.2     46.8     47.5     48.3
48.3     49.1     48.9     49.4     50.0     50.0     49.6
49.9     49.6     50.7     50.7     50.9     50.5     51.2
50.7    50.3    49.2    48.1
```

نرسم هذه المشاهدات:

```
MTB > TSPlot 'Metals';
SUBC>   Index;
SUBC>   TDisplay 11;
SUBC>   Symbol;
SUBC>   Connect.
```




نطبق الآن تمهيدا لهذه المشاهدات بإستخدام التمهيد الاسي المزدوج بطريقة براون، نستخدم الآن البرمج (Macro) %DES مع الامر الفرعي WEIGHT بأوزان متساوية سوف نأخذها 0.2

```
MTB > %DES 'Metals';
SUBC>   Weight 0.2 0.2;
SUBC>   Forecasts 6;
SUBC>   Title "Brown's Double Exponential Smoothing";
SUBC>   Table.
```

Double Exponential Smoothing

```
Data         Metals
Length       60.0000
```

NMissing 0

Smoothing Constants

Alpha (level): 0.2

Gamma (trend): 0.2

Accuracy Measures

MAPE: 2.16187

MAD: 0.97032

MSD: 1.62936

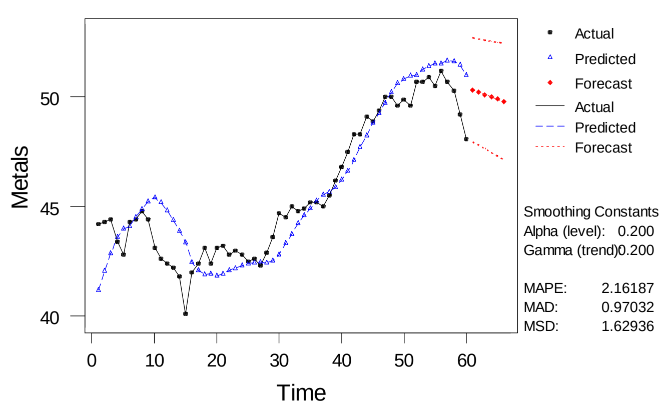
| Time | Metals | Smooth | Predict | Error |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 44.2 | 41.7739 | 41.1674 | 3.03257 |
| 2 | 44.3 | 42.4976 | 42.0470 | 2.25303 |
| 3 | 44.4 | 43.1686 | 42.8607 | 1.53927 |
| 4 | 43.4 | 43.5546 | 43.5933 | -0.19330 |
| 5 | 42.8 | 43.7373 | 43.9716 | -1.17163 |
| 6 | 44.3 | 44.1459 | 44.1074 | 0.19257 |
| 7 | 44.4 | 44.4990 | 44.5238 | -0.12377 |
| 8 | 44.8 | 44.8575 | 44.8719 | -0.07189 |
| 9 | 44.4 | 45.0620 | 45.2275 | -0.82751 |
| 10 | 43.1 | 44.9391 | 45.3989 | -2.29891 |
| 11 | 42.6 | 44.6673 | 45.1841 | -2.58407 |
| 12 | 42.4 | 44.3271 | 44.8088 | -2.40884 |
| 13 | 42.2 | 43.9378 | 44.3723 | -2.17229 |
| 14 | 41.8 | 43.4769 | 43.8962 | -2.09617 |
| 15 | 40.1 | 42.7011 | 43.3514 | -3.25142 |
| 16 | 42.0 | 42.3565 | 42.4456 | -0.44557 |
| 17 | 42.4 | 42.1465 | 42.0831 | 0.31694 |
| 18 | 43.1 | 42.1286 | 41.8857 | 1.21426 |
| 19 | 42.4 | 42.0132 | 41.9164 | 0.48355 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 43.1 | 42.0763 | 41.8204 | 1.27964 |
| 21 | 43.2 | 42.1877 | 41.9347 | 1.26533 |
| 22 | 42.8 | 42.2374 | 42.0967 | 0.70327 |
| 23 | 43.0 | 42.3396 | 42.1745 | 0.82549 |
| 24 | 42.8 | 42.4078 | 42.3098 | 0.49024 |
| 25 | 42.5 | 42.4181 | 42.3976 | 0.10244 |
| 26 | 42.6 | 42.4495 | 42.4119 | 0.18809 |
| 27 | 42.3 | 42.4207 | 42.4509 | -0.15090 |
| 28 | 42.9 | 42.5129 | 42.4161 | 0.48394 |
| 29 | 43.6 | 42.7420 | 42.5276 | 1.07245 |
| 30 | 44.7 | 43.1797 | 42.7996 | 1.90036 |
| 31 | 44.5 | 43.5507 | 43.3133 | 1.18668 |
| 32 | 45.0 | 43.9854 | 43.7317 | 1.26826 |
| 33 | 44.8 | 44.3338 | 44.2172 | 0.58280 |
| 34 | 44.9 | 44.6511 | 44.5889 | 0.31112 |
| 35 | 45.2 | 44.9749 | 44.9187 | 0.28133 |
| 36 | 45.2 | 45.2430 | 45.2538 | -0.05376 |
| 37 | 45.0 | 45.4157 | 45.5197 | -0.51967 |
| 38 | 45.5 | 45.6373 | 45.6716 | -0.17162 |
| 39 | 46.2 | 45.9491 | 45.8863 | 0.31368 |
| 40 | 46.8 | 46.3285 | 46.2106 | 0.58938 |
| 41 | 47.5 | 46.7909 | 46.6136 | 0.88637 |
| 42 | 48.3 | 47.3492 | 47.1115 | 1.18850 |
| 43 | 48.3 | 47.8339 | 47.7173 | 0.58266 |
| 44 | 49.1 | 48.4002 | 48.2253 | 0.87469 |
| 45 | 48.9 | 48.8413 | 48.8267 | 0.07332 |
| 46 | 49.4 | 49.2966 | 49.2707 | 0.12930 |
| 47 | 50.0 | 49.7849 | 49.7311 | 0.26890 |
| 48 | 50.0 | 50.1841 | 50.2302 | -0.23017 |
| 49 | 49.6 | 50.4162 | 50.6202 | -1.02022 |
| 50 | 49.9 | 50.6292 | 50.8114 | -0.91145 |
| 51 | 49.6 | 50.7104 | 50.9880 | -1.38797 |
| 52 | 50.7 | 50.9509 | 51.0137 | -0.31368 |
| 53 | 50.7 | 51.1334 | 51.2417 | -0.54169 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 54 | 50.9 | 51.3019 | 51.4024 | -0.50244 |
| 55 | 50.5 | 51.3407 | 51.5509 | -1.05093 |
| 56 | 51.2 | 51.4782 | 51.5477 | -0.34770 |
| 57 | 50.7 | 51.4770 | 51.6712 | -0.97120 |
| 58 | 50.3 | 51.3649 | 51.6311 | -1.33115 |
| 59 | 49.2 | 51.0127 | 51.4659 | -2.26587 |
| 60 | 48.1 | 50.4384 | 51.0230 | -2.92300 |

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 50.3318 | 47.9545 | 52.7091 |
| 2 | 62 | 50.2252 | 47.7984 | 52.6520 |
| 3 | 63 | 50.1186 | 47.6384 | 52.5987 |
| 4 | 64 | 50.0120 | 47.4749 | 52.5490 |
| 5 | 65 | 49.9054 | 47.3080 | 52.5027 |
| 6 | 66 | 49.7988 | 47.1381 | 52.4594 |

Brown's Double Exponential Smoothing



إيجاد $a_0$ و $b_0$:

```
MTB > set c4
DATA> 1:60
DATA> end
MTB > regr c3 1 c4
```

Regression Analysis

The regression equation is
Metals = 41.0 + 0.152 C4

إذا $a_0 = 41.0$ و $b_0 = 0.152$ ومنها نحسب

$$s_0^{(1)} = a_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_0 = 41.0 - \frac{0.8}{0.2}(0.152) = 41.608$$

$$s_0^{(2)} = a_0 - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} b_0 = 41.0 - 2\left(\frac{0.8}{0.2}\right)(0.152) = 42.216$$

$$s_1^{(1)} = (0.2)(44.2) + (0.8)(41.608) = 42.1264$$

$$s_1^{(2)} = (0.2)(42.1264) + (0.8)(42.216) = 42.19808$$

$$a_1 = (2)(42.1264) - 42.19808 = 42.05472$$

$$b_1 = \frac{(0.2)}{(0.8)}(42.19808 - 42.05472) = 0.03584$$

$$\hat{z}_1 = 42.05472 + (0.03584)(1) = 42.09056$$

وهكذا الخ ...

تحسب فترات التنبؤ بإستخدام MSD كما في الأمثلة السابقة.

**<u>مثال:</u>**

لتطبيق طريقة هولت نستخدم الآن البرمج (Macro) %DES مع الامر الفرعي WEIGHT بأوزان مختلفة سوف نأخذ $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 0.3$

```
MTB > RETR 'E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW'.
Retrieving worksheet from file: E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW
Worksheet was saved on  6/ 5/1996
```

```
MTB > %DES 'Metals';
SUBC>   Weight 0.2 0.3;
SUBC>   Forecasts 6;
SUBC>   Title "Holt's Double Exponential Smoothing";
SUBC>   Table.
```

**Double Exponential Smoothing**

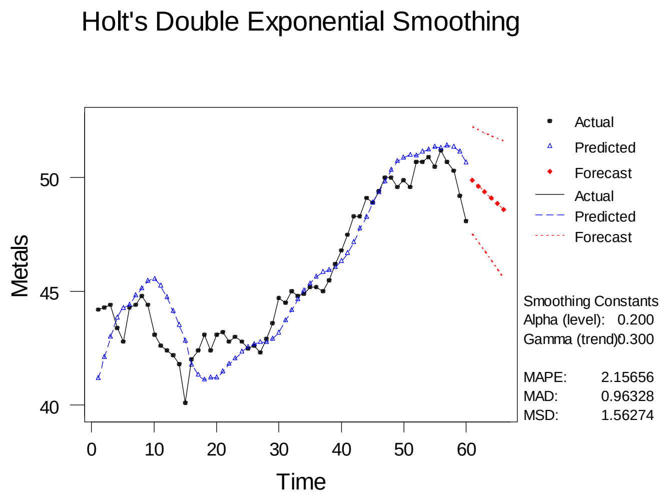
```
Data        Metals
Length      60.0000
NMissing    0

Smoothing Constants
Alpha (level): 0.2
Gamma (trend): 0.3

Accuracy Measures
MAPE: 2.15656
MAD:  0.96328
MSD:  1.56274
```

| Time | Metals | Smooth | Predict | Error |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 44.2 | 41.7739 | 41.1674 | 3.03257 |
| 2 | 44.3 | 42.5461 | 42.1076 | 2.19238 |
| 3 | 44.4 | 43.2891 | 43.0113 | 1.38868 |
| 4 | 43.4 | 43.7501 | 43.8376 | -0.43760 |
| 5 | 42.8 | 43.9779 | 44.2724 | -1.47237 |
| 6 | 44.3 | 44.3895 | 44.4118 | -0.11184 |
| 7 | 44.4 | 44.7334 | 44.8167 | -0.41671 |
| 8 | 44.8 | 45.0685 | 45.1356 | -0.33560 |
| 9 | 44.4 | 45.2405 | 45.4506 | -1.05057 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 43.1 | 45.0676 | 45.5595 | -2.45952 |
| 11 | 42.6 | 44.7113 | 45.2391 | -2.63911 |
| 12 | 42.4 | 44.2595 | 44.7244 | -2.32443 |
| 13 | 42.2 | 43.7466 | 44.1332 | -1.93322 |
| 14 | 41.8 | 43.1634 | 43.5043 | -1.70426 |
| 15 | 40.1 | 42.2751 | 42.8188 | -2.71884 |
| 16 | 42.0 | 41.8139 | 41.7674 | 0.23263 |
| 17 | 42.4 | 41.5361 | 41.3202 | 1.07985 |
| 18 | 43.1 | 41.5057 | 41.1072 | 1.99283 |
| 19 | 42.4 | 41.4371 | 41.1964 | 1.20365 |
| 20 | 43.1 | 41.5799 | 41.1999 | 1.90008 |
| 21 | 43.2 | 41.8054 | 41.4568 | 1.74322 |
| 22 | 42.8 | 41.9895 | 41.7869 | 1.01314 |
| 23 | 43.0 | 42.2254 | 42.0317 | 0.96829 |
| 24 | 42.8 | 42.4205 | 42.3257 | 0.47431 |
| 25 | 42.5 | 42.5395 | 42.5493 | -0.04933 |
| 26 | 42.6 | 42.6522 | 42.6653 | -0.06528 |
| 27 | 42.3 | 42.6793 | 42.7741 | -0.47413 |
| 28 | 42.9 | 42.7982 | 42.7728 | 0.12724 |
| 29 | 43.6 | 43.0394 | 42.8993 | 0.70070 |
| 30 | 44.7 | 43.4861 | 43.1826 | 1.51743 |
| 31 | 44.5 | 43.8762 | 43.7202 | 0.77977 |
| 32 | 45.0 | 44.3257 | 44.1571 | 0.84285 |
| 33 | 44.8 | 44.6858 | 44.6573 | 0.14275 |
| 34 | 44.9 | 45.0007 | 45.0259 | -0.12590 |
| 35 | 45.2 | 45.3066 | 45.3333 | -0.13327 |
| 36 | 45.2 | 45.5449 | 45.6312 | -0.43116 |
| 37 | 45.0 | 45.6749 | 45.8436 | -0.84361 |
| 38 | 45.5 | 45.8384 | 45.9230 | -0.42295 |
| 39 | 46.2 | 46.0888 | 46.0610 | 0.13895 |
| 40 | 46.8 | 46.4159 | 46.3199 | 0.48014 |
| 41 | 47.5 | 46.8406 | 46.6757 | 0.82428 |
| 42 | 48.3 | 47.3799 | 47.1499 | 1.15014 |
| 43 | 48.3 | 47.8665 | 47.7582 | 0.54181 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 44 | 49.1 | 48.4419 | 48.2774 | 0.82265 |
| 45 | 48.9 | 48.9016 | 48.9020 | -0.00205 |
| 46 | 49.4 | 49.3693 | 49.3617 | 0.03832 |
| 47 | 50.0 | 49.8653 | 49.8317 | 0.16832 |
| 48 | 50.0 | 50.2702 | 50.3378 | -0.33779 |
| 49 | 49.6 | 50.4979 | 50.7224 | -1.12240 |
| 50 | 49.9 | 50.6862 | 50.8827 | -0.98275 |
| 51 | 49.6 | 50.7296 | 51.0121 | -1.41206 |
| 52 | 50.7 | 50.9166 | 50.9708 | -0.27079 |
| 53 | 50.7 | 51.0532 | 51.1415 | -0.44152 |
| 54 | 50.9 | 51.1813 | 51.2516 | -0.35162 |
| 55 | 50.5 | 51.1869 | 51.3586 | -0.85860 |
| 56 | 51.2 | 51.2901 | 51.3127 | -0.11267 |
| 57 | 50.7 | 51.2673 | 51.4092 | -0.70916 |
| 58 | 50.3 | 51.1350 | 51.3438 | -1.04381 |
| 59 | 49.2 | 50.7591 | 51.1489 | -1.94889 |
| 60 | 48.1 | 50.1448 | 50.6560 | -2.55603 |

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 49.8884 | 47.5283 | 52.2484 |
| 2 | 62 | 49.6319 | 47.1597 | 52.1041 |
| 3 | 63 | 49.3755 | 46.7803 | 51.9707 |
| 4 | 64 | 49.1190 | 46.3915 | 51.8466 |
| 5 | 65 | 48.8626 | 45.9946 | 51.7306 |
| 6 | 66 | 48.6061 | 45.5908 | 51.6215 |




تمرين: تحقق من صحة الحسابات السابقة بتتبع بعض القيم يدويا ( ملاحظة: يتوقع عدم تطابق الحسابات تماما وذلك لإختلاف طريق تمثيل الأعداد بين الحاسب والآلة الحاسبة وكذلك في تخزين الأرقام في ذاكرت كل منهما)

# الفصل الثالث عشر

## التمهيد الاسي الثلاثي و التنبؤ بواسطة طريقة ونترز للمتسلسلات الموسمية المنجرفة

## Triple Exponential Smoothing: Winters' Three-Parameter Trend and Seasonality Smoothing Method

جميع الطرق السابقة التي درسناها في هذا الفصل لا تنفع لتحليل الظواهر الموسمية ماعدى طريقة التفكيك Decomposition Method وطريقة ونترز Winters' trend and seasonal smoothing التي سوف نستعرضها هنا

طريقة ونترز للمتسلسلات الموسمية المنجرفة

أولا: تمهد المشاهدات تمهيدا كليا بالعلاقة

$$s_t = \alpha \frac{z_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(s_{t-1} + b_{t-1}), \quad t = 1, 2, ..., n$$

ثانيا: تمهيد الإنجراف

$$b_t = \gamma(s_t - s_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1}, \quad t = 1, 2, ..., n$$

ثالثا: تمهيد الموسمية

$$S_t = \beta \frac{z_t}{s_t} + (1-\beta) S_{t-s}, \quad t = 1, 2, ..., n$$

حيث $S_i$ هي المركبة الموسمية عند الزمن $i$ و $s$ هي دورة الموسمية

القيم المطبقة تعطي بالعلاقة

$$\hat{z}_t = (s_t + b_t t) S_{t-s}, \quad t = 1, 2, ..., n$$

والتنبؤات من العلاقة

$$z_n(\ell) = (s_n + b_n \ell) S_{n-s+\ell}, \quad \ell > 0$$

من الصعب جدا تتبع طريقة ونترز بالحسابات اليدوية حيث ان القيم الاولية تحسب بخوارزمات غير خطية بإستخدام الحاسب ولهذا لن نستعرضها هنا ونكتفي بالنتائج المخرجة من الحاسب.

**مثال:**

تحمل البيانات من ورقة العمل EMPLOY.MTW

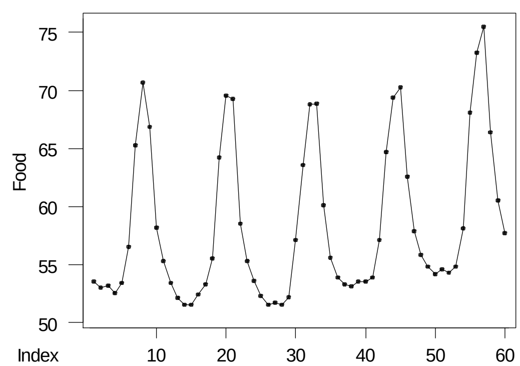
```
MTB > Retrieve  'E:\Mtbwin\DATA\EMPLOY.MTW'.
```

سوف نستخدم المشاهدات في المتغير Food

Food

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53.5 | 53.0 | 53.2 | 52.5 | 53.4 | 56.5 | 65.3 | 70.7 | 66.9 | 58.2 | 55.3 | 53.4 |
| 52.1 | 51.5 | 51.5 | 52.4 | 53.3 | 55.5 | 64.2 | 69.6 | 69.3 | 58.5 | 55.3 | 53.6 |
| 52.3 | 51.5 | 51.7 | 51.5 | 52.2 | 57.1 | 63.6 | 68.8 | 68.9 | 60.1 | 55.6 | 53.9 |
| 53.3 | 53.1 | 53.5 | 53.5 | 53.9 | 57.1 | 64.7 | 69.4 | 70.3 | 62.6 | 57.9 | 55.8 |
| 54.8 | 54.2 | 54.6 | 54.3 | 54.8 | 58.1 | 68.1 | 73.3 | 75.5 | 66.4 | 60.5 | 57.7 |

ونرسم المشاهدات




نلاحظ ان الظاهرة موسمية بدورة 12 نطبق الآن طريقة ونترز كالتالي:

أولا: للنموذج الإضافي Additive Model

$$z_t = b_t + S_t + e_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

```
MTB > %Wintadd 'Food' 12;
SUBC>   Weight 0.2 0.2 0.2;
SUBC>   Forecasts 12;
SUBC>   Title "Wintrs' Trend and Seasonal Smoothing";
```

```
SUBC>   Table.
```

**Winters' additive model**

```
Data         Food
Length       60.0000
NMissing     0

Smoothing Constants
Alpha (level):     0.2
Gamma (trend):     0.2
Delta (seasonal): 0.2

Accuracy Measures
MAPE: 1.94769
MAD:  1.15100
MSD:  2.66711
```

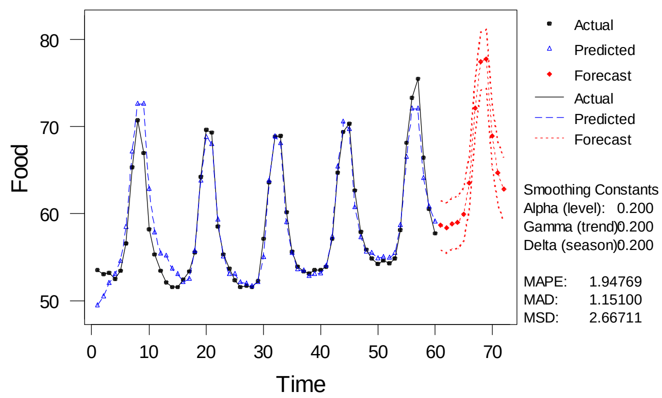
| Time | Food | Smooth | Predict | Error |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 53.5 | 48.7755 | 49.4303 | 4.06965 |
| 2 | 53.0 | 49.6020 | 50.4197 | 2.58027 |
| 3 | 53.2 | 51.0736 | 51.9944 | 1.20556 |
| 4 | 52.5 | 52.0733 | 53.0424 | -0.54244 |
| 5 | 53.4 | 53.5117 | 54.4591 | -1.05914 |
| 6 | 56.5 | 57.4851 | 58.3901 | -1.89013 |
| 7 | 65.3 | 66.2299 | 67.0593 | -1.75932 |
| 8 | 70.7 | 71.7852 | 72.5443 | -1.84430 |
| 9 | 66.9 | 71.8932 | 72.5785 | -5.67851 |
| 10 | 58.2 | 62.3206 | 62.7787 | -4.57874 |
| 11 | 55.3 | 57.5208 | 57.7958 | -2.49577 |
| 12 | 53.4 | 55.1544 | 55.3296 | -1.92957 |
| 13 | 52.1 | 55.0393 | 55.1373 | -3.03734 |
| 14 | 51.5 | 53.6493 | 53.6258 | -2.12584 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 51.5 | 53.1185 | 53.0100 | -1.50996 |
| 16 | 52.4 | 52.2661 | 52.0971 | 0.30287 |
| 17 | 53.3 | 52.6528 | 52.4960 | 0.80401 |
| 18 | 55.5 | 55.7616 | 55.6369 | -0.13695 |
| 19 | 64.2 | 63.8483 | 63.7181 | 0.48187 |
| 20 | 69.6 | 68.8787 | 68.7678 | 0.83218 |
| 21 | 69.3 | 68.0386 | 67.9610 | 1.33902 |
| 22 | 58.5 | 59.2825 | 59.2585 | -0.75851 |
| 23 | 55.3 | 55.0979 | 55.0435 | 0.25650 |
| 24 | 53.6 | 53.0432 | 52.9991 | 0.60092 |
| 25 | 52.3 | 53.0377 | 53.0177 | -0.71765 |
| 26 | 51.5 | 52.1394 | 52.0907 | -0.59067 |
| 27 | 51.7 | 51.9889 | 51.9165 | -0.21651 |
| 28 | 51.5 | 51.7214 | 51.6403 | -0.14031 |
| 29 | 52.2 | 52.1875 | 52.1009 | 0.09913 |
| 30 | 57.1 | 55.0750 | 54.9923 | 2.10774 |
| 31 | 63.6 | 63.7515 | 63.7531 | -0.15314 |
| 32 | 68.8 | 68.8427 | 68.8382 | -0.03822 |
| 33 | 68.9 | 68.0160 | 68.0099 | 0.89007 |
| 34 | 60.1 | 58.9061 | 58.9356 | 1.16436 |
| 35 | 55.6 | 55.3220 | 55.3981 | 0.20190 |
| 36 | 53.9 | 53.4419 | 53.5262 | 0.37384 |
| 37 | 53.3 | 53.3084 | 53.4076 | -0.10757 |
| 38 | 53.1 | 52.6717 | 52.7666 | 0.33345 |
| 39 | 53.5 | 52.9095 | 53.0177 | 0.48233 |
| 40 | 53.5 | 52.9745 | 53.1020 | 0.39803 |
| 41 | 53.9 | 53.7952 | 53.9386 | -0.03858 |
| 42 | 57.1 | 57.2065 | 57.3484 | -0.24838 |
| 43 | 64.7 | 65.2747 | 65.4066 | -0.70661 |
| 44 | 69.4 | 70.4039 | 70.5076 | -1.10758 |
| 45 | 70.3 | 69.6200 | 69.6794 | 0.62065 |
| 46 | 62.6 | 60.5655 | 60.6497 | 1.95031 |
| 47 | 57.9 | 57.0392 | 57.2014 | 0.69858 |
| 48 | 55.8 | 55.3721 | 55.5623 | 0.23773 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 49 | 54.8 | 55.2403 | 55.4399 | -0.63993 |
| 50 | 54.2 | 54.6681 | 54.8422 | -0.64220 |
| 51 | 54.6 | 54.8138 | 54.9622 | -0.36218 |
| 52 | 54.3 | 54.7366 | 54.8705 | -0.57048 |
| 53 | 54.8 | 55.3001 | 55.4112 | -0.61119 |
| 54 | 58.1 | 58.5310 | 58.6176 | -0.51765 |
| 55 | 68.1 | 66.4168 | 66.4827 | 1.61731 |
| 56 | 73.3 | 71.8806 | 72.0112 | 1.28878 |
| 57 | 75.5 | 71.8794 | 72.0616 | 3.43843 |
| 58 | 66.4 | 63.7240 | 64.0437 | 2.35629 |
| 59 | 60.5 | 60.3141 | 60.7281 | -0.22810 |
| 60 | 57.7 | 58.6397 | 59.0446 | -1.34455 |

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 58.6167 | 55.7968 | 61.4366 |
| 2 | 62 | 58.3236 | 55.4449 | 61.2023 |
| 3 | 63 | 58.8195 | 55.8775 | 61.7614 |
| 4 | 64 | 58.9840 | 55.9746 | 61.9935 |
| 5 | 65 | 59.8723 | 56.7913 | 62.9532 |
| 6 | 66 | 63.4804 | 60.3243 | 66.6365 |
| 7 | 67 | 72.0757 | 68.8410 | 75.3104 |
| 8 | 68 | 77.4486 | 74.1321 | 80.7651 |
| 9 | 69 | 77.7540 | 74.3528 | 81.1552 |
| 10 | 70 | 68.9067 | 65.4180 | 72.3954 |
| 11 | 71 | 64.6434 | 61.0647 | 68.2221 |
| 12 | 72 | 62.7731 | 59.1020 | 66.4441 |

Wintrs' Trend and Seasonal Smoothing




ثانيا: للنموذج التضاعفي Multiplicative Model

$$z_t = b_t S_t + e_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

```
MTB > %Wintmult 'Food' 12;
SUBC>   Weight 0.2 0.2 0.2;
SUBC>   Forecasts 12;
SUBC>   Title "Winters' Trend and Seasonal Smoothing";
SUBC>   Table.
```

**Winters' multiplicative model**

```
Data        Food
Length      60.0000
NMissing    0

Smoothing Constants
Alpha (level):    0.2
Gamma (trend):    0.2
Delta (seasonal): 0.2

Accuracy Measures
MAPE: 1.88377
MAD:  1.12068
MSD:  2.86696
```

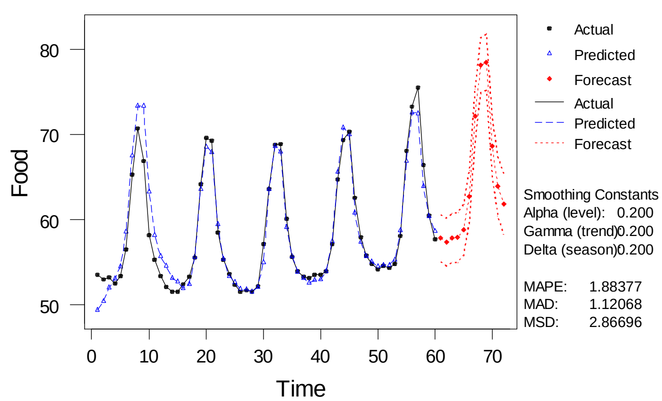
| Time | Food | Smooth | Predict | Error |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 53.5 | 48.7870 | 49.3853 | 4.11470 |
| 2 | 53.0 | 49.6755 | 50.4303 | 2.56966 |
| 3 | 53.2 | 51.1521 | 52.0132 | 1.18677 |
| 4 | 52.5 | 52.1675 | 53.0746 | -0.57458 |
| 5 | 53.4 | 53.6181 | 54.5132 | -1.11323 |
| 6 | 56.5 | 57.6509 | 58.5541 | -2.05414 |
| 7 | 65.3 | 66.6199 | 67.5607 | -2.26072 |
| 8 | 70.7 | 72.4105 | 73.3280 | -2.62800 |
| 9 | 66.9 | 72.5679 | 73.3777 | -6.47768 |
| 10 | 58.2 | 62.7837 | 63.2634 | -5.06337 |
| 11 | 55.3 | 57.9154 | 58.1732 | -2.87320 |
| 12 | 53.4 | 55.5108 | 55.6485 | -2.24849 |
| 13 | 52.1 | 54.4920 | 54.5392 | -2.43920 |
| 14 | 51.5 | 53.2117 | 53.1621 | -1.66212 |
| 15 | 51.5 | 52.8118 | 52.6957 | -1.19573 |
| 16 | 52.4 | 52.0929 | 51.9302 | 0.46985 |
| 17 | 53.3 | 52.5894 | 52.4439 | 0.85611 |
| 18 | 55.5 | 55.7388 | 55.6209 | -0.12087 |
| 19 | 64.2 | 63.7189 | 63.5782 | 0.62178 |
| 20 | 69.6 | 68.7087 | 68.5838 | 1.01617 |
| 21 | 69.3 | 67.9722 | 67.8890 | 1.41104 |
| 22 | 58.5 | 59.4594 | 59.4361 | -0.93606 |
| 23 | 55.3 | 55.4037 | 55.3468 | -0.04680 |
| 24 | 53.6 | 53.4103 | 53.3536 | 0.24639 |
| 25 | 52.3 | 52.6818 | 52.6356 | -0.33562 |
| 26 | 51.5 | 51.8659 | 51.8071 | -0.30705 |
| 27 | 51.7 | 51.8002 | 51.7290 | -0.02902 |
| 28 | 51.5 | 51.6271 | 51.5549 | -0.05492 |
| 29 | 52.2 | 52.1643 | 52.0890 | 0.11103 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 57.1 | 55.0424 | 54.9676 | 2.13244 |
| 31 | 63.6 | 63.6079 | 63.6199 | -0.01988 |
| 32 | 68.8 | 68.6702 | 68.6823 | 0.11774 |
| 33 | 68.9 | 67.9561 | 67.9727 | 0.92727 |
| 34 | 60.1 | 59.1021 | 59.1487 | 0.95133 |
| 35 | 55.6 | 55.6210 | 55.7003 | -0.10032 |
| 36 | 53.9 | 53.7881 | 53.8609 | 0.03912 |
| 37 | 53.3 | 53.0479 | 53.1211 | 0.17892 |
| 38 | 53.1 | 52.4502 | 52.5294 | 0.57055 |
| 39 | 53.5 | 52.7444 | 52.8467 | 0.65329 |
| 40 | 53.5 | 52.8747 | 53.0029 | 0.49714 |
| 41 | 53.9 | 53.7689 | 53.9188 | -0.01879 |
| 42 | 57.1 | 57.2790 | 57.4374 | -0.33743 |
| 43 | 64.7 | 65.4702 | 65.6357 | -0.93567 |
| 44 | 69.4 | 70.6713 | 70.8095 | -1.40954 |
| 45 | 70.3 | 69.8908 | 69.9719 | 0.32815 |
| 46 | 62.6 | 60.7552 | 60.8370 | 1.76302 |
| 47 | 57.9 | 57.1925 | 57.3348 | 0.56523 |
| 48 | 55.8 | 55.5181 | 55.6775 | 0.12253 |
| 49 | 54.8 | 54.8764 | 55.0383 | -0.23826 |
| 50 | 54.2 | 54.3244 | 54.4749 | -0.27486 |
| 51 | 54.6 | 54.5372 | 54.6769 | -0.07694 |
| 52 | 54.3 | 54.5298 | 54.6661 | -0.36612 |
| 53 | 54.8 | 55.1925 | 55.3155 | -0.51551 |
| 54 | 58.1 | 58.6054 | 58.7141 | -0.61410 |
| 55 | 68.1 | 66.7739 | 66.8698 | 1.23016 |
| 56 | 73.3 | 72.4056 | 72.5622 | 0.73784 |
| 57 | 75.5 | 72.3385 | 72.5236 | 2.97638 |
| 58 | 66.4 | 63.6729 | 63.9378 | 2.46217 |
| 59 | 60.5 | 60.0395 | 60.3781 | 0.12191 |
| 60 | 57.7 | 58.3023 | 58.6338 | -0.93381 |

Row  Period  Forecast  Lower  Upper

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 57.8102 | 55.0645 | 60.5558 |
| 2 | 62 | 57.3892 | 54.5864 | 60.1921 |
| 3 | 63 | 57.8332 | 54.9687 | 60.6977 |
| 4 | 64 | 57.9307 | 55.0005 | 60.8609 |
| 5 | 65 | 58.8311 | 55.8313 | 61.8309 |
| 6 | 66 | 62.7415 | 59.6686 | 65.8145 |
| 7 | 67 | 72.1849 | 69.0354 | 75.3344 |
| 8 | 68 | 78.1507 | 74.9215 | 81.3798 |
| 9 | 69 | 78.5092 | 75.1976 | 81.8208 |
| 10 | 70 | 68.6689 | 65.2721 | 72.0657 |
| 11 | 71 | 63.9258 | 60.4414 | 67.4103 |
| 12 | 72 | 61.8189 | 58.2446 | 65.3933 |

Winters' Trend and Seasonal Smoothing




ملاحظات:

لتطبيق طريقة ونترز نحتاج الي إختيار قيم ثلاثة معالم هي $\alpha$ ثابت التمهيد الكلي و $\gamma$ ثابت تمهيد الإنجراف و $\beta$ ثابت تمهيد الموسمية وهذه عملية أفضلية Optimization في ثلاثة ابعاد ( فضاء المعالم ) إما أن نترك للبرنامج الإحصائي المستخدم حسابها تلقائيا بإستخدام خوارزمات غير خطية مبنية داخل البرنامج أو نقوم نحن بإمداد البرنامج بتلك القيم.

تمرين: في الأمثلة السابقة اخذنا $\alpha = \gamma = \beta = 0.2$ . ثبت في كل مرة معلمين وغير الثالث حتي تحصل علي أقل MSD

**مثال عملى لبناء نموذج تنبؤ:**

سوف نستخدم ورقة العمل CPI.MTW من مجموعة البيانات للبرنامج MINITAB

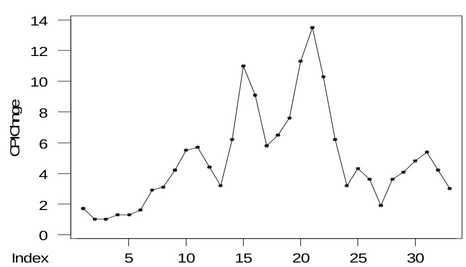
```
MTB > Retrieve  'C:\MTBWIN\STUDENT9\CPI.MTW'.
```

سوف نأخذ المتغير CPIChange

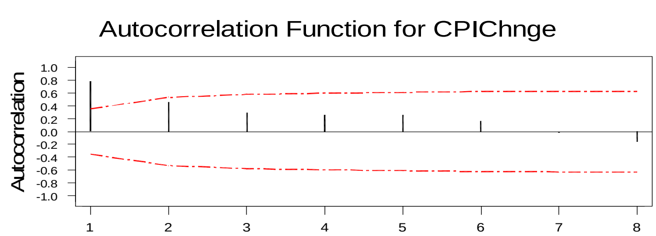
```
CPIChnge
1.7     1.0     1.0     1.3     1.3     1.6     2.9
3.1     4.2     5.5     5.7     4.4     3.2     6.2
11.0     9.1     5.8     6.5     7.6    11.3    13.5
10.3     6.2     3.2     4.3     3.6     1.9     3.6
4.1     4.8     5.4     4.2     3.0
```

نرسم المتسلسلة ونوجد الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية العينية

```
MTB > TSPlot
```

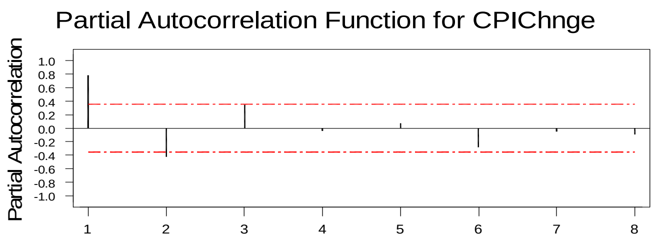



```
MTB > %acf c2
```




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.79 | 4.53 | 22.42 | 8 | -0.16 | -0.51 | 41.23 |
| 2 | 0.46 | 1.77 | 30.32 | | | | |
| 3 | 0.29 | 1.02 | 33.59 | | | | |
| 4 | 0.26 | 0.88 | 36.24 | | | | |
| 5 | 0.26 | 0.86 | 38.97 | | | | |
| 6 | 0.16 | 0.52 | 40.05 | | | | |
| 7 | -0.02 | -0.06 | 40.07 | | | | |

```
MTB > %pacf c2
```




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.79 | 4.53 | 8 | -0.09 | -0.52 |
| 2 | -0.42 | -2.44 | | | |
| 3 | 0.35 | 2.01 | | | |
| 4 | -0.04 | -0.24 | | | |
| 5 | 0.08 | 0.43 | | | |
| 6 | -0.28 | -1.62 | | | |
| 7 | -0.05 | -0.29 | | | |

من انماط الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية العينية قد يكون النموذج ARMA(1,1) ينطبق على المتسلسلة، الأوامر التالية تطبق النموذج المقترح وتولد 5 تنبوءات للقيم المستقبلية

```
MTB > arima 1 0 1 c2;
SUBC> fore 5 c3 c4 c5;
SUBC> gser;
SUBC> gacf;
SUBC> gpacf;
SUBC> ghist;
SUBC> gnormal.
```

ARIMA Model

```
ARIMA model for CPIChnge

Estimates at each iteration
Iteration        SSE      Parameters
    0        323.251     0.100     0.100     4.522
    1        200.616     0.250    -0.050     3.745
    2        182.146     0.184    -0.200     4.067
    3        163.067     0.135    -0.350     4.308
```

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 142.864 | 0.107 | -0.500 | 4.434 |
| 5 | 121.402 | 0.111 | -0.650 | 4.407 |
| 6 | 99.668 | 0.150 | -0.800 | 4.197 |
| 7 | 77.036 | 0.268 | -0.950 | 3.590 |
| 8 | 67.550 | 0.418 | -0.956 | 2.828 |
| 9 | 62.802 | 0.568 | -0.964 | 2.062 |
| 10 | 62.108 | 0.637 | -0.973 | 1.687 |
| 11 | 62.030 | 0.644 | -0.979 | 1.619 |
| 12 | 62.003 | 0.647 | -0.982 | 1.584 |
| 13 | 61.996 | 0.651 | -0.985 | 1.549 |
| 14 | 61.996 | 0.651 | -0.986 | 1.539 |

Unable to reduce sum of squares any further

Final Estimates of Parameters

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 0.6513 | 0.1434 | 4.54 |
| MA 1 | -0.9857 | 0.0516 | -19.11 |
| Constant | 1.5385 | 0.4894 | 3.14 |
| Mean | 4.412 | 1.403 | |

Number of observations: 33

Residuals: SS = 61.8375 (backforecasts excluded)

MS = 2.0613 DF = 30

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

| Lag | 12 | 24 | 36 | 48 |
|---|---|---|---|---|
| Chi-Square | 9.6(DF=10) | 17.0(DF=22) | * (DF= *) | * (DF= *) |

Forecasts from period 33

| Period | Forecast | 95 Percent Limits Lower | Upper | Actual |
|---|---|---|---|---|
| 34 | 3.1362 | 0.3216 | 5.9507 | |
| 35 | 3.5810 | -1.8180 | 8.9801 | |
| 36 | 3.8708 | -2.3061 | 10.0476 | |
| 37 | 4.0594 | -2.4192 | 10.5380 | |
| 38 | 4.1823 | -2.4201 | 10.7848 | |

أي ان النموذج المقترح هو

$$z_t = 1.54 + 0.65 z_{t-1} + a_t - 0.99 a_{t-1}, \quad a_t \sim N(0, 2.06)$$

مقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيمة إختبار $t$ هي

$$\hat{\phi}_1 = 0.6513, \quad s.e.(\hat{\phi}_1) = 0.1434, \quad t = 4.54$$

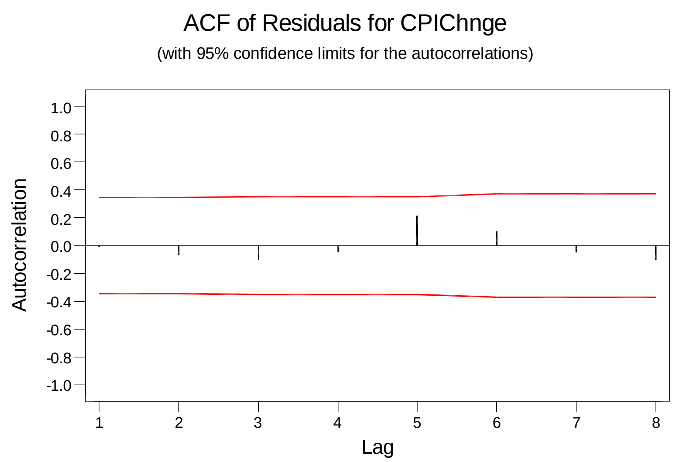
$$\hat{\theta}_1 = -0.9857, \quad s.e.(\hat{\theta}_1) = 0.0516, \quad t = -19.11$$

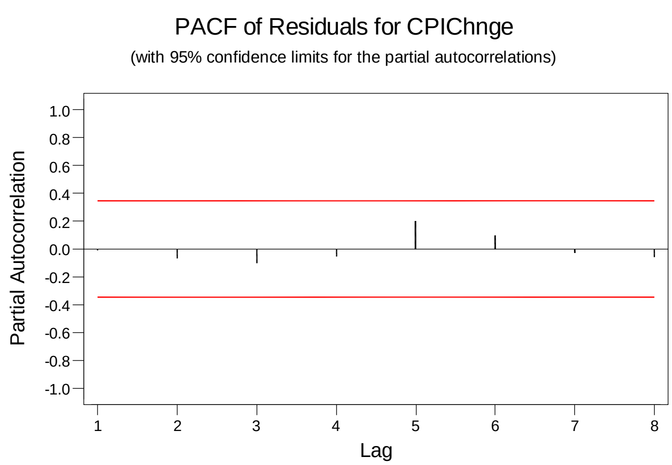
$$\hat{\delta} = 1.5385, \quad s.e.(\hat{\delta}) = 0.4894, \quad t = 3.14$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2.0613, \quad with \quad d.f. = 30$$

نلاحظ ان جميع المعالم معنوية.

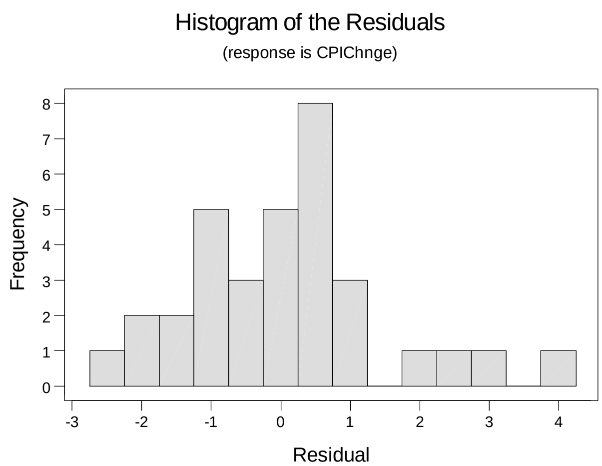
الآن نفحص البواقي:



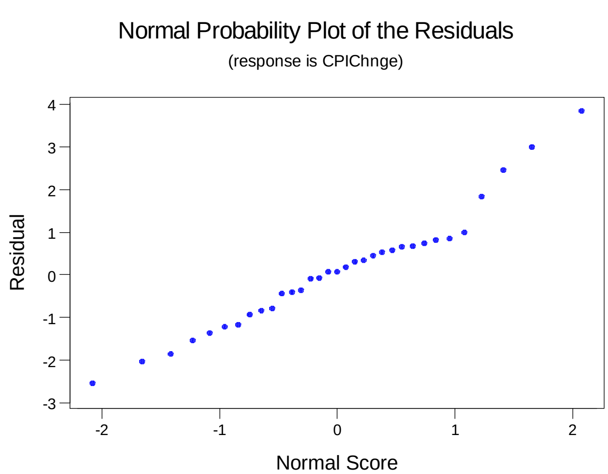
أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للبواقي تدل على أن البواقي تتبع توزيع ضجة بيضاء أي غير مترابطة، لنفحص طبيعية البواقي:

رسم المدرج التكراري



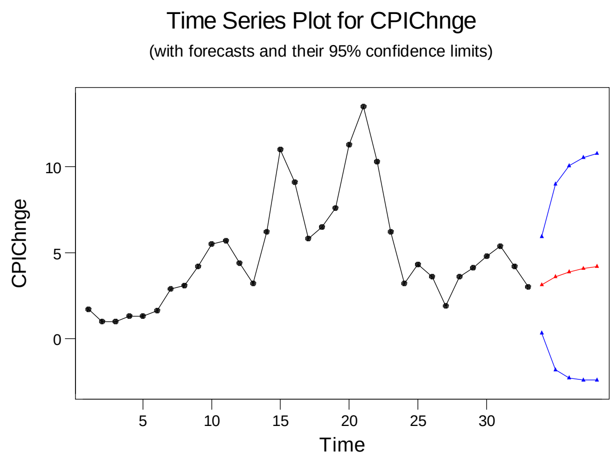

يبدو متناظر بعض الشيئ.

لننظر إلى مخطط الإحتمال الطبيعي للبواقي:



نستطيع أن نقول ان البواقي طبيعية تقريبا.

الرسم التالي للمتسلسة مع 5 تنبؤات للقيم المستقبلية.




دعنا نحاول تطبيق نموذج AR(2) على المتسلسلة كالتالي:

```
MTB > arima 2 0 0 c2

Type          Coef       StDev         T
AR    1      1.1872      0.1625      7.31
AR    2     -0.4657      0.1624     -2.87
Constant     1.3270      0.2996      4.43
Mean          4.765       1.076

Number of observations:   33
Residuals:     SS = 88.6206  (backforecasts excluded)
               MS =  2.9540  DF = 30

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag          12             24             36             48
Chi-Square  19.8(DF=10)   25.4(DF=22)     * (DF= *)      *
(DF= *)
```

أي ان النموذج المقترح هو

$$z_t = 1.33 + 1.187 z_{t-1} - 0.4657 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim N(0, 2.95)$$

مقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيمة إختبار $t$ هي

$$\hat{\phi}_1 = 1.1872, \quad s.e.(\hat{\phi}_1) = 0.1625, \quad t = 7.31$$

$$\hat{\phi}_2 = -0.4657, \quad s.e.(\hat{\theta}_1) = 0.1624, \quad t = -2.87$$

$$\hat{\delta} = 1.327, \quad s.e.(\hat{\delta}) = 0.2996, \quad t = 4.43$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2.954, \quad with \quad d.f. = 30$$

لننظر إلى الإختبار

$$H_0 : \phi_2 = 0$$
$$H_1 : \phi_2 \pm 0$$

الإحصائة

$$t_0 = \frac{\hat{\phi}_2}{s.e.(\hat{\phi}_2)} = \frac{-0.4657}{0.1624} = -2.8676$$

نوجد الـ `P-value` لها بالأمر

```
MTB > cdf -2.8676;
SUBC> t 30.
```

Cumulative Distribution Function

```
Student's t distribution with 30 DF

         x      P( X <= x)
   -2.8676         0.0037
```

أي الـ `P-value` لها تساوي `0.0037` وهي أقل من `0.05` أي لانرفض ان $\phi_2 = 0$ وبالتالي نرفض النموذج `AR(2)` .

**<u>تمرين:</u>**

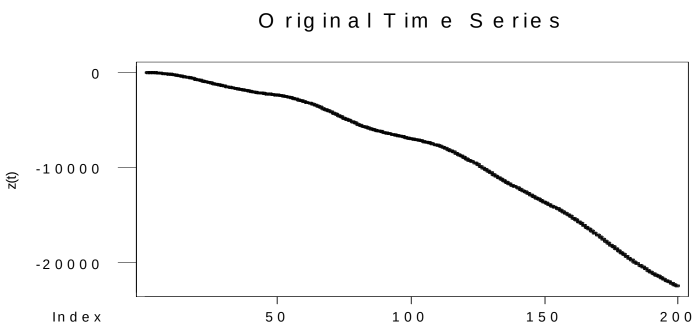
حاول تطبيق نماذج اخرى مناسبة على المتسلسلة السابقة وإختار أفضل نموذج، أجري الإختبارات المناسبة واستخدم ايضا المعيار AIC .

**مثال عملي آخر لبناء نموذج تنبؤ:**

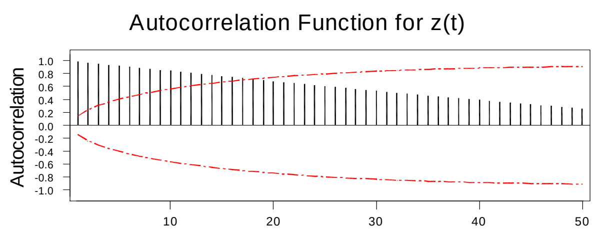
سوف نحاول بناء نموذج للمتسلسلة

```
z(t)
-2.5       -9.1      -19.2     -33.1      -52.8      -76.7     -103.2
-132.4     -165.9    -204.0    -246.0     -291.3     -339.9    -391.4
-446.4     -504.8    -566.7    -631.6     -698.2     -766.7    -836.1
-905.3     -975.1    -1044.2   -1111.3    -1177.4    -1242.9   -1307.3
-1371.8    -1436.5   -1500.0   -1561.5    -1620.8    -1679.0   -1736.9
-1794.5    -1851.1   -1906.9   -1960.6    -2010.0    -2055.4   -2097.5
-2136.4    -2173.3   -2210.8   -2250.5    -2290.6    -2328.5   -2363.4
-2398.7    -2437.6   -2482.0   -2533.0    -2589.5    -2651.9   -2721.4
-2797.6    -2880.4   -2968.6   -3060.8    -3156.1    -3253.4   -3353.3
-3456.9    -3564.3   -3675.0   -3788.7    -3906.6    -4028.2   -4153.0
-4281.7    -4412.0   -4542.3   -4673.3    -4805.0    -4937.2   -5068.7
-5197.8    -5323.6   -5444.4   -5558.0    -5663.8    -5760.6   -5848.8
-5931.6    -6011.8   -6090.4   -6167.9    -6244.3    -6317.8   -6387.3
-6453.5    -6518.9   -6584.6   -6649.0    -6711.8    -6773.3   -6834.5
-6896.0    -6957.1   -7015.6   -7073.1    -7131.7    -7193.3   -7259.9
-7332.9    -7411.2   -7495.3   -7586.4    -7683.2    -7784.7   -7891.4
-8004.6    -8124.0   -8249.2   -8379.1    -8512.3    -8649.8   -8791.2
-8936.4    -9086.3   -9239.6   -9394.6    -9552.0    -9713.3   -9878.4
-10047.2   -10219.0  -10392.1  -10564.0   -10734.0   -10903.2  -11071.9
-11238.9   -11402.0  -11560.2  -11713.8   -11863.9   -12011.7  -12157.5
-12302.5   -12447.5  -12593.4  -12740.8   -12889.7   -13039.8  -13190.3
-13339.6   -13486.3  -13629.3  -13769.9   -13910.1   -14051.7  -14196.3
-14345.9   -14499.7  -14657.5  -14819.8   -14986.4   -15158.3  -15335.9
-15518.4   -15705.0  -15895.8  -16091.5   -16290.9   -16492.7  -16697.1
-16904.2   -17113.5  -17324.4  -17535.7   -17745.2   -17951.5  -18155.6
-18360.1   -18564.2  -18766.2  -18965.1   -19161.7   -19356.3  -19547.0
-19733.5   -19919.5  -20107.3  -20294.5   -20478.0   -20655.7  -20827.7
-20993.7   -21154.4  -21310.9  -21463.7   -21614.0   -21762.1  -21908.3
-22053.2   -22195.6  -22335.1  -22474.4
```

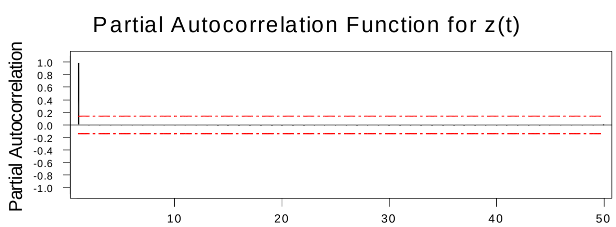
ولها الرسم الزمني التالي:




الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية هي:



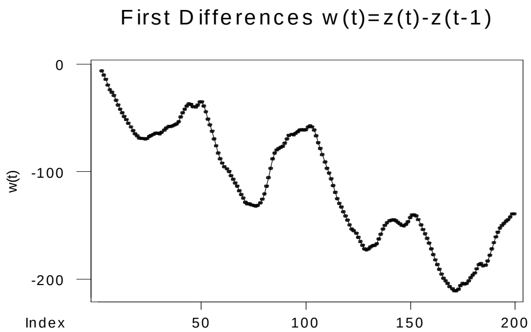

| Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.98 | 13.93 | 196.91 |
| 2 | 0.97 | 8.00 | 388.73 |
| 3 | 0.95 | 6.15 | 575.44 |
| 4 | 0.94 | 5.15 | 757.06 |
| 5 | 0.92 | 4.50 | 933.59 |
| 6 | 0.91 | 4.04 | 1105.06 |
| 7 | 0.89 | 3.68 | 1271.47 |
| 8 | 0.88 | 3.39 | 1432.85 |
| 9 | 0.86 | 3.15 | 1589.23 |
| 10 | 0.84 | 2.95 | 1740.66 |
| 11 | 0.83 | 2.78 | 1887.17 |
| 12 | 0.81 | 2.62 | 2028.81 |
| 13 | 0.80 | 2.49 | 2165.64 |
| 14 | 0.78 | 2.37 | 2297.73 |
| 15 | 0.76 | 2.25 | 2425.14 |
| 16 | 0.75 | 2.15 | 2547.94 |
| 17 | 0.73 | 2.06 | 2666.22 |
| 18 | 0.72 | 1.97 | 2780.05 |
| 19 | 0.70 | 1.89 | 2889.51 |
| 20 | 0.68 | 1.82 | 2994.69 |
| 21 | 0.67 | 1.75 | 3095.67 |
| 22 | 0.65 | 1.68 | 3192.54 |
| 23 | 0.64 | 1.62 | 3285.39 |
| 24 | 0.62 | 1.56 | 3374.32 |
| 25 | 0.61 | 1.50 | 3459.42 |
| 26 | 0.59 | 1.45 | 3540.78 |
| 27 | 0.58 | 1.40 | 3618.50 |
| 28 | 0.56 | 1.35 | 3692.67 |
| 29 | 0.55 | 1.30 | 3763.38 |
| 30 | 0.53 | 1.26 | 3830.74 |
| 31 | 0.52 | 1.21 | 3894.84 |
| 32 | 0.50 | 1.17 | 3955.76 |
| 33 | 0.49 | 1.13 | 4013.61 |
| 34 | 0.47 | 1.09 | 4068.47 |
| 35 | 0.46 | 1.05 | 4120.44 |
| 36 | 0.45 | 1.01 | 4169.59 |
| 37 | 0.43 | 0.98 | 4216.02 |
| 38 | 0.42 | 0.94 | 4259.81 |
| 39 | 0.41 | 0.91 | 4301.04 |
| 40 | 0.39 | 0.87 | 4339.79 |
| 41 | 0.38 | 0.84 | 4376.14 |
| 42 | 0.36 | 0.81 | 4410.16 |
| 43 | 0.35 | 0.77 | 4441.93 |
| 44 | 0.34 | 0.74 | 4471.52 |
| 45 | 0.32 | 0.71 | 4498.99 |
| 46 | 0.31 | 0.68 | 4524.43 |
| 47 | 0.30 | 0.65 | 4547.90 |
| 48 | 0.28 | 0.62 | 4569.48 |
| 49 | 0.27 | 0.59 | 4589.24 |
| 50 | 0.26 | 0.56 | 4607.24 |



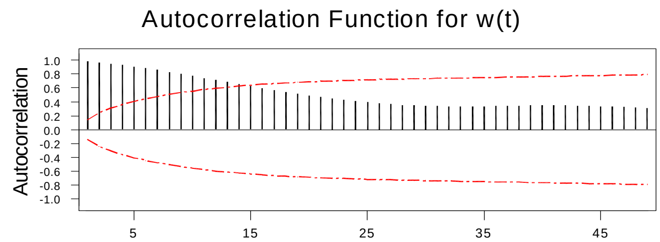

| Lag | PAC | T |
|---|---|---|
| 1 | 0.98 | 13.93 |
| 2 | -0.01 | -0.17 |
| 3 | -0.01 | -0.17 |
| 4 | -0.01 | -0.16 |
| 5 | -0.01 | -0.16 |
| 6 | -0.01 | -0.16 |
| 7 | -0.01 | -0.15 |
| 8 | -0.01 | -0.15 |
| 9 | -0.01 | -0.15 |
| 10 | -0.01 | -0.14 |
| 11 | -0.01 | -0.14 |
| 12 | -0.01 | -0.13 |
| 13 | -0.01 | -0.13 |
| 14 | -0.01 | -0.12 |
| 15 | -0.01 | -0.12 |
| 16 | -0.01 | -0.11 |
| 17 | -0.01 | -0.11 |
| 18 | -0.01 | -0.11 |
| 19 | -0.01 | -0.11 |
| 20 | -0.01 | -0.10 |
| 21 | -0.01 | -0.10 |
| 22 | -0.01 | -0.09 |
| 23 | -0.01 | -0.09 |
| 24 | -0.01 | -0.09 |
| 25 | -0.01 | -0.09 |
| 26 | -0.01 | -0.09 |
| 27 | -0.01 | -0.09 |
| 28 | -0.01 | -0.08 |
| 29 | -0.01 | -0.08 |
| 30 | -0.01 | -0.08 |
| 31 | -0.01 | -0.08 |
| 32 | -0.01 | -0.08 |
| 33 | -0.01 | -0.08 |
| 34 | -0.01 | -0.08 |
| 35 | -0.01 | -0.09 |
| 36 | -0.01 | -0.09 |
| 37 | -0.01 | -0.09 |
| 38 | -0.01 | -0.09 |
| 39 | -0.01 | -0.10 |
| 40 | -0.01 | -0.10 |
| 41 | -0.01 | -0.11 |
| 42 | -0.01 | -0.11 |
| 43 | -0.01 | -0.12 |
| 44 | -0.01 | -0.12 |
| 45 | -0.01 | -0.12 |
| 46 | -0.01 | -0.13 |
| 47 | -0.01 | -0.13 |
| 48 | -0.01 | -0.13 |
| 49 | -0.01 | -0.14 |
| 50 | -0.01 | -0.14 |

واضح جدا ان المتسلسلة $z_t$ غير مستقرة في المتوسط.

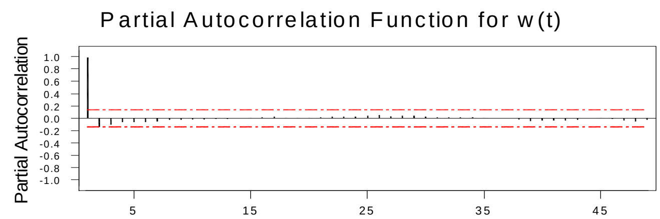
نأخذ الفروق الاولى $w_t = z_t - z_{t-1}$ ونرسمها




التر ابطات الذاتية والتر ابطات الذاتية الجزئية للمتسلسلة المفرقة هي:



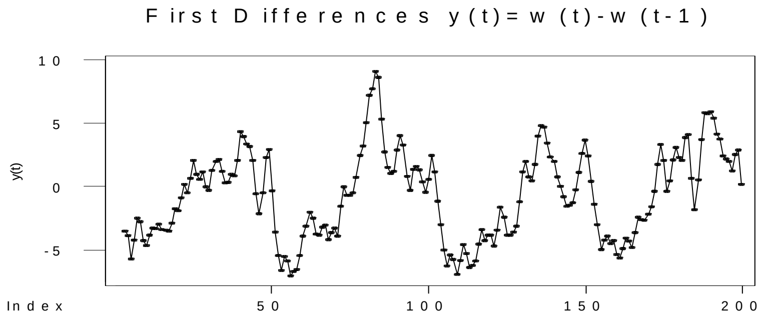

| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.99 | 13.93 | 197.10 | 13 | 0.69 | 2.21 | 1983.03 | 25 | 0.39 | 1.08 | 2701.91 | 37 | 0.34 | 0.90 | 3047.50 | 49 | 0.31 | 0.76 | 3399.16 |
| 2 | 0.97 | 7.98 | 389.03 | 14 | 0.66 | 2.07 | 2076.38 | 26 | 0.38 | 1.03 | 2734.99 | 38 | 0.35 | 0.90 | 3077.32 | | | | |
| 3 | 0.95 | 6.12 | 574.74 | 15 | 0.63 | 1.93 | 2161.98 | 27 | 0.37 | 1.00 | 2766.16 | 39 | 0.35 | 0.90 | 3107.68 | | | | |
| 4 | 0.93 | 5.10 | 753.55 | 16 | 0.60 | 1.82 | 2240.33 | 28 | 0.36 | 0.96 | 2795.84 | 40 | 0.35 | 0.90 | 3138.42 | | | | |
| 5 | 0.91 | 4.43 | 924.81 | 17 | 0.57 | 1.70 | 2311.99 | 29 | 0.35 | 0.94 | 2824.46 | 41 | 0.35 | 0.90 | 3169.33 | | | | |
| 6 | 0.89 | 3.94 | 1087.93 | 18 | 0.54 | 1.60 | 2377.42 | 30 | 0.34 | 0.92 | 2852.35 | 42 | 0.35 | 0.89 | 3200.21 | | | | |
| 7 | 0.86 | 3.56 | 1242.44 | 19 | 0.52 | 1.50 | 2437.13 | 31 | 0.34 | 0.91 | 2879.79 | 43 | 0.35 | 0.88 | 3230.81 | | | | |
| 8 | 0.83 | 3.25 | 1388.10 | 20 | 0.49 | 1.41 | 2491.57 | 32 | 0.34 | 0.90 | 2907.03 | 44 | 0.34 | 0.87 | 3260.99 | | | | |
| 9 | 0.81 | 2.98 | 1524.83 | 21 | 0.47 | 1.33 | 2541.23 | 33 | 0.34 | 0.89 | 2934.32 | 45 | 0.34 | 0.85 | 3290.64 | | | | |
| 10 | 0.78 | 2.76 | 1652.58 | 22 | 0.45 | 1.26 | 2586.61 | 34 | 0.34 | 0.89 | 2961.85 | 46 | 0.33 | 0.84 | 3319.59 | | | | |
| 11 | 0.75 | 2.56 | 1771.42 | 23 | 0.43 | 1.19 | 2628.22 | 35 | 0.34 | 0.89 | 2989.82 | 47 | 0.33 | 0.82 | 3347.55 | | | | |
| 12 | 0.72 | 2.38 | 1881.49 | 24 | 0.41 | 1.13 | 2666.48 | 36 | 0.34 | 0.89 | 3018.34 | 48 | 0.32 | 0.79 | 3374.17 | | | | |



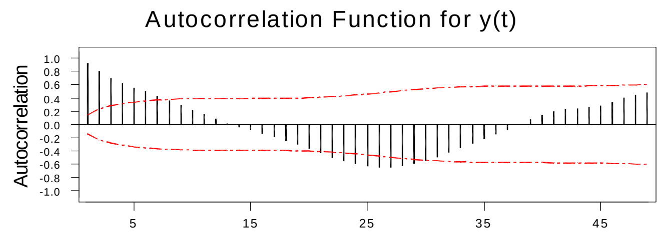

| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.99 | 13.93 | 13 | -0.01 | -0.16 | 25 | 0.04 | 0.52 | 37 | -0.01 | -0.07 | 49 | -0.03 | -0.48 |
| 2 | -0.14 | -1.97 | 14 | -0.00 | -0.02 | 26 | 0.04 | 0.62 | 38 | -0.02 | -0.29 | | | |
| 3 | -0.11 | -1.51 | 15 | 0.01 | 0.10 | 27 | 0.03 | 0.47 | 39 | -0.04 | -0.63 | | | |
| 4 | -0.07 | -0.96 | 16 | 0.02 | 0.23 | 28 | 0.04 | 0.55 | 40 | -0.04 | -0.60 | | | |
| 5 | -0.06 | -0.90 | 17 | 0.02 | 0.25 | 29 | 0.04 | 0.56 | 41 | -0.04 | -0.54 | | | |
| 6 | -0.07 | -0.97 | 18 | 0.01 | 0.10 | 30 | 0.02 | 0.34 | 42 | -0.04 | -0.55 | | | |
| 7 | -0.06 | -0.78 | 19 | 0.01 | 0.12 | 31 | 0.02 | 0.22 | 43 | -0.03 | -0.42 | | | |
| 8 | -0.03 | -0.48 | 20 | 0.01 | 0.11 | 32 | 0.01 | 0.16 | 44 | -0.00 | -0.07 | | | |
| 9 | -0.03 | -0.37 | 21 | 0.01 | 0.16 | 33 | 0.01 | 0.18 | 45 | 0.01 | 0.08 | | | |
| 10 | -0.03 | -0.37 | 22 | 0.03 | 0.35 | 34 | 0.01 | 0.15 | 46 | -0.01 | -0.18 | | | |
| 11 | -0.02 | -0.34 | 23 | 0.02 | 0.31 | 35 | 0.00 | 0.04 | 47 | -0.04 | -0.56 | | | |
| 12 | -0.02 | -0.22 | 24 | 0.02 | 0.27 | 36 | -0.00 | -0.07 | 48 | -0.05 | -0.76 | | | |

واضح جدا ان المتسلسلة $w_t$ لاتزال غير مستقرة في المتوسط.

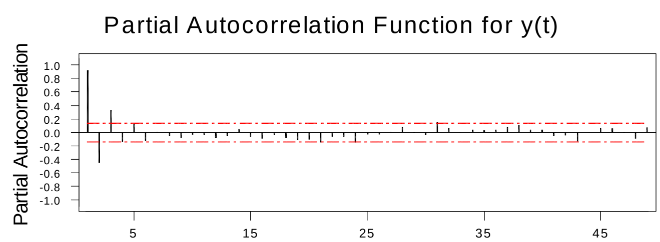
نأخذ الفروق الاولى $y_t = w_t - w_{t-1}$ (لاحظ ان هذا الفرق الثاني للمتسلسلة الأصلية) ونرسمها




التر ابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية لهذه المتسلسلة المفرقة هي:




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.93 | 13.08 | 173.62 | 13 | 0.01 | 0.06 | 693.85 | 25 | -0.64 | -2.73 | 1124.21 | 37 | -0.09 | -0.30 | 1748.28 | 49 | 0.48 | 1.56 | 2017.77 |
| 2 | 0.80 | 6.83 | 303.36 | 14 | -0.05 | -0.23 | 694.31 | 26 | -0.66 | -2.72 | 1224.05 | 38 | -0.01 | -0.03 | 1748.29 | | | | |
| 3 | 0.70 | 4.89 | 401.81 | 15 | -0.09 | -0.46 | 696.12 | 27 | -0.66 | -2.62 | 1324.28 | 39 | 0.08 | 0.26 | 1749.70 | | | | |
| 4 | 0.62 | 3.89 | 479.62 | 16 | -0.14 | -0.70 | 700.34 | 28 | -0.63 | -2.44 | 1418.06 | 40 | 0.15 | 0.50 | 1755.14 | | | | |
| 5 | 0.56 | 3.26 | 542.93 | 17 | -0.19 | -0.97 | 708.51 | 29 | -0.59 | -2.22 | 1500.63 | 41 | 0.20 | 0.68 | 1765.20 | | | | |
| 6 | 0.50 | 2.77 | 593.77 | 18 | -0.25 | -1.24 | 722.16 | 30 | -0.55 | -2.01 | 1572.45 | 42 | 0.23 | 0.78 | 1778.55 | | | | |
| 7 | 0.43 | 2.32 | 632.35 | 19 | -0.31 | -1.53 | 743.30 | 31 | -0.50 | -1.80 | 1632.42 | 43 | 0.24 | 0.82 | 1793.44 | | | | |
| 8 | 0.36 | 1.90 | 659.84 | 20 | -0.37 | -1.83 | 774.40 | 32 | -0.43 | -1.53 | 1677.44 | 44 | 0.25 | 0.86 | 1810.08 | | | | |
| 9 | 0.29 | 1.50 | 677.66 | 21 | -0.44 | -2.13 | 818.29 | 33 | -0.36 | -1.25 | 1708.46 | 45 | 0.28 | 0.96 | 1831.09 | | | | |
| 10 | 0.22 | 1.11 | 687.71 | 22 | -0.51 | -2.40 | 876.73 | 34 | -0.29 | -1.00 | 1728.63 | 46 | 0.34 | 1.13 | 1860.92 | | | | |
| 11 | 0.15 | 0.75 | 692.41 | 23 | -0.56 | -2.57 | 948.00 | 35 | -0.22 | -0.76 | 1740.51 | 47 | 0.40 | 1.34 | 1903.36 | | | | |
| 12 | 0.08 | 0.41 | 693.82 | 24 | -0.60 | -2.67 | 1030.79 | 36 | -0.16 | -0.53 | 1746.42 | 48 | 0.45 | 1.49 | 1956.81 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.93 | 13.08 | 13 | -0.05 | -0.75 | 25 | -0.03 | -0.46 | 37 | 0.08 | 1.16 | 49 | 0.07 | 1.00 |
| 2 | -0.46 | -6.44 | 14 | 0.05 | 0.67 | 26 | -0.03 | -0.44 | 38 | 0.11 | 1.56 | | | |
| 3 | 0.33 | 4.71 | 15 | -0.07 | -0.95 | 27 | 0.00 | 0.04 | 39 | 0.04 | 0.51 | | | |
| 4 | -0.14 | -1.97 | 16 | -0.09 | -1.30 | 28 | 0.08 | 1.13 | 40 | 0.04 | 0.52 | | | |
| 5 | 0.12 | 1.72 | 17 | -0.04 | -0.55 | 29 | -0.01 | -0.14 | 41 | -0.05 | -0.74 | | | |
| 6 | -0.13 | -1.78 | 18 | -0.08 | -1.11 | 30 | -0.04 | -0.56 | 42 | -0.05 | -0.66 | | | |
| 7 | 0.00 | 0.01 | 19 | -0.12 | -1.71 | 31 | 0.15 | 2.17 | 43 | -0.14 | -1.95 | | | |
| 8 | -0.06 | -0.81 | 20 | -0.11 | -1.50 | 32 | 0.06 | 0.88 | 44 | -0.01 | -0.10 | | | |
| 9 | -0.08 | -1.11 | 21 | -0.15 | -2.12 | 33 | -0.00 | -0.05 | 45 | 0.07 | 0.92 | | | |
| 10 | -0.04 | -0.55 | 22 | -0.07 | -0.93 | 34 | 0.04 | 0.49 | 46 | 0.06 | 0.79 | | | |
| 11 | -0.04 | -0.58 | 23 | -0.06 | -0.87 | 35 | 0.03 | 0.46 | 47 | -0.01 | -0.17 | | | |
| 12 | -0.09 | -1.21 | 24 | -0.15 | -2.12 | 36 | 0.04 | 0.50 | 48 | -0.09 | -1.24 | | | |

نلاحظ من شكل المتسلسلة و الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية انها اصبحت مستقرة في المتوسط اي ان $d=2$ .

من انماط الترابطات الذاتية والترابطات الذاتية الجزئية نرى انها تتخامد من التخلف الأول مما يرشح نموذج ARIMA(1,2,1) للمتسلسلة الأصلية $z_t$ وسوف نطبق هذا النموذج بالأمر

```
MTB > ARIMA 1 2 1 'z(t)' 'RESI2' 'FITS2';
SUBC>   NoConstant;
SUBC>   Forecast 10 c4 c5 c6;
SUBC>  GACF;
SUBC>  GPACF;
SUBC>  GHistogram;
SUBC>  GNormalplot.
```

ARIMA Model

```
ARIMA model for z(t)

Estimates at each iteration
Iteration        SSE     Parameters
    0         2462.77    0.100    0.100
    1         1345.58    0.250   -0.050
    2         1170.63    0.203   -0.200
    3          984.83    0.182   -0.350
    4          782.47    0.200   -0.500
    5          560.15    0.278   -0.650
    6          363.93    0.428   -0.765
    7          259.20    0.578   -0.814
    8          202.76    0.728   -0.842
    9          185.51    0.861   -0.859
   10          185.36    0.873   -0.860
   11          185.36    0.875   -0.860
   12          185.36    0.875   -0.860
Relative change in each estimate less than  0.0010

Final Estimates of Parameters
Type          Coef       StDev         T
```

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AR | 1 | 0.8749 | 0.0353 | 24.75 |
| MA | 1 | -0.8599 | 0.0357 | -24.12 |

Differencing: 2 regular differences

Number of observations: Original series 200, after differencing 198

Residuals: SS = 183.717 (backforecasts excluded)

MS = 0.937 DF = 196

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

| Lag | 12 | 24 | 36 | 48 |
|---|---|---|---|---|
| Chi-Square | 3.9(DF=10) | 13.0(DF=22) | 33.1(DF=34) | 46.0(DF=46) |

Forecasts from period 200

| | | 95 Percent Limits | | |
|---|---|---|---|---|
| Period | Forecast | Lower | Upper | Actual |
| 201 | -22615.2 | -22617.1 | -22613.3 | |
| 202 | -22757.2 | -22764.6 | -22749.9 | |
| 203 | -22900.4 | -22917.2 | -22883.5 | |
| 204 | -23044.5 | -23075.3 | -23013.7 | |
| 205 | -23189.5 | -23238.8 | -23140.1 | |
| 206 | -23335.2 | -23407.8 | -23262.6 | |
| 207 | -23481.5 | -23582.1 | -23380.9 | |
| 208 | -23628.4 | -23761.8 | -23495.0 | |
| 209 | -23775.8 | -23946.7 | -23605.0 | |
| 210 | -23923.7 | -24136.6 | -23710.7 | |

النموذج المقترح هو

$$z_t = 0.875_{t-1} z + a_t - 0.859 a_{t-1}, \quad a_t \sim N\left(0, 0.937\right)$$

ومقدرات المعالم وإنحرافاتها المعيارية وقيمة إختبار $t$ هي

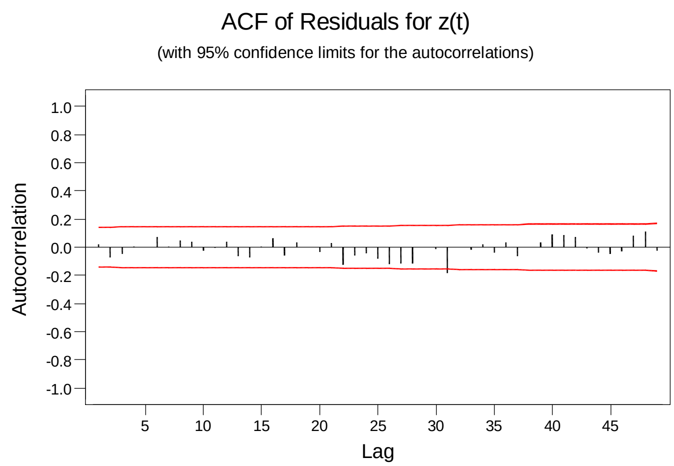
$$\hat{\phi}_1 = 0.8749, \quad s.e.\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.0353, \quad t = 24.75$$

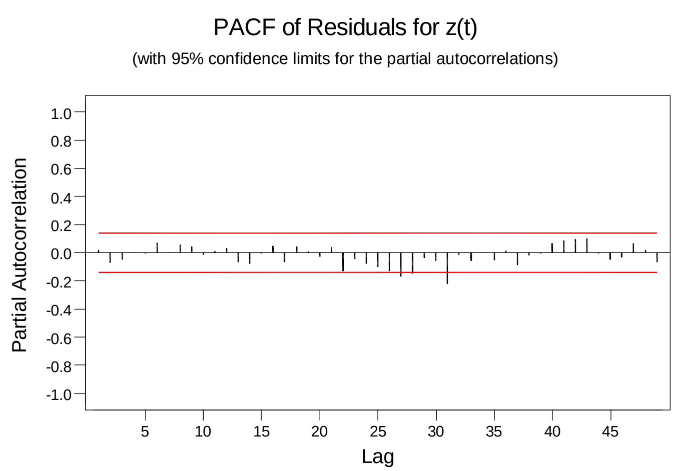
$$\hat{\theta}_1 = -0.8599, \quad s.e.\left(\hat{\theta}_1\right) = 0.0357, \quad t = -24.12$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.937, \quad with \quad d.f. = 196$$

نلاحظ ان المعالم معنوية.

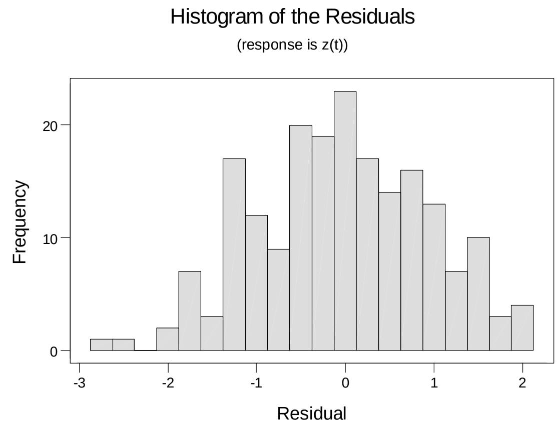
الآن نفحص البواقي:



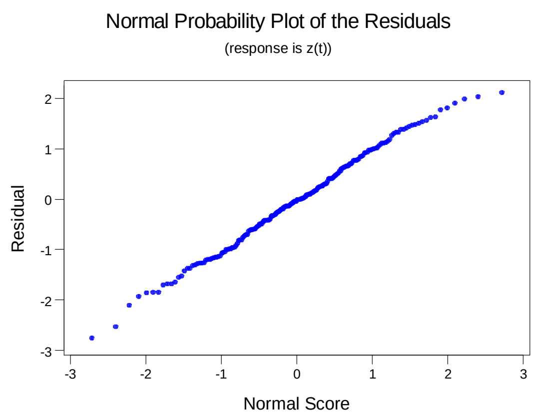

أنماط الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي للبواقي تدل على أن البواقي تتبع توزيع ضجة بيضاء أي غير مترابطة، لنفحص طبيعية البواقي:

رسم المدرج التكراري



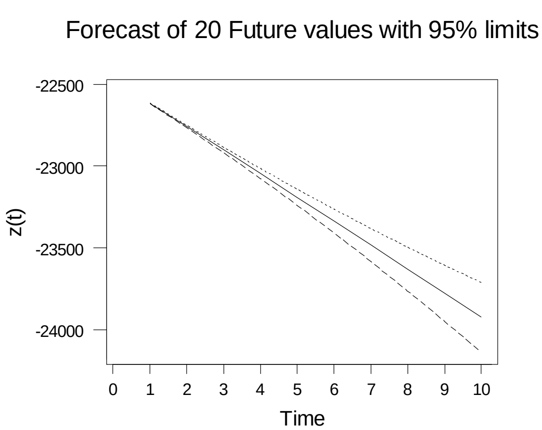

يبدو متناظر بعض الشيئ.

لننظر إلى مخطط الإحتمال الطبيعي للبواقي:




نستطيع أن نقول ان البواقي طبيعية تقريبا.

الرسم التالي لـ 10 تنبؤات للقيم المستقبلية مع 95% فترات تنبؤ.



# ملحق (1)

## أسئلة بعض الإختبارات السابقة وبعض الإجابات المحتملة عليها

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الاحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم جامعة الملك سعود

الاختبار النهائى للفصل الاول 1420/1419 هـ

المادة 221 بحث طرق التنبؤ الاحصائى

اجب على جميع الاسئلة التالية:

السؤال الاول:

البيانات التالية تمثل عدد السيارات المباعة اسبوعيا لدي موزع ما

| الاسبوع | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| العدد | 75 | 75 | 79 | 83 | 69 | 78 | 71 | 80 | 77 | 85 |

اوجد تنبؤات لعدد السيارات التى ستباع فى الاسبوعين التاليين واوجد فترات تنبؤ 95% لهذه التنبؤات كلما امكن ذلك باستخدام:

ا) نموذج انحدار خطى للعدد المباع مع الزمن بالاسابيع.

ب) التمهيد بواسطة متوسط متحرك من الدرجة الثالثة.

ج) التمهيد الاسى البسيط مستخدما $\alpha = 0.3$.

السؤال الثاني:

للنموذج $\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right) z_t=\delta+(1-\theta B) a_t$ حيث $a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$ و $\phi_1, \phi_2, \delta, \theta$ هى معالم النموذج و $B$ هو عامل الازاحة الخلفى اوجد:

ا) $E\left(z_t\right) \forall t$

ب) دالة الترابط الذاتى $\rho_k \ \forall k \geq 0$

ج) دالة الترابط الذاتى الجزئى $\phi_{kk} \ \forall k \geq 0$

د) دالة الاوزان $\psi_j \ \forall j \geq 0$

السؤال الثالث:

للنموذج $z_t = 38.5 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t - 0.4a_{t-1}$ حيث $a_t \sim WN(0,4)$ واذا كانت $t=10$ و $z_9 = 77$ و $z_{10} = 85$ و $a_{10} = -1.6$ اوجد:

ا) دالة التنبؤ التى لها ادنى متوسط مربع اخطاء

ب) تباين دالة اخطاء التنبؤ حتى زمن التقدم $\ell = 3$

ج) تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{11}$ و $z_{12}$

د) فترات تنبؤ 95% للتنبؤات السابقة

هـ) اذا علمت ان $z_{11} = 81$ فجدد التنبؤ للقيمه $z_{12}$ ولفترة تنبؤها.

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الاحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم جامعة الملك سعود

الاختبار النهائى للفصل الاول 1420/1419 هـ

المادة 221 بحث طرق التنبؤ الاحصائى

اجب على جميع الاسئلة التالية:

السؤال الاول:

البيانات التالية تمثل عدد السيارات المباعة اسبوعيا لدي موزع ما

| Week | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of cars | 75 | 75 | 79 | 83 | 69 | 78 | 71 | 80 | 77 | 85 |

اوجد تنبؤات لعدد السيارات التى ستباع فى الاسبوعين التاليين واوجد فترات تنبؤ 95% لهذه التنبؤات كلما امكن ذلك باستخدام:

ا) نموذج انحدار خطى للعدد المباع مع الزمن بالاسابيع.

ب) التمهيد بواسطة متوسط متحرك من الدرجة الثالثة.

ج) التمهيد الاسى البسيط مستخدما $\alpha = 0.3$.

السؤال الثاني:

للنموذج $(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)z_t = \delta + (1-\theta B)a_t$ حيث $a_t \sim WN(0,\sigma^2)$ و $\phi_1,\phi_2,\delta,\theta$ هى معالم النموذج و $B$ هو عامل الازاحة الخلفى اوجد:

ا) $E(z_t)\ \forall t$

ب) دالة الترابط الذاتى $\rho_k\ \forall k \ge 0$

ج) دالة الترابط الذاتى الجزئى $\phi_{kk}\ \forall k \ge 0$

د) دالة الاوزان $\psi_j\ \forall j \ge 0$

السؤال الثالث:

للنموذج $z_t = 38.5 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t - 0.4a_{t-1}$ حيث $a_t \sim WN(0,4)$ واذا كانت $t = 10$ و $z_9 = 77$ و $z_{10} = 85$ و $a_{10} = -1.6$ اوجد:

ا) دالة التنبؤ التى لها ادنى متوسط مربع اخطاء

ب) تباين دالة اخطاء التنبؤ حتى زمن التقدم $\ell = 3$

ج) تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{11}$ و $z_{12}$

د) فترات تنبؤ 95% للتنبؤات السابقة

هـــ) اذا علمت ان $z_{11} = 81$ فجدد التنبؤ للقيمه $z_{12}$ ولفترة التنبؤ

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الأول 1420-1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: لمتسلسة زمنية $\{z_t\}$

1- أذكر شروط الإستقرار

2- عرف دالة الترابط الذاتي

السؤال الثاني: للمتسلسة التالية

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_t$ | 53 | 43 | 66 | 48 | 52 | 42 | 44 | 56 | 44 | 58 | 41 | 54 | 51 | 56 | 38 |

1- طبق خط إنحدار بين $(t, z_t)$ ومن ثم أوجد $z_{16}, z_{17}$

2- طبق متوسط متحرك من الدرجة الثالثة ومن ثم أوجد $z_{16}, z_{17}$

3- طبق تمهيد اسي بسيط $\alpha = 0.5$ ومن ثم أوجد $z_{16}, z_{17}$

4- إذا كانت $z_{16} = 56$ و $z_{17} = 49$ فأي من الطرق السابقة أكثر دقة وذلك بإستخدام معيار خطأ مناسب

السؤال الثالث:

للنموذج $z_t = 20 - 0.9z_{t-1} + a_t \quad , a_t \sim WN(0,4)$

1- هل النموذج مستقر؟

2- أوجد $\mu$

3- أوجد $\rho_k$ و $\phi_{kk}$ لقيم $k = 0,1,2,...,5$

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار النهائي للفصل الثاني1420−1421 هـ

الزمن : أربع ساعات

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: ( 20 علامة )

أكمل الفراغات التالية:

1) لمتسلسلة زمنية $\{Z_t\}$ دالة التغاير الذاتي تعطى بالعلاقة $\gamma_k = Cov\left(Z_t, Z_{\square}\right)$ ودالة الترابط الذاتي بالعلاقة $\rho_k = \gamma_k \big/ \square$ ولها الخواص $\rho_0 = \square$ و $\left|\rho_k\right| \square 1$ و $\rho_k = \rho_{\square}$ ( 5 علامات )

2) لمتسلسلة زمنية مشاهدة $z_1, z_2, \cdots, z_n$ دالة الترابط الذاتي للعينة تقدر من العلاقة $r_k = \sum_{i=1}^{\square}\left(z_t - \overline{z}\right)\left(z_{t+k} - \overline{z}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(z_t - \overline{z}\right)^{\square}, k = 0,1,\cdots$ و الإنحراف المعياري لدالة الترابط الذاتي للعينة تقدر من العلاقة $s.e\left(r_k\right) \simeq 1 \big/ \sqrt{\square}$ كما ان دالة الترابط الذاتي الجزئي للعينة تقدر من العلاقة

$$r_{k+1,k+1} = \frac{r_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} r_{kj} r_{\square}}{1 - \sum_{j=1}^{k} r_{\square} r_j}$$

و العلاقة المساعدة $r_{k+1,j} = r_{kj} - r_{k+1,k+1} r_{k,\square}, j = 1, \ldots, \square$ ولها حدود حرجة $\pm \frac{\square}{\sqrt{n}}$ ( 8 علامات )

3) نموذج $AR\left(\square\right)$ يعطى بالعلاقة $\left(1-\phi_1\square-\phi_2\square^2\right)Z_t=a_t\,,\,a_t\sim WN\left(\square,\square\right)$ و الذي يكتب علي الشكل $Z_t=\delta+\phi_1\square+\phi_2\square+a_t$ ( 7 علامات )

<u>السؤال الثاني:</u> ( 40 علامة )

البيانات التالية هي حجم المبيعات اليومية لشركة ما بآلاف الريالات: (إقرأ من اليسار لليمين)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 29.3 | 20.0 | 25.8 | 29.0 | 31.0 | 32.7 | 33.6 |
| | | | | 27.5 | 26.8 | 30.6 |
| 28.9 | 28.5 | 28.2 | 26.1 | 27.8 | 27.6 | 29.9 |
| | | | | 28.2 | 26.7 | 30.0 |
| 30.8 | 30.5 | 36.6 | 31.4 | 30.8 | 33.2 | 30.2 |
| | | | | 27.1 | 33.7 | 36.6 |
| 29.0 | 28.1 | 30.3 | 29.4 | 33.6 | 30.3 | 20.1 |
| | | | | 17.5 | 23.7 | 24.2 |
| 32.4 | 32.4 | 29.4 | 23.5 | 23.6 | 28.1 | 29.9 |
| | | | | 30.6 | 32.3 | 31.6 |
| 28.0 | 24.1 | 29.2 | 34.3 | 26.4 | 28.8 | 21.3 |
| | | | | 21.7 | 21.5 | 24.7 |
| 33.6 | 36.5 | 35.7 | 33.7 | 29.3 | 25.1 | 27.2 |
| | | | | 30.6 | 29.1 | 28.5 |
| 32.0 | 31.9 | 31.7 | 29.0 | 31.9 | 24.3 | 22.7 |
| | | | | 26.6 | 28.9 | 28.3 |
| 28.2 | 28.6 | 30.7 | 30.6 | 20.8 | 16.6 | 25.2 |
| | | | | 31.8 | 32.5 | 30.3 |
| 26.1 | 19.0 | 24.3 | 31.5 | 32.0 | 31.7 | 29.1 |
| | | | | | | 23.2 |

1) بإستخدام الأمرين %acf و %pacf في *Minitab* تعرف علي النموذج من عائلة النماذج $ARIMA(p,d,q)$ والذي تتبعه البيانات ( 7 علامات )

2) أوجد مقدرات أولية لمعالم النموذج المتعرف عليه بطريقة العزوم وطريقة المربعات الدنيا الشرطية ( 9 علامات )

3) بإستخدام مقدرات المعالم بطريقة المربعات الدنيا الشرطية أو العزوم أكتب النموذج علي الشكل $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$ حيث $a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$ ( 4 علامات )

4) أوجد دالة التنبؤ للنموذج ومن ثم أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $Z_{99}$ و $Z_{100}$ وإذا علمت أن $\sigma^2 = 10.83$ فاوجد فترات تنبؤ 95% للقيم المستقبلية $Z_{99}$ و $Z_{100}$ (10 علامات )

5) إذا علمت أن $z_{99} = 26.7$ فجدد التنبؤ للقيمة المستقبلية $Z_{100}$ وإذا كانت $z_{100} = 32.4$ فهل التنبؤ أفضل قبل ام بعد التجديد ؟ ( 5 علامات )

6) بإستخدام الأمر arima p d q C1 والأوامر الفرعية forecast 5 C2 C3 C4 و gseries و gacf و gpacf و ghist و gnormal و gfit تحقق و قارن مع نتائجك في الفقرات السابقة. ( 5 علامات )

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

إختبار الفصل الأول 1421هـ/1422هـ

لمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي )

الزمن 3 ساعات

<u>أجب على جميع الأسئلة التالية:</u>

<u>السؤال الأول:</u>

1- عرف التالي بإختصار: الضجة البيضاء، الترابط الذاتي، التمهيد، الإستقرار

2- اكتب المعادلات المعرفة للنماذج التالية: AR(2), MA(1), ARMA(1,2)

ج) لنموذج AR(2) أي من المعالم التالية تحقق الإستقرار:

1) $\phi_1 = 1.2, \phi_2 = -0.8$

2) $\phi_1 = -1.2, \phi_2 = -0.8$

3) $\phi_1 = 0.8, \phi_2 = -0.8$

4) $\phi_1 = -0.8, \phi_2 = 1.2$

<u>السؤال الثاني:</u>

البيانات التالية تمثل مبيعات أجهزة الحاسب في أحد الشركات شهريا ( إقرأ من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **26** | **21** | **16** | **28** | **27** | **19** |
| **21** | **26** | **25** | **16** | **20** | **25** |
| **25** | **21** | **23** | **26** | **21** | **23** |
| | | | | **17** | **25** |

1- أدخل البيانات في ورقة عمل للبرنامج Minitab و أرسمها كمتسلسة زمنية.

2- طبق على البيانات النماذج التالية:

i) Linear Trend Model

ii) Simple Moving Average Model of order 3

iii) Simple Exponential Smoothing Model with $\alpha$=0.3

ج) طبق على البيانات نموذج من عائلة $ARMA(p,q)$ وذلك بالتعرف على $p,q$ المناسبة ومن ثم قدر المعالم للنموذج المقترح.

د) أي نموذج من النماذج السابقة ( في الفقرتين ب و ج ) يصف المشاهدات بشكل أفضل؟

هـ) بإستخدام النموذج الأفضل ولد تنبؤات للشهرين التاليين بفترات تنبؤ 95%

**بسم الله الرحمن الرحيم**

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الثاني 1422/1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: شوهدت المتسلسلة الزمنية التالية: (إقرا من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 47 | 64 | 23 | 71 | 38 |
| | | | 64 | 55 |
| 41 | 59 | 48 | 71 | 35 |
| | | | 57 | 40 |
| 58 | 44 | 80 | 55 | 37 |
| | | | 74 | 51 |
| 57 | 50 | 60 | 45 | 57 |
| | | | 50 | 45 |
| 25 | 59 | 50 | 71 | 56 |
| | | | 74 | 50 |
| 58 | 45 | 54 | 36 | 54 |
| | | | 48 | 55 |
| 45 | 57 | 50 | 62 | 44 |
| | | | 64 | 43 |
| 52 | 38 | 59 | 55 | 41 |
| | | | 53 | 49 |
| 34 | 35 | 54 | 45 | 68 |
| | | | 38 | 50 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 39 | 59 | 40 | 57 |
| | | | 54 | 23 |

أدخل المشاهدات في صحيفة عمل Worksheet في برنامج Minitab وأجب على التالي:

(أ) إفحص المشاهدات بواسطة Tsplot هل تبدو المتسلسلة مستقرة؟ لماذا؟ (علامة واحدة)

(ب) هل نستخدم طريقة تحليل الإنجراف Trend Analysis لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(ج) هل نستخدم طريقة التفكيك Decomposition Method لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(د) هل نستخدم طريقة التمهيد بالمتوسط المتحرك Moving Average Smoothing لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(هـ) هل نستخدم طريقة التمهيد الاسي البسيط Simple Exponential Smoothing لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

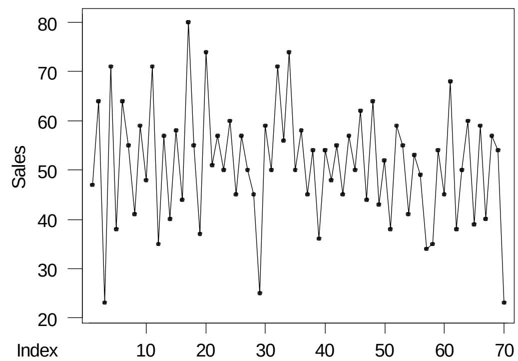
(و) هل نستخدم طريقة التمهيد الاسي الثنائي Double Exponential Smoothing لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

(ز) هل نستخدم طريقة ونترز Winters’ Method لهذه المتسلسلة؟ ولماذا؟ (علامة واحدة)

السؤال الثاني: من السؤال السابق توجد طريقة واحدة فقط هي الأنسب لتحليل المتسلسلة الزمنية المشاهدة! بإستخدام الطريقة المناسبة أوجد تنبوات لخمسة قيم مستقبلية مع فترات تنبؤ 95% . (8 علامات)

إجابة السؤال الأول:

(أ)




المتسلسلة تبدو مستقرة حيث انها تتغير حول مستوى ثابت

(ب) يمكن إستخدام طريقة تحليل الإنجرف ولكنها غير مناسبة هنا لعدم وجود إتجاه معين تتجه له المتسلسلة

(ج) يمكن إستخدام طريقة التفكيك ولكنها تناسب أكثر المتسلسلات التي فيها مركبات إنجراف و موسمية

(د) يناسب التمهيد بالمتوسط المتحرك هذا النوع من المتسلسلات الزمنية أكثر من غيره من الطرق لأنه كما نرى هذه المتسلسلة تحتاج إلى تمهيد بسيط إذ ليس بها أي إنجراف أو موسمية

(هـ) التمهيد الاسي البسيط ينفع لمثل هذه المتسلسلات أيضا وخاصة إذا كانت تحوي إنجرافا بسيط

(و) التمهيد الاسي الثنائي يفيد أكثر في حالة المتسلسلات التي تحوي إنجرافا غير خطي والذي لايبدو من تصرف المتسلسة المشاهدة

(ز) طريقة ونترز تنفع للمتسلسلات الموسمية التي تحوي على مركبة إنجراف غير خطي

إجابة السؤال الثاني:

يبدو أن طريقة التمهيد بالمتوسط المتحرك هي الأكثر مناسبة لتحليل المتسلسلة المشاهدة. لنجرب عدة متوسطات متحركة لتمهيد المتسلسلة وإيجاد تنبؤات لها.

(1) لنجرب متوسط متحرك من الدرجة الثانية (ممركز):

```
MTB > %MA 'Sales' 2;
```

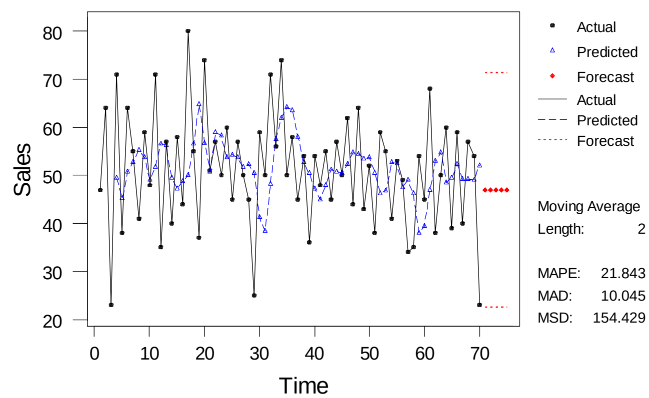
```
SUBC>  Center;
SUBC>   Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data          Sales
Length      70.0000
NMissing    0

Moving Average
Length: 2

Accuracy Measures
MAPE:   21.843
MAD:    10.045
MSD:   154.429
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 2 | 72 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 3 | 73 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 4 | 74 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |
| 5 | 75 | 47 | 22.6432 | 71.3568 |

Moving Average



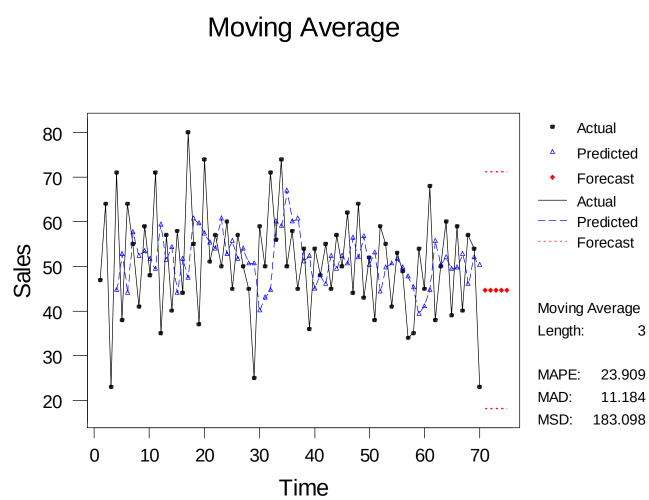

(2) لنجرب متوسط متحرك من الدرجة الثالثة:

```
MTB > %MA 'Sales' 3;
SUBC>   Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data          Sales
Length      70.0000
NMissing          0

Moving Average
Length: 3

Accuracy Measures
MAPE:   23.909
MAD:    11.184
MSD:   183.098
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 2 | 72 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 3 | 73 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 4 | 74 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |
| 5 | 75 | 44.6667 | 18.1452 | 71.1881 |




(3) لنجرب متوسط متحرك من الدرجة الرابعة (ممركز):

```
MTB > %MA 'Sales' 4;
SUBC>  Center;
SUBC>   Forecasts 5.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

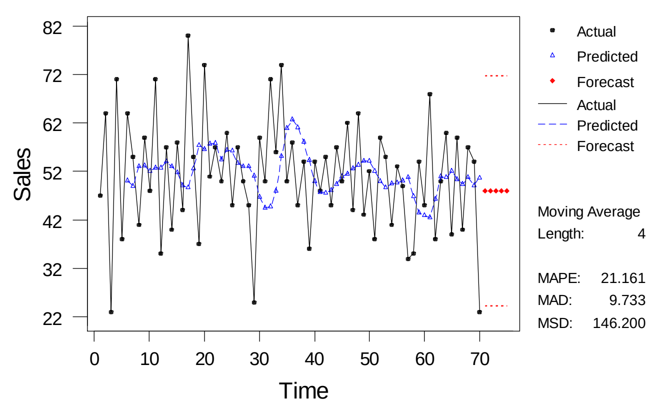
**Moving average**

Data        Sales

```
Length       70.0000
      NMissing    0

  Moving Average
  Length: 4

  Accuracy Measures
  MAPE:   21.161
  MAD:     9.733
  MSD:   146.200
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 2 | 72 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 3 | 73 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 4 | 74 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 5 | 75 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |

Moving Average




(4) أخيرا نجرب متوسط متحرك من الدرجة الخامسة:

```
MTB > %MA 'Sales' 5;
SUBC>   Forecasts 5.
```

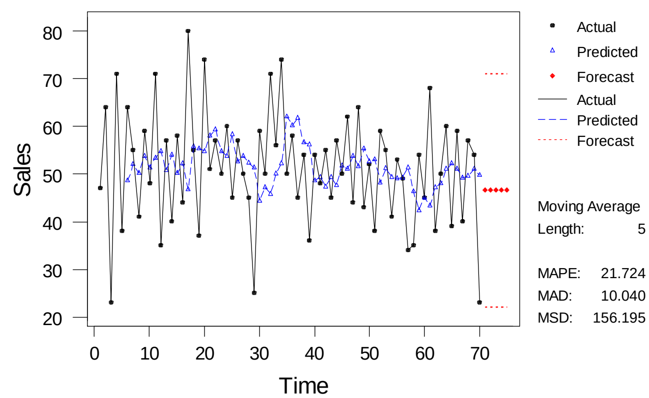
```
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

```
Data        Sales
Length      70.0000
NMissing    0

Moving Average
Length: 5

Accuracy Measures
MAPE:   21.724
MAD:    10.040
MSD:   156.195
```

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 2 | 72 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 3 | 73 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 4 | 74 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |
| 5 | 75 | 46.6 | 22.1043 | 71.0957 |

Moving Average




من النتائج السابقة نجد أن المتوسط المتحرط من الدرجة الرابعة المركز يعطي أقل قيمة لـ (MSD (Mean Square Deviation تساوي 146.2

التنبؤات للخمسة قيم المستقبلية مع فترات تنبؤ 95% هي

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 71 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 2 | 72 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 3 | 73 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 4 | 74 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |
| 5 | 75 | 48 | 24.3010 | 71.6990 |

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم

جامعة الملك سعود

الإختبار الثاني لأعمال الفصل الثاني 1422/1421 هـ

لمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي )

الزمن: 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$\left(1-1.2B+0.6B^2\right)\left(z_t-65\right)=\left(1-0.4B\right)a_t,\ a_t\sim WN\left(0,1\right)$$

(أ) تحقق من ان النموذج مستقر وقابل للإنقلاب.

(ب) أوجد كل من $\rho_k$ و $\phi_{kk}$ لقيم $k=1,2,\ldots,5$.

(ج) أوجد دالة الأوزان $\psi_j$ لقيم $j=1,2,\ldots,5$.

السؤال الثاني:

للنموذج السابق إذا علمت أن $z_{76}=60.4, z_{77}=58.9, z_{78}=64.7, z_{79}=70.4, z_{80}=62.6$.

(أ) أوجد تنبؤات للقيم المستقبلية $z_{81}, z_{82}, z_{83}, z_{84}$.

(ب) أوجد فترات تنبؤ 95% للتنبؤات في الفقرة السابقة.

السؤال الثالث:

للنموذج

$$\left(1-0.43B\right)\left(1-B\right)z_t=a_t,\ a_t\sim WN\left(0,1\right)$$

(أ) هل النموذج مستقر؟ ولماذا؟

(ب) إذا كانت $z_{49}=33.4, z_{50}=33.9$ فأحسب التنبؤات $z_{50}\left(\ell\right)$ لقيم $\ell=1,2,\ldots,5$.

(ج) أوجد فترات تنبؤ 95% للتنبؤات في الفقرة السابقة.

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات
كلية العلوم
جامعة الملك سعود

الإختبار النهائي للفصل الثاني 1422/1421 هـ
للمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي)
الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

طبقنا على متسلسلة مبيعات نموذج $ARIMA(1,1,0)$ التالي:

$$(1-0.7B)(1-B)z_t = a_t,\ \ a_t \sim WN(0,25)$$

المشاهدتين الأخيرة هي $z_{143}=770, z_{144}=800$

)أ) هل النموذج مستقر أم لا ولماذا؟

(ب) أوجد دالة الأوزان $\psi_j$ لقيم $j=1,2,...,5$ .

(ج) احسب التنبؤات للثلاث (3) القيم المستقبلية التالية.

(د) اوجد فترات تنبؤ 95% للتنبؤات السابقة.

السؤال الثاني:

للمتسلسلة الزمنية التالية : (إقرأ من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.49 | 5.74 | 5.51 | 3.99 | 3.45 | 4.77 | 4.14 |
| | | | | 4.60 | 3.80 | 5.43 |
| 3.96 | 2.54 | 4.05 | 6.16 | 3.78 | 5.07 | 5.42 |
| | | | | 3.91 | 4.30 | 3.88 |
| 2.89 | 4.61 | 4.08 | 4.05 | 3.28 | 2.65 | 1.22 |
| | | | | 3.98 | 3.45 | 3.57 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.52 | 1.58 | 4.00 | 5.14 | 3.84 | 4.40 | 3.08 |
| | | | | 5.43 | 4.80 | 2.75 |
| 5.77 | 4.99 | 4.31 | 6.46 | 6.11 | 4.79 | 5.65 |
| | | | | 5.52 | 6.12 | 6.06 |
| 3.20 | 5.05 | 6.23 | 6.12 | 4.99 | 4.89 | 4.78 |
| | | | | 5.67 | 6.08 | 5.80 |
| 5.13 | 7.07 | 8.02 | 6.36 | 5.75 | 5.70 | 5.61 |
| | | | | 5.63 | 5.71 | 5.16 |
| 7.20 | 6.87 | 7.56 | 6.57 | 6.08 | 4.72 | 6.09 |
| | | | | 6.64 | 7.49 | 6.64 |
| 7.26 | 7.22 | 6.69 | 7.49 | 9.01 | 7.27 | 5.62 |
| | | | | 7.59 | 7.53 | 6.43 |
| 6.42 | 8.22 | 7.67 | 7.53 | 7.23 | 8.50 | 8.27 |
| | | | | 8.75 | 7.50 | 7.86 |

بإستخدام MINITAB أوجد التالي:

(أ) أرسم المتسلسلة الزمنية بإستخدام Time Series Plot .

(ب) أقترح طريقة لتمهيد المتسلسلة بعد فحص الرسم.

(ج) لكل طريقة مقترحة قم بفحص البواقي Residuals وأختبر الفرضية فيما إذا كانت البواقي موزعة توزيع طبيعي وذلك بإستخدام إختبار Kolmogorov-Smirnov Test .

(د) قارن معايير الدقة للأخطاء Mean Absolute Percentage Error (MAPE) و Mean Absolute Deviation (MAD) و Mean Squared Deviation (MSD) لكل طريقة مقترحة ومن ثم أستخدم الطريقة الأكثر دقة لتوليد تنبؤات للخمسة القيم المستقبلية مع إيجاد فترات تنبؤ 95% .

السؤال الثالث:

للمتسلسلة الزمنية التالية: (إقرأ من اليسار لليمين سطرا بسطر)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.20 | 1.50 | 1.54 | 2.70 | 1.95 | 2.40 |
| | | | | 3.44 | 2.83 |
| 1.76 | 2.00 | 2.09 | 1.89 | 1.80 | 1.25 |
| | | | | 1.58 | 2.25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.50 | 2.05 | 1.46 | 1.54 | 1.42 | 1.57 |
| | | | | 1.40 | 1.51 |
| 1.08 | 1.27 | 1.18 | 1.39 | 1.42 | 2.08 |
| | | | | 1.85 | 1.82 |
| 2.07 | 2.32 | 1.23 | 2.91 | 1.77 | 1.61 |
| | | | | 1.25 | 1.15 |
| | 1.37 | 1.79 | 1.68 | 1.78 | 1.84 |

بإستخدام MINITAB أوجد التالي:

(أ) أرسم المتسلسلة الزمنية بإستخدام Time Series Plot .

(ب) أوجد كل من SACF و SPACF ومنها أقترح نموذج مناسب من عائلة $ARIMA(p,d,q)$ وذلك بتعيين كل من $p$ و $d$ و $q$.

(ج) قدر المعالم للنموذج المقترح وأختبر الفرضيات فيما إذا كان أحد أو كل هذة المعالم مساويا للصفر.

(د) قم بفحص البواقي Residuals وأختبر الفرضية فيما إذا كانت البواقي موزعة توزيع طبيعي وذلك بإستخدام إختبار Kolmogorov-Smirnov Test .

(هـ) أحسب تنبؤات للخمسة القيم المستقبلية التالية مع إيجاد فترات تنبؤ 95% .

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات محتملة للإختبار النهائي للفصل الثاني 1422/1421 هـ

لمادة 221 بحث

إجابة السؤال الأول:

(أ) النموذج غير مستقر لأنه يحوى عامل التفريق $(1-B)$

(ب)

$$
\begin{aligned}
&(1-0.7B)(1-B)z_t = a_t\\
&(1-1.7B+0.7B^2)z_t = a_t\\
&\therefore z_t = \frac{1}{1-1.7B+0.7B^2}a_t\\
&\qquad = \psi(B)a_t\\
&\therefore \psi(B) = \frac{1}{1-1.7B+0.7B^2}\\
&\therefore (1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\psi_3 B^3+\cdots)(1-1.7B+0.7B^2) \equiv 0\\
&B:\psi_1 - 1.7 = 0 \Rightarrow \psi_1 = 1.7\\
&B^2:\psi_2 - 1.7\psi_1 + 0.7 = 0 \Rightarrow \psi_2 = 1.7\psi_1 - 0.7 = 2.19\\
&B^3:\psi_3 - 1.7\psi_2 + 0.7\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_3 = 1.7\psi_2 - 0.7\psi_1 = 2.53\\
&\vdots\\
&B^j:\psi_j - 1.7\psi_{j-1} + 0.7\psi_{j-2} = 0 \Rightarrow \psi_j = 1.7\psi_{j-1} + 0.7\psi_{j-2},\ j = 2,3,...\\
&\therefore \psi_4 = 1.7\psi_3 - 0.7\psi_2 = 2.768\\
&\quad \psi_5 = 1.7\psi_4 - 0.7\psi_3 = 2.9346
\end{aligned}
$$

إذا الأوزان المطلوبة هي: $\psi_1 = 1.7, \psi_2 = 2.19, \psi_3 = 2.53, \psi_4 = 2.77, \psi_5 = 2.93$

(ج) نحسب التنبوءات كالتالي:

$$\because \left(1-1.7B+0.7B^2\right)z_t = a_t$$
$$\therefore z_t = 1.7z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t$$
$$\therefore z_t(\ell) = E\left[z_{t+\ell}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right], \ell \geq 0$$
$$= E\left[1.7z_{t+\ell-1} - 0.7z_{t+\ell-2} + a_{t+\ell}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right], \ell \geq 0$$
$$= 1.7E\left[z_{t+\ell-1}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] - 0.7E\left[z_{t+\ell-2}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] + E\left[a_{t+\ell}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right], \ell \geq 0$$
$$\therefore \ell = 1: z_t(1) = 1.7E\left[z_t\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] - 0.7E\left[z_{t-1}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] + E\left[a_{t+1}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right]$$
$$= 1.7z_t - 0.7z_{t-1}$$
$$\ell = 2: z_t(2) = 1.7E\left[z_{t+1}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] - 0.7E\left[z_t\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] + E\left[a_{t+2}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right]$$
$$= 1.7z_t(1) - 0.7z_t$$
$$\ell = 3: z_t(3) = 1.7E\left[z_{t+2}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] - 0.7E\left[z_{t+1}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right] + E\left[a_{t+3}\middle|z_t, z_{t-1},\cdots\right]$$
$$= 1.7z_t(2) - 0.7z_t(1)$$
$$\therefore \ell \geq 3: z_t(\ell) = 1.7z_t(\ell-1) - 0.7z_t(\ell-2)$$
$$\because t = 144$$
$$\therefore z_{144}(1) = 1.7z_{144} - 0.7z_{143} = 1.7(800) - 0.7(770) = 821$$
$$z_{144}(2) = 1.7z_{144}(1) - 0.7z_{144} = 1.7(821) - 0.7(800) = 835.7$$
$$z_{144}(3) = 1.7z_{144}(2) - 0.7z_{144}(1) = 1.7(835.7) - 0.7(821) = 845.99$$

إذا التنبوءات للثلاث قيم المستقبلية هي:

$$z_{144}(1) = 821, \quad z_{144}(2) = 835.7, \quad z_{144}(3) = 845.99$$

(د) فترات $(1-\alpha)100\%$ تنبؤ تعطى بالعلاقة

$$\left[z_t(\ell) \pm u_{\alpha/2}\sqrt{V\left[e_t(\ell)\right]}\right], \ell \geq 0$$

حيث $u_{\alpha/2}$ هو المئين 95 للتوزيع الطبيعي القياسي وحيث ان $\alpha = 0.05$ فإن $u_{\alpha/2} = 1.96$ أي أن

$$z_{t+\ell} \in \left[z_t(\ell) \pm 1.96\sqrt{V\left[e_t(\ell)\right]}\right] \text{ w.p. } 0.95, \ell \geq 0$$

أولا نحسب تباينات أخطاء التنبؤ من العلاقة: $V\left[e_t(\ell)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2+\psi_2^2+\cdots+\psi_{\ell-1}^2\right), \ell \geq 0$

$$V\left[e_t(1)\right] = \sigma^2 = 25$$

$$V\left[e_t(2)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2\right) = 25\left(1+(1.7)^2\right) = 97.25$$

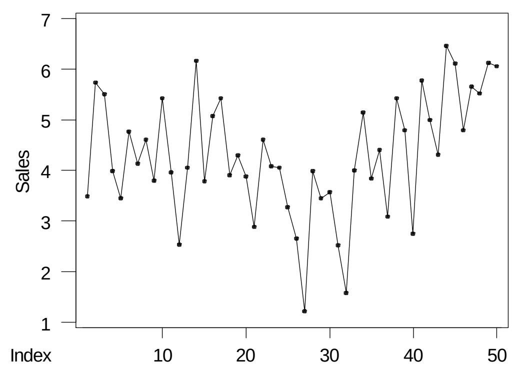
$$V\left[e_t(3)\right] = \sigma^2\left(1+\psi_1^2+\psi_2^2\right) = 25\left(1+(1.7)^2+(2.19)^2\right) = 217.1525$$

ومنها نجد فترات التنبؤ المطلوبة:

$$z_{145} \in \left[821 \pm 1.96\sqrt{25}\right] = [811.2, 830.8], w.p.\ 0.95$$
$$z_{146} \in \left[835.7 \pm 1.96\sqrt{97.25}\right] = [816.37, 855.03], w.p.\ 0.95$$
$$z_{145} \in \left[845.99 \pm 1.96\sqrt{217.1525}\right] = [817.11, 874.87], w.p.\ 0.95$$

إجابة للسؤال الثاني:

(أ)




(ب) من الرسم السابق نجد أن المتسلسلة غير موسمية ولذلك نستخدم في تمهيدها أحد الطرق التالية:

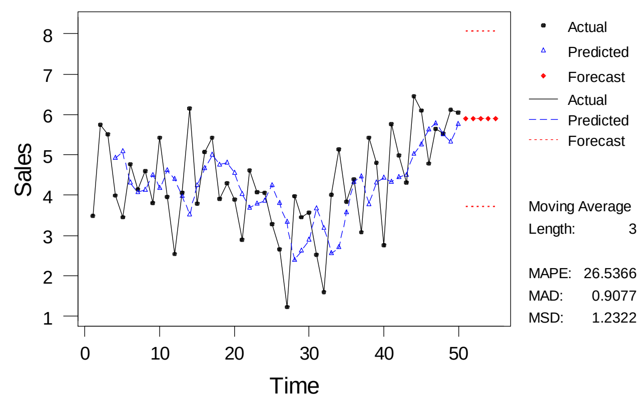
1- المتوسط المتحرك Moving Average Smoothing

2- التمهيد الأسي البسيط Single Exponential Smoothing

3- التمهيد الأسي الثنائي Double Exponential Smoothing

أولا المتوسط المتحرك

Smoothing Sales Series by Moving Avg. of Order 3




```
MTB > %MA 'Sales' 3;
SUBC>   Forecasts 5;
SUBC>   Title "Smoothing Sales Series by Moving
Avg. of Order 3";
SUBC>   Residuals 'RESI1'.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\MA.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Moving average**

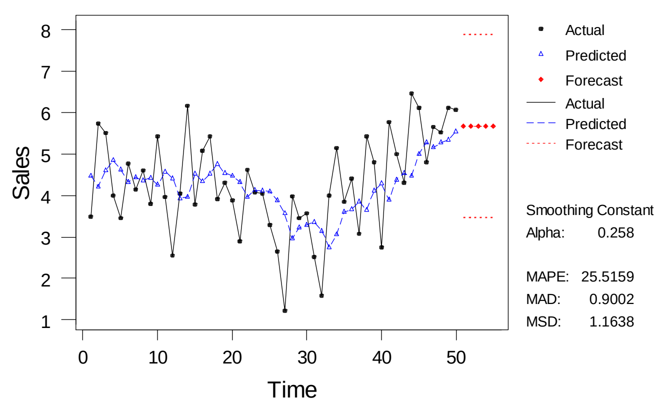
```
Data         Sales
Length     50.0000
NMissing         0

Moving Average
Length: 3

Accuracy Measures
MAPE: 26.5366
MAD:   0.9077
```

MSD:    1.2322

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 2 | 52 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 3 | 53 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 4 | 54 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |
| 5 | 55 | 5.9 | 3.72428 | 8.07572 |

ثانيا التمهيد الأسي البسيط

Smoothing Sales Series by Single Exponential Smoothing




```
MTB > %SES 'Sales';
SUBC>   Forecasts 5;
SUBC>   Title "Smoothing Sales Series by Single
Exponential Smoothing";
SUBC>   Residuals 'RESI2'.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\SES.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Single Exponential Smoothing**

| | |
|---|---|
| Data | Sales |
| Length | 50.0000 |
| NMissing | 0 |

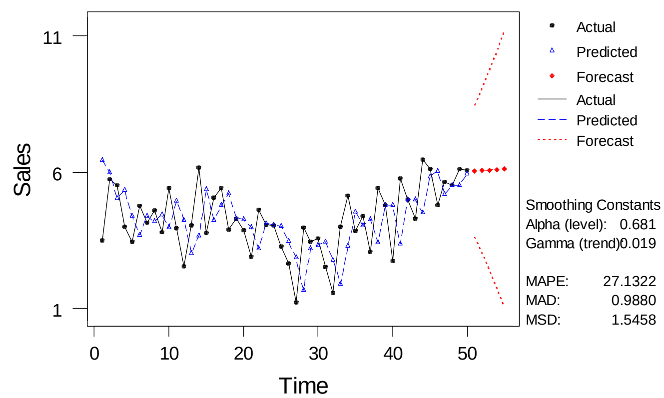
Smoothing Constant
Alpha: 0.257773

Accuracy Measures
MAPE: 25.5159
MAD: 0.9002
MSD: 1.1638

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 2 | 52 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 3 | 53 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 4 | 54 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 5 | 55 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |

ثالثا التمهيد الأسي الثنائي

Smoothing Sales Series by Double Exponential Smoothing




```
MTB > %DES 'Sales';
SUBC>   Forecasts 5;
SUBC>   Title "Smoothing Sales Series by Double
Exponential Smoothing";
SUBC>   Residuals 'RESI3'.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\DES.MAC

Macro is running ... please wait
```

**Double Exponential Smoothing**

```
Data        Sales
Length    50.0000
NMissing        0

Smoothing Constants
Alpha (level): 0.680728
Gamma (trend): 0.019421

Accuracy Measures
MAPE: 27.1322
MAD:   0.9880
```

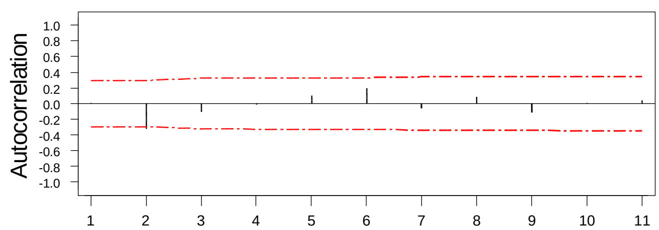
MSD: 1.5458

| Row | Period | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 6.04349 | 3.62298 | 8.4640 |
| 2 | 52 | 6.06254 | 3.04085 | 9.0842 |
| 3 | 53 | 6.08160 | 2.40519 | 9.7580 |
| 4 | 54 | 6.10065 | 1.74005 | 10.4613 |
| 5 | 55 | 6.11971 | 1.05736 | 11.1821 |

(ج) فحص البواقي:

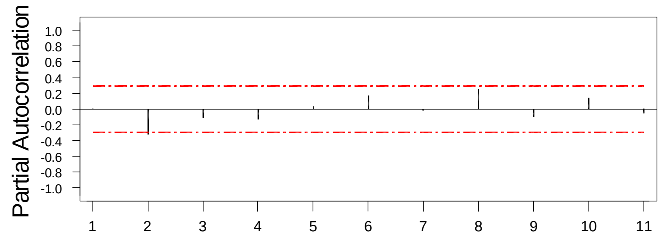
للمتوسط المتحرك

Autocorrelation Function for RESI1

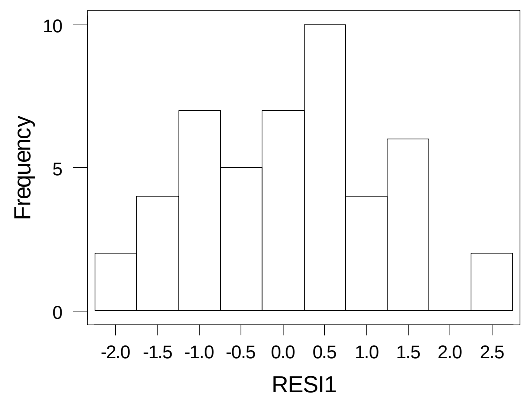



| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01 | 0.05 | 0.00 | 8 | 0.08 | 0.47 | 9.66 |
| 2 | -0.33 | -2.26 | 5.55 | 9 | -0.11 | -0.66 | 10.43 |
| 3 | -0.11 | -0.69 | 6.19 | 10 | 0.00 | 0.02 | 10.43 |
| 4 | -0.01 | -0.06 | 6.19 | 11 | 0.04 | 0.25 | 10.55 |
| 5 | 0.10 | 0.64 | 6.79 | | | | |
| 6 | 0.20 | 1.22 | 9.03 | | | | |
| 7 | -0.07 | -0.39 | 9.28 | | | | |

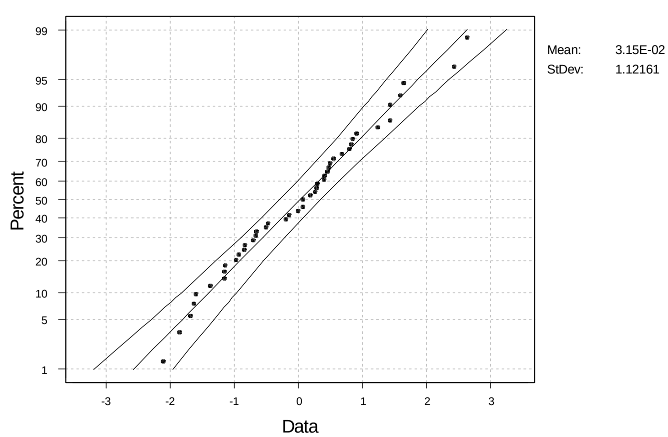
Partial Autocorrelation Function for RESI1




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01 | 0.05 | 8 | 0.25 | 1.74 |
| 2 | -0.33 | -2.26 | 9 | -0.11 | -0.76 |
| 3 | -0.12 | -0.81 | 10 | 0.15 | 1.01 |
| 4 | -0.14 | -0.93 | 11 | -0.06 | -0.39 |
| 5 | 0.03 | 0.19 | | | |
| 6 | 0.17 | 1.14 | | | |
| 7 | -0.02 | -0.16 | | | |




Normal Probability Plot for RESI1




```
MTB > %Qqplot 'RESI1';
SUBC>   Table;
```

```
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

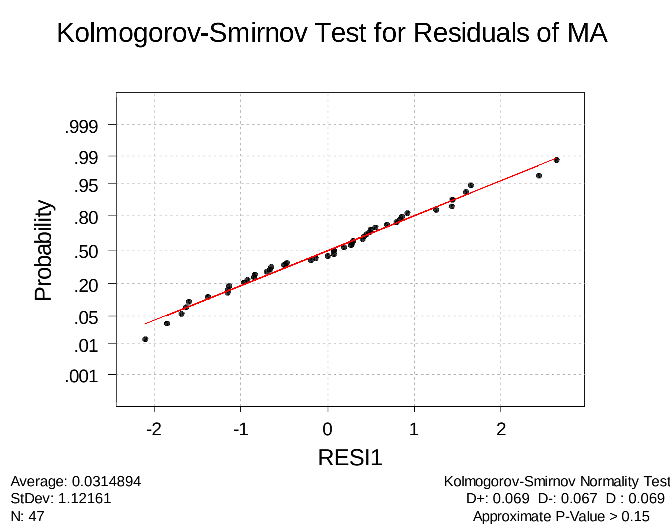
**Distribution Function Analysis**

```
Normal Dist. Parameter Estimates

Data    : RESI1

Mean:     3.15E-02
StDev:    1.12161
```

Percentile Estimates

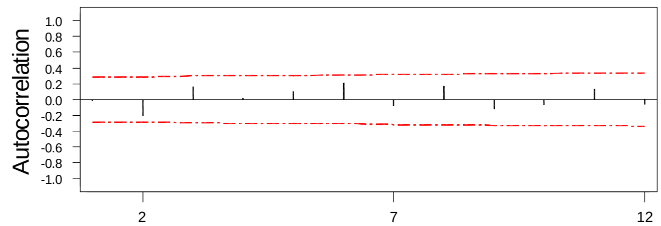
| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -2.57777 | -3.19506 | -1.96047 |
| 0.02 | -2.27202 | -2.83741 | -1.70663 |
| 0.03 | -2.07803 | -2.61158 | -1.54447 |
| 0.04 | -1.93210 | -2.44238 | -1.42181 |
| 0.05 | -1.81339 | -2.30524 | -1.32155 |
| 0.06 | -1.71236 | -2.18891 | -1.23581 |
| 0.07 | -1.62377 | -2.08723 | -1.16032 |
| 0.08 | -1.54445 | -1.99647 | -1.09244 |
| 0.09 | -1.47231 | -1.91417 | -1.03046 |
| 0.10 | -1.40591 | -1.83864 | -0.97318 |
| 0.20 | -0.91248 | -1.28563 | -0.53934 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.30 | -0.55668 | -0.89868 | -0.21469 |
| 0.40 | -0.25267 | -0.57843 | 0.07309 |
| 0.50 | 0.03149 | -0.28917 | 0.35215 |
| 0.60 | 0.31565 | -0.01012 | 0.64141 |
| 0.70 | 0.61966 | 0.27767 | 0.96165 |
| 0.80 | 0.97546 | 0.60232 | 1.34860 |
| 0.90 | 1.46889 | 1.03616 | 1.90162 |
| 0.91 | 1.53529 | 1.09344 | 1.97715 |
| 0.92 | 1.60743 | 1.15542 | 2.05945 |
| 0.93 | 1.68675 | 1.22330 | 2.15021 |
| 0.94 | 1.77534 | 1.29879 | 2.25189 |
| 0.95 | 1.87637 | 1.38453 | 2.36822 |
| 0.96 | 1.99508 | 1.48479 | 2.50536 |
| 0.97 | 2.14101 | 1.60745 | 2.67456 |
| 0.98 | 2.33499 | 1.76961 | 2.90038 |
| 0.99 | 2.64074 | 2.02345 | 3.25804 |



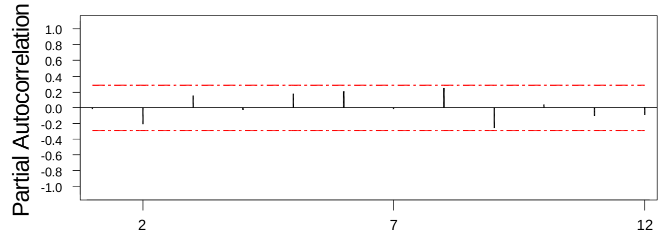

للتمهيد الأسي البسيط

## Autocorrelation Function for RESI2

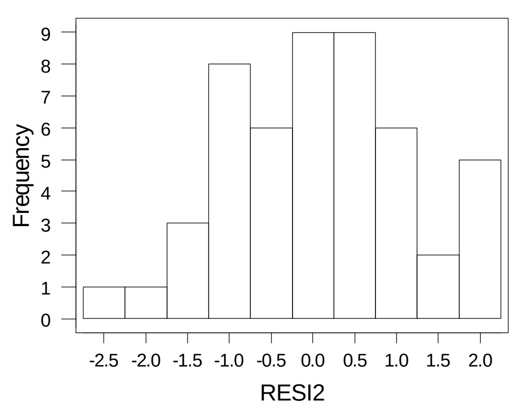



| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.02 | -0.16 | 0.03 | 8 | 0.17 | 1.05 | 9.33 |
| 2 | -0.21 | -1.51 | 2.48 | 9 | -0.13 | -0.79 | 10.37 |
| 3 | 0.16 | 1.07 | 3.87 | 10 | -0.08 | -0.47 | 10.76 |
| 4 | 0.01 | 0.07 | 3.87 | 11 | 0.13 | 0.81 | 11.95 |
| 5 | 0.10 | 0.68 | 4.47 | 12 | -0.06 | -0.38 | 12.24 |
| 6 | 0.21 | 1.40 | 7.18 | | | | |
| 7 | -0.08 | -0.53 | 7.61 | | | | |

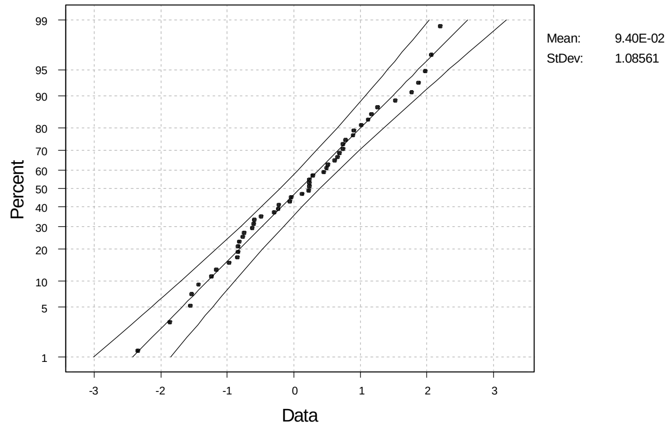
## Partial Autocorrelation Function for RESI2




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.02 | -0.16 | 8 | 0.25 | 1.76 |
| 2 | -0.21 | -1.51 | 9 | -0.27 | -1.89 |
| 3 | 0.15 | 1.09 | 10 | 0.04 | 0.26 |
| 4 | -0.03 | -0.24 | 11 | -0.11 | -0.75 |
| 5 | 0.18 | 1.28 | 12 | -0.09 | -0.62 |
| 6 | 0.20 | 1.42 | | | |
| 7 | -0.02 | -0.14 | | | |



Normal Probability Plot for RESI2



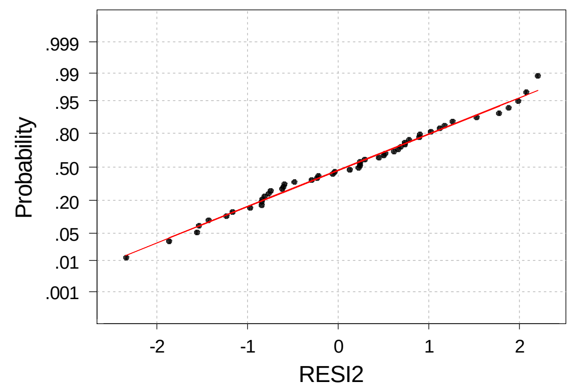

```
MTB > %Qqplot  'RESI2';
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

```
Normal Dist. Parameter Estimates

Data    : RESI2

Mean:     9.40E-02
StDev:    1.08561


Percentile Estimates


95% CI       95% CI
```

| P | Percentile | Approximate Lower Limit | Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -2.43146 | -3.01074 | -1.85218 |
| 0.02 | -2.13552 | -2.66609 | -1.60495 |
| 0.03 | -1.94776 | -2.44846 | -1.44706 |
| 0.04 | -1.80651 | -2.28537 | -1.32766 |
| 0.05 | -1.69162 | -2.15318 | -1.23006 |
| 0.06 | -1.59383 | -2.04103 | -1.14663 |
| 0.07 | -1.50809 | -1.94300 | -1.07317 |
| 0.08 | -1.43131 | -1.85549 | -1.00713 |
| 0.09 | -1.36149 | -1.77614 | -0.94684 |
| 0.10 | -1.29722 | -1.70330 | -0.89113 |
| 0.20 | -0.81962 | -1.16979 | -0.46946 |
| 0.30 | -0.47525 | -0.79618 | -0.15431 |
| 0.40 | -0.18099 | -0.48669 | 0.12471 |
| 0.50 | 0.09405 | -0.20686 | 0.39496 |
| 0.60 | 0.36908 | 0.06338 | 0.67479 |
| 0.70 | 0.66334 | 0.34241 | 0.98427 |
| 0.80 | 1.00772 | 0.65756 | 1.35789 |
| 0.90 | 1.48531 | 1.07923 | 1.89140 |
| 0.91 | 1.54959 | 1.13494 | 1.96423 |
| 0.92 | 1.61941 | 1.19523 | 2.04359 |
| 0.93 | 1.69618 | 1.26127 | 2.13110 |
| 0.94 | 1.78193 | 1.33473 | 2.22913 |
| 0.95 | 1.87972 | 1.41816 | 2.34128 |
| 0.96 | 1.99461 | 1.51575 | 2.47347 |
| 0.97 | 2.13586 | 1.63516 | 2.63655 |
| 0.98 | 2.32362 | 1.79305 | 2.85419 |
| 0.99 | 2.61955 | 2.04028 | 3.19883 |

Kolmogorov-Smirnov Test for Residuals of SES

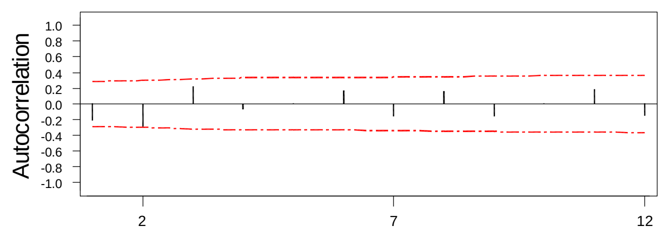



Average: 0.0940483
StDev: 1.08561
N: 50

Kolmogorov-Smirnov Normality Test
D+: 0.077 D-: 0.068 D : 0.077
Approximate P-Value > 0.15

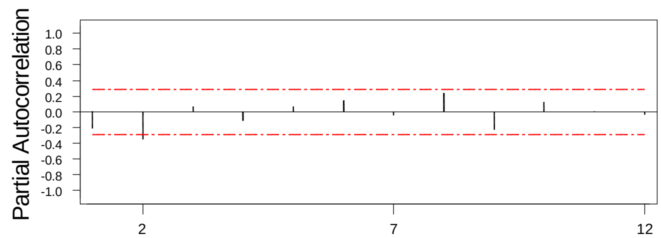
## التمهيد الأسي الثنائي

Autocorrelation Function for RESI3

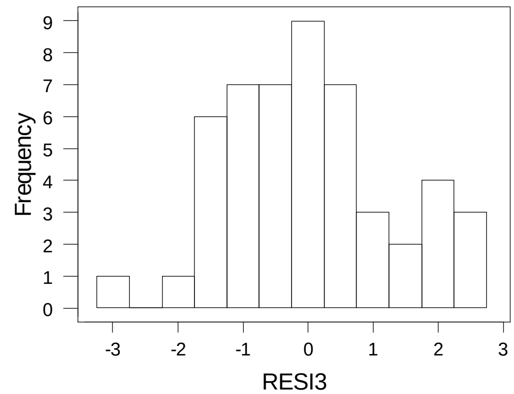



| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.22 | -1.53 | 2.50 | 8 | 0.16 | 0.96 | 15.06 |
| 2 | -0.29 | -1.98 | 7.12 | 9 | -0.16 | -0.89 | 16.62 |
| 3 | 0.22 | 1.39 | 9.81 | 10 | 0.01 | 0.04 | 16.62 |
| 4 | -0.07 | -0.43 | 10.10 | 11 | 0.19 | 1.06 | 18.99 |
| 5 | 0.00 | 0.03 | 10.10 | 12 | -0.15 | -0.82 | 20.53 |
| 6 | 0.17 | 1.03 | 11.82 | | | | |
| 7 | -0.16 | -0.95 | 13.38 | | | | |

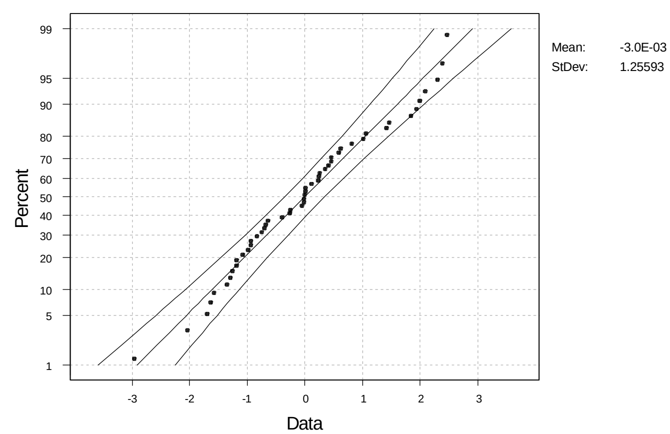
Partial Autocorrelation Function for RESI3




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0.22 | -1.53 | 8 | 0.24 | 1.69 |
| 2 | -0.36 | -2.52 | 9 | -0.23 | -1.61 |
| 3 | 0.07 | 0.49 | 10 | 0.13 | 0.92 |
| 4 | -0.11 | -0.81 | 11 | 0.01 | 0.04 |
| 5 | 0.07 | 0.47 | 12 | -0.03 | -0.25 |
| 6 | 0.14 | 1.02 | | | |
| 7 | -0.05 | -0.34 | | | |




Normal Probability Plot for RESI3




```
MTB > %Qqplot  'RESI3';
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

```
Normal Dist. Parameter Estimates
```

Data : RESI3

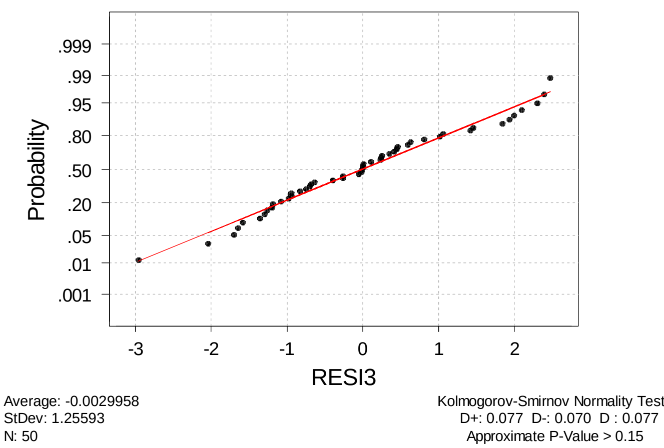
Mean: -3.0E-03
StDev: 1.25593

Percentile Estimates

| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -2.92473 | -3.59489 | -2.25457 |
| 0.02 | -2.58237 | -3.19618 | -1.96855 |
| 0.03 | -2.36515 | -2.94440 | -1.78589 |
| 0.04 | -2.20174 | -2.75573 | -1.64775 |
| 0.05 | -2.06882 | -2.60279 | -1.53485 |
| 0.06 | -1.95569 | -2.47305 | -1.43832 |
| 0.07 | -1.85649 | -2.35964 | -1.35334 |
| 0.08 | -1.76767 | -2.25840 | -1.27694 |
| 0.09 | -1.68689 | -2.16659 | -1.20719 |
| 0.10 | -1.61254 | -2.08233 | -1.14274 |
| 0.20 | -1.06001 | -1.46512 | -0.65491 |
| 0.30 | -0.66161 | -1.03289 | -0.29032 |
| 0.40 | -0.32118 | -0.67484 | 0.03248 |
| 0.50 | -0.00300 | -0.35112 | 0.34512 |
| 0.60 | 0.31519 | -0.03847 | 0.66885 |
| 0.70 | 0.65562 | 0.28433 | 1.02690 |
| 0.80 | 1.05402 | 0.64892 | 1.45913 |
| 0.90 | 1.60655 | 1.13675 | 2.07634 |
| 0.91 | 1.68090 | 1.20120 | 2.16060 |
| 0.92 | 1.76168 | 1.27095 | 2.25241 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.93 | 1.85050 | 1.34735 | 2.35365 |
| 0.94 | 1.94969 | 1.43233 | 2.46706 |
| 0.95 | 2.06283 | 1.52886 | 2.59680 |
| 0.96 | 2.19575 | 1.64176 | 2.74973 |
| 0.97 | 2.35915 | 1.77990 | 2.93840 |
| 0.98 | 2.57637 | 1.96256 | 3.19019 |
| 0.99 | 2.91874 | 2.24858 | 3.58890 |

Kolmogorov-Smirnov Test for Residuals of DES




في كل الحالات السابقة نجد ان البواقي تحقق الفرضيات

1- غير مترابطة

2- لها تقريبا توزيع طبيعي بمتوسط صفري وتباين وحدة

(د) الجدول التالي يلخص مقاييس الدقة للأخطاء

| | MAPE | MAD | MSD |
|---|---|---|---|
| MA | 26.5366 | 0.9077 | 1.2322 |
| SES | 25.5159 | 0.9002 | 1.1638 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| DES | 27.1322 | 0.9880 | 1.5458 |

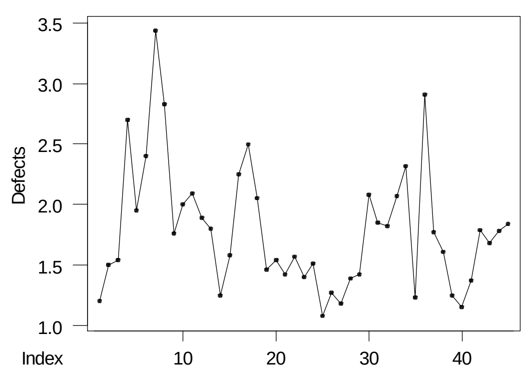
ويلاحظ أن التمهيد الأسي البسيط يعطي أفضل نتيجة.

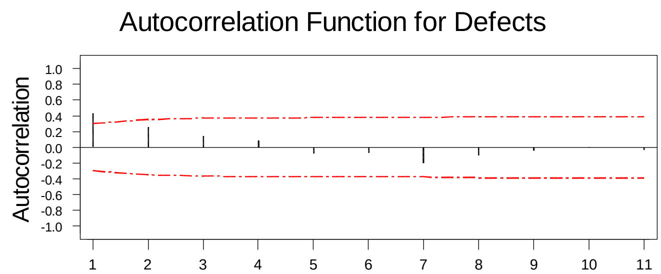
التنبؤات بإستخدام التمهيد الأسي البسيط وفترات 95% للتنبؤ

| Period of Forecast | Forecast | Lower | Upper |
|---|---|---|---|
| 51 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 52 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 53 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 54 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |
| 55 | 5.67586 | 3.47035 | 7.88137 |

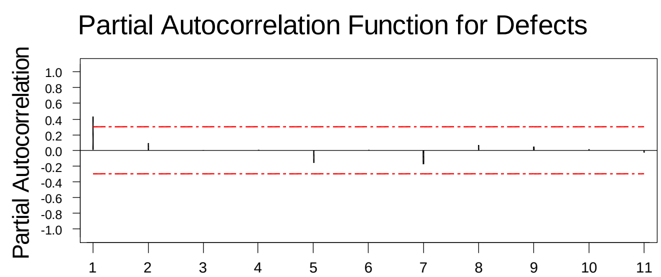
إجابة للسؤال الثالث:

(أ)






| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43 | 2.88 | 8.84 | 8 | -0.11 | -0.57 | 17.25 |
| 2 | 0.26 | 1.49 | 12.18 | 9 | -0.05 | -0.27 | 17.41 |
| 3 | 0.14 | 0.77 | 13.18 | 10 | -0.01 | -0.04 | 17.41 |
| 4 | 0.08 | 0.43 | 13.50 | 11 | -0.04 | -0.19 | 17.50 |
| 5 | -0.09 | -0.46 | 13.89 | | | | |
| 6 | -0.07 | -0.39 | 14.18 | | | | |
| 7 | -0.21 | -1.10 | 16.57 | | | | |




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.43 | 2.88 | 8 | 0.07 | 0.44 |
| 2 | 0.09 | 0.63 | 9 | 0.05 | 0.35 |
| 3 | -0.00 | -0.01 | 10 | 0.01 | 0.09 |
| 4 | 0.00 | 0.00 | 11 | -0.03 | -0.23 |
| 5 | -0.16 | -1.07 | | | |
| 6 | 0.00 | 0.02 | | | |
| 7 | -0.18 | -1.19 | | | |

واضح من الشكل أن SACF تتخامد أسيا و SPACF لها قطع بعد $r_{1,1}$ وهذا يقترح نموذج $ARIMA(1,0,0)$ أي أن $p=1$ و $d=0$ و $q=0$

(ج) تقدير المعالم:

```
MTB > ARIMA 1 0 0 'Defects' 'RESI1' 'FITS1';
SUBC>   Constant;
SUBC>   Forecast 5 c3 c4 c5;
SUBC>   GACF;
SUBC>   GPACF;
SUBC>   GHistogram;
SUBC>   GNormalplot;
SUBC>   GFits;
SUBC>   GOrder.
```

**ARIMA Model**

ARIMA model for Defects

Estimates at each iteration

| Iteration | SSE | Parameters | |
|---|---|---|---|
| 0 | 11.2419 | 0.100 | 1.700 |
| 1 | 10.0858 | 0.250 | 1.393 |
| 2 | 9.5649 | 0.400 | 1.086 |
| 3 | 9.5316 | 0.436 | 1.006 |
| 4 | 9.5309 | 0.441 | 0.995 |
| 5 | 9.5309 | 0.442 | 0.993 |
| 6 | 9.5309 | 0.442 | 0.993 |

Relative change in each estimate less than 0.0010

Final Estimates of Parameters

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 0.4421 | 0.1365 | 3.24 |
| Constant | 0.99280 | 0.06999 | 14.19 |
| Mean | 1.7795 | 0.1254 | |

Number of observations: 45

Residuals: SS = 9.47811 (backforecasts excluded)

MS = 0.22042 DF = 43

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

Lag 12 24 36 48

```
Chi-Square          4.9(DF=11)          8.9(DF=23)
                      30.9(DF=35)       * (DF= *)

                             Forecasts from period 45
                                    95 Percent Limits
Period        Forecast          Lower          Upper
                                              Actual
     46          1.80627        0.88588        2.72665
     47          1.79135        0.78503        2.79767
     48          1.78476        0.76248        2.80703
     49          1.78184        0.75648        2.80721
     50          1.78055        0.75459        2.80652
```

من المخرجات السابقة نجد أن النموذج المقترح هو

$$z_t = 0.9928 - 0.4421 z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN\left(0, 0.22042\right)$$
$$or \quad \left(z_t - 1.7795\right) = -0.4421\left(z_{t-1} - 1.7795\right) + a_t$$

حيث

$$\hat{\phi}_1 = 0.4421,\ s.e\left(\hat{\phi}_1\right) = 0.1365,\ \text{with t-value} = 3.24$$

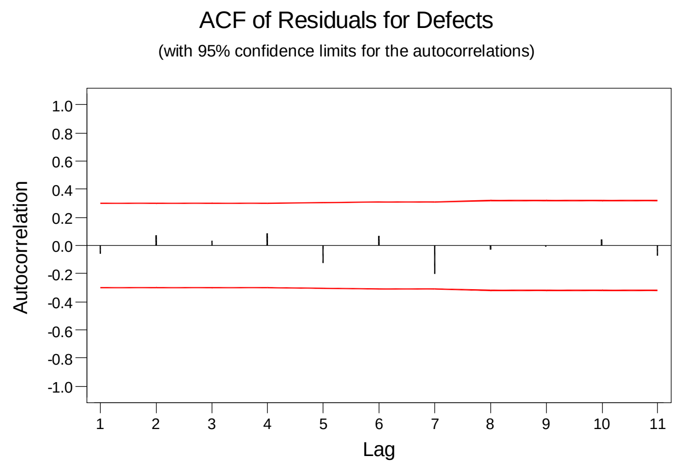
أي أن معامل الإنحدار الذاتي معنوي

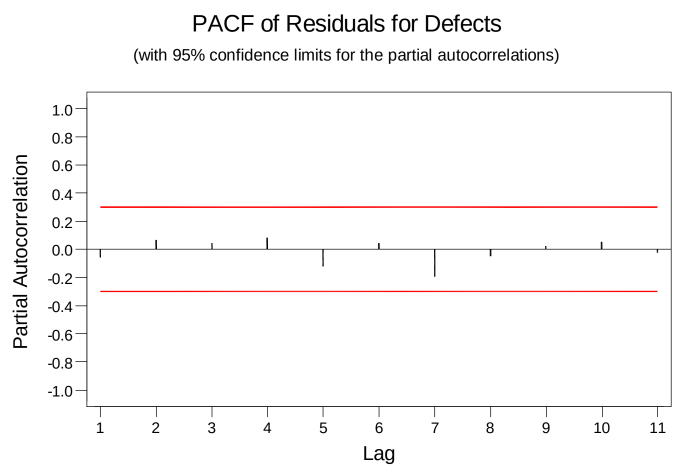
$$\hat{\delta} = 0.9928,\ s.e\left(\hat{\delta}\right) = 0.06999,\ \text{with t-value} = 14.19$$

وأيضا المستوى $\delta$ معنوي

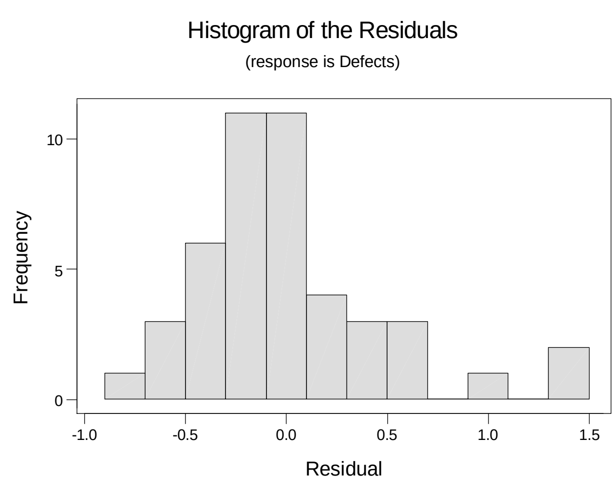
(د) فحص البواقي:

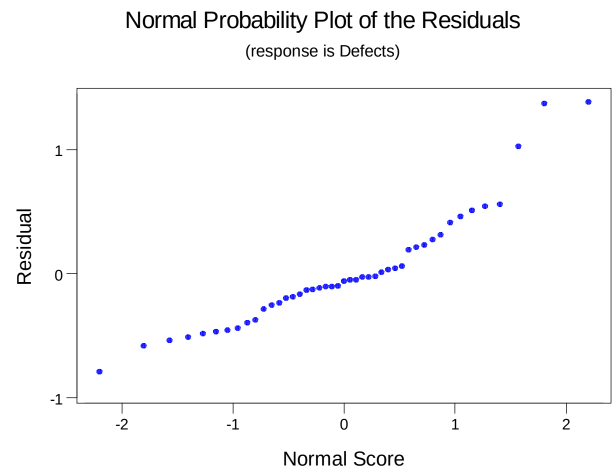
1- عدم الترابط

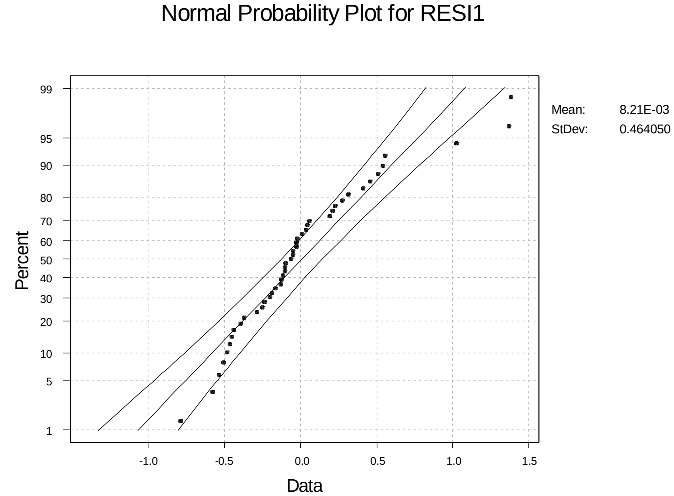



التوزيع الطبيعي:






```
MTB > %Qqplot 'RESI1';
SUBC>   Table;
SUBC>   Conf 95;
SUBC>   Ci.
Executing from file: G:\MTBWIN\MACROS\Qqplot.MAC
```

**Distribution Function Analysis**

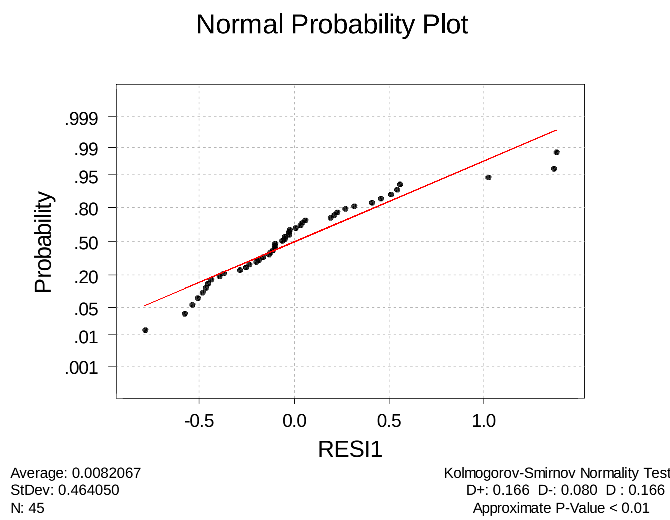
```
Normal Dist. Parameter Estimates

Data     : RESI1
```

Mean: 8.21E-03
StDev: 0.464050

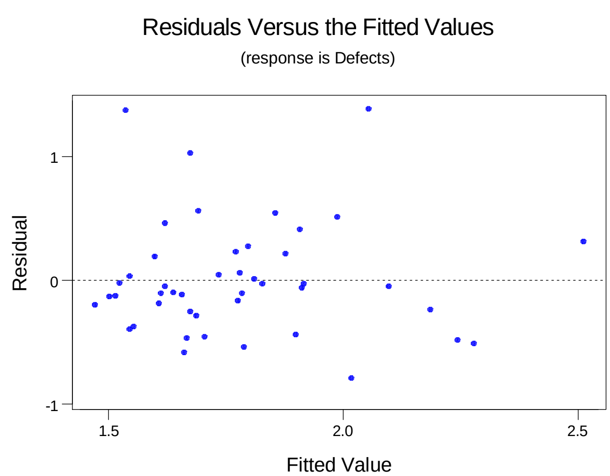
Percentile Estimates

| P | Percentile | 95% CI Approximate Lower Limit | 95% CI Approximate Upper Limit |
|---|---|---|---|
| 0.01 | -1.07134 | -1.33235 | -0.81033 |
| 0.02 | -0.94484 | -1.18390 | -0.70577 |
| 0.03 | -0.86458 | -1.09018 | -0.63897 |
| 0.04 | -0.80420 | -1.01996 | -0.58844 |
| 0.05 | -0.75509 | -0.96306 | -0.54712 |
| 0.06 | -0.71329 | -0.91478 | -0.51179 |
| 0.07 | -0.67663 | -0.87260 | -0.48067 |
| 0.08 | -0.64382 | -0.83494 | -0.45269 |
| 0.09 | -0.61397 | -0.80080 | -0.42714 |
| 0.10 | -0.58650 | -0.76947 | -0.40353 |
| 0.20 | -0.38235 | -0.54012 | -0.22457 |
| 0.30 | -0.23514 | -0.37975 | -0.09054 |
| 0.40 | -0.10936 | -0.24710 | 0.02838 |
| 0.50 | 0.00821 | -0.12738 | 0.14379 |
| 0.60 | 0.12577 | -0.01197 | 0.26351 |
| 0.70 | 0.25155 | 0.10695 | 0.39616 |
| 0.80 | 0.39876 | 0.24098 | 0.55654 |
| 0.90 | 0.60291 | 0.41994 | 0.78588 |
| 0.91 | 0.63038 | 0.44355 | 0.81721 |
| 0.92 | 0.66023 | 0.46911 | 0.85136 |
| 0.93 | 0.69305 | 0.49708 | 0.88901 |

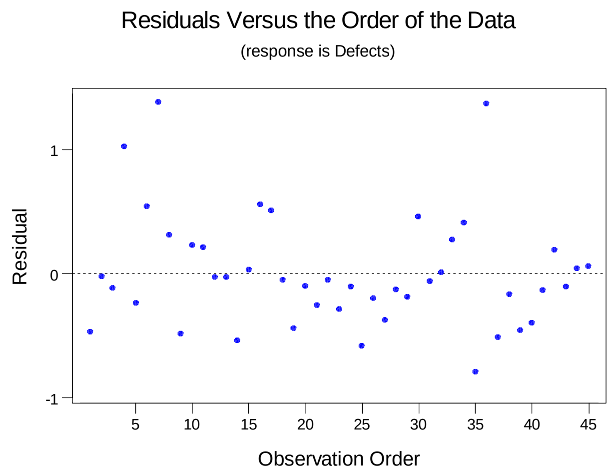
| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.94 | 0.72970 | 0.52820 | 0.93120 |
| 0.95 | 0.77150 | 0.56353 | 0.97947 |
| 0.96 | 0.82061 | 0.60485 | 1.03638 |
| 0.97 | 0.88099 | 0.65539 | 1.10659 |
| 0.98 | 0.96125 | 0.72219 | 1.20031 |
| 0.99 | 1.08775 | 0.82674 | 1.34876 |




نفحص أنماط البواقي مع القيم المطبقة




والبواقي مع ترتيب البيانات




من الفحوصات السابقة نستنتج أن النموذج المقترح مناسب للتطبيق علي البيانات المعطاة

(هـ)

التنبؤات للخمس القيم المستقبلية وفترات تنبؤ 95% Forecasts from period 45

| Period | Forecast | 95 Percent Limits Lower | Upper |
|---|---|---|---|
| 46 | 1.80627 | 0.88588 | 2.72665 |
| 47 | 1.79135 | 0.78503 | 2.79767 |
| 48 | 1.78476 | 0.76248 | 2.80703 |
| 49 | 1.78184 | 0.75648 | 2.80721 |
| 50 | 1.78055 | 0.75459 | 2.80652 |

**بسم الله الرحمن الرحيم**

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المادة : طرق التنبؤ الاحصائي 221 بحث

الاختبار الاول للأعمال الفصلية

الفصل الأول 1420-1421 هـ

الزمن : ساعتين

أجب علي جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

ا- ضع النموذج التالي $z_{n+j} = \beta_0 + \beta_1 j + \varepsilon_{n+j},\ j = 0, \pm 1, \ldots$ علي الشكل $z_{n+j} = \mathbf{f}'(j)\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+j},\ j = 0, \pm 1, \ldots$ وذلك بتحديد كل من $\boldsymbol{\beta}$ و $\mathbf{f}'(j)$ أوجد $\mathbf{L}$ وبرهن ان $\mathbf{f}'(j+1) = \mathbf{L}\mathbf{f}'(j)$

ب- بوضع $\mathbf{y}' = (z_1, \ldots, z_n)$ و $\mathbf{X}' = [\mathbf{f}(-n+1), \mathbf{f}(-n+2), \ldots, \mathbf{f}(1), \mathbf{f}(0)]$ برهن ان $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{f}(-j)\mathbf{f}'(-j)$ وان $\mathbf{X}'\mathbf{y} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{f}(-j) z_{n-j}$ ومن ثم اوجد مقدر للمعلم $\boldsymbol{\beta}$

السؤال الثاني:

للمتسلسلة الزمنية التالية:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_t$ | 7 | 8 | 12 | 13 | 17 | 15 | 19 | 22 | 25 | 24 | 26 | 28 |

ا- طبق وسط متحرك من الدرجة 3 للمتسلسلة المعطاه ومن ثم اوجد متنبئات لقيم المتسلسلة $z_{13}, z_{14}$

ب- بأخذ $\alpha = 0.5$ طبق تمهيد اسي بسيط للمتسلسلة المعطاه ومن ثم اوجد متنبئات لقيم المتسلسلة $z_{13}, z_{14}$

السؤال الثالث:

للنموذج التالي $z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t$ حيث $0 < \delta < \infty$ مقدار ثابت و $1 > |\phi_1|$ و $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$

ا- اوجد دالة الترابط الذاتي $\rho_k, \forall k$ وارسمها لقيم $k = 0,1,...,5$

ب- اوجد دالة الترابط الذاتي الجزئي $\phi_{k,k}, \forall k$ و وارسمها لقيم $k = 0,1,...,5$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود – كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

إختبار أعمال فصل أول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي

الزمن: 2 ساعة

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z = \beta_0 + \beta_1 t + x_t$$
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t,\, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

على إفتراض أن المعالم $\beta_0, \beta_1, \phi_1, \sigma^2$ معلومة.

برهن أن المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى بالعلاقة

$$z_t\left(\ell\right) = \beta_0 + \beta_1\left(t + \ell\right) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right), \quad \ell \geq 0$$

السؤال الثاني:

إعتمادا على متسلسلة طولها $n = 200$ مشاهدة طبق نموذج $AR\left(2\right)$ وحصلنا على الترابطات الذاتية للبواقي التالية $r_1 = 0.13, r_2 = 0.13, r_3 = 0.12$ إذا كانت $\hat{\phi}_1 = 1.1, \hat{\phi}_2 = -0.8$

فهل الترابطات الذاتية للبواقي تدعم أن النموذج هو $AR\left(2\right)$ كل على حدة أو مجتمعة؟

السؤال الثالث:

للمتسلسلة المستقرة التالية $6, 5, 4, 6, 4$ قدر $\mu,\, \gamma_0,\, \rho_1$

السؤال الرابع:

لمتسلسلة زمنية طولها $n = 100$ مشاهدة حسبت الكميات التالية

$$r_1 = 0.8,\, r_2 = 0.5,\, r_3 = 0.4,\, \overline{z} = 2,\, s^2 = 5$$

إذا افترض ان المشاهدات من نموذج $AR(2)$ على الشكل

$$z = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t,\, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

أوجد مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1,\, \phi_2,\, \delta,\, \sigma^2$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود – كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

الإختبار النهائي للفصل الأول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي)

الزمن: **3** ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z = \beta_0 + \beta_1 t + x_t$$
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t,\, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

على إفتراض أن المعالم $\beta_0, \beta_1, \phi_1, \sigma^2$ معلومة.

برهن أن المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى بالعلاقة

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right), \quad \ell \ge 0$$

السؤال الثاني:

إعتمادا على متسلسلة طولها $n = 200$ مشاهدة طبق نموذج $AR(2)$ وحصلنا على الترابطات الذاتية للبواقي التالية $r_1 = 0.13, r_2 = 0.13, r_3 = 0.12$ إذا كانت $\hat{\phi}_1 = 1.1, \hat{\phi}_2 = -0.8$

فهل الترابطات الذاتية للبواقي تدعم أن النموذج هو $AR(2)$ كل على حدة أو مجتمعة؟

السؤال الثالث:

للمتسلسلة المستقرة التالية $6, 5, 4, 6, 4$ قدر $\mu,\, \gamma_0,\, \rho_1$

السؤال الرابع:

لمتسلسة زمنية طولها $n = 100$ مشاهدة حسبت الكميات التالية

$r_1 = 0.8, r_2 = 0.5, r_3 = 0.4, \overline{z} = 2, s^2 = 5$

إذا افترض ان المشاهدات من نموذج $AR(2)$ على الشكل

$$z = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t, \; a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

أوجد مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1, \phi_2, \delta, \sigma^2$

<u>السؤال الخامس:</u>

وجد أن المبيعات السنوية بملايين الريالات لشركة ما تتبع النموذج

$$z_t = 5 + 1.1 z_{t-1} - 0.5 z_{t-2} + a_t, \; a_t \sim WN(0, 2)$$

إذا كانت المبيعات للسنوات 1419 و 1420 و 1421 هـ هي على التوالي 10 و 11 و 9 ملايين ريال

1- أوجد تنبؤات لمبيعات 1422 و 1423 و 1424 هـ

2- أحسب الأوزان $\psi_j, j = 1, 2, 3, 4.$

ج) أحسب فترات تنبؤ 95% للمبيعات للسنوات 1422 و 1423 و 1424 هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود – كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

الإختبار النهائي للفصل الأول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي)

الزمن: **3** ساعات

<u>أجب على جميع الأسئلة التالية:</u>

<u>السؤال الأول:</u>

للنموذج

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 t + x_t$$
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t,\, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

على إفتراض أن المعالم $\beta_0, \beta_1, \phi_1, \sigma^2$ معلومة.

برهن أن المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى بالعلاقة

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^{\ell}\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right), \quad \ell \geq 0$$

<u>السؤال الثاني:</u>

إعتمادا على متسلسلة طولها $n = 200$ مشاهدة طبق نموذج $AR(2)$ وحصلنا على الترابطات الذاتية للبواقي التالية $r_1 = 0.13, r_2 = 0.13, r_3 = 0.12$ إذا كانت $\hat{\phi}_1 = 1.1, \hat{\phi}_2 = -0.8$

فهل الترابطات الذاتية للبواقي تدعم أن النموذج هو $AR(2)$ كل على حدة أو مجتمعة؟

<u>السؤال الثالث:</u>

لمتسلسلة زمنية طولها $n = 100$ مشاهدة حسبت الكميات التالية

$$r_1 = 0.8, r_2 = 0.5, r_3 = 0.4, \overline{z} = 2, s^2 = 5$$

إذا افترض ان المشاهدات من نموذج $AR(2)$ على الشكل

$$z = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t,\, a_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$$

أوجد مقدرات العزوم للمعالم $\phi_1,\, \phi_2,\, \delta,\, \sigma^2$

<u>السؤال الرابع:</u>

وجد أن المبيعات السنوية بملايين الريالات لشركة ما تتبع النموذج

$$z_t = 5 + 1.1 z_{t-1} - 0.5 z_{t-2} + a_t,\, a_t \sim WN\,(0, 2)$$

إذا كانت المبيعات للسنوات 1419 و 1420 و 1421 هـ هي على التوالي 10 و 11 و 9 ملايين ريال

3- أوجد تنبؤات لمبيعات 1422 و 1423 و 1424 هـ

4- أحسب الأوزان $\psi_j,\, j = 1, 2, 3, 4.$

ج) أحسب فترات تنبؤ 95% للمبيعات للسنوات 1422 و 1423 و 1424 هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات نموذجية للإختبار النهائي للفصل الأول 1423/1422 هـ

لمادة 221 بحث ( طرق التنبؤ الإحصائي )

إجابة للسؤال الأول:

نضع المعادلات المعرفة للنموذج على الشكل

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi_1 x_{t-1} + a_t,\ a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

المتنبئ الخطي ذا أدنى متوسط مربع خطأ للخطوة $\ell$ إلى الأمام يعطى من العلاقة

$$z_t(\ell) = E\left(z_{t+\ell} \mid z_t, z_{t-1},...\right),\ \ell \geq 0$$

$$\because x_t = z_t - \beta_0 - \beta_1 t$$

$$\therefore z_t - \beta_0 - \beta_1 t = \phi_1\left[z_{t-1} - \beta_0 - \beta_1(t-1)\right] + a_t,\ a_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$$

$$\begin{aligned}
z_t(\ell) - \beta_0 - \beta_1(t+\ell) &= E\left[\left(\phi_1\left[z_{t+\ell-1} - \beta_0 - \beta_1(t+\ell-1)\right] + a_{t+\ell}\right) \mid z_t, z_{t-1},...\right],\ \ell \geq 0 \\
&= E\left(\phi_1\left[z_{t+\ell-1} - \beta_0 - \beta_1(t+\ell-1)\right] \mid z_t, z_{t-1},...\right) + E\left(a_{t+\ell} \mid z_t, z_{t-1},...\right),\ \ell \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell = 1 : z_t(1) - \beta_0 - \beta_1(t+1) &= E\left(\phi_1\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right) \mid z_t, z_{t-1},...\right) + 0 \\
&= \phi_1\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)
\end{aligned}$$

$$\ell = 2 : z_t(2) - \beta_0 - \beta_1(t+2) = \phi_1\left[z_t(1) - \beta_0 - \beta_1(t+1)\right] = \phi_1^2\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

$$\ell = 3 : z_t(3) - \beta_0 - \beta_1(t+3) = \phi_1\left[z_t(2) - \beta_0 - \beta_1(t+2)\right] = \phi_1^3\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

$$\ell = 4 : z_t(4) - \beta_0 - \beta_1(t+4) = \phi_1\left[z_t(3) - \beta_0 - \beta_1(t+3)\right] = \phi_1^4\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

وهكذا بشكل عام

$$z_t(\ell) - \beta_0 - \beta_1(t+\ell) = \phi_1\left[z_t(\ell-1) - \beta_0 - \beta_1(t+\ell-1)\right] = \phi_1^\ell\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right)$$

أو بعد ترتيب الحدود

$$z_t(\ell) = \beta_0 + \beta_1(t+\ell) + \phi_1^\ell\left(z_t - \beta_0 - \beta_1 t\right),\ \ell \geq 0$$

وهو المطلوب.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

مادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي )

الإختبار النهائي للفصل الثاني 1423/1422 هـ

الزمن 3 ساعات

أجب على جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

للنموذج

$$z_t = 200 + 1.2 z_{t-1} - 0.7 z_{t-2} + a_t + 0.5 a_{t-1},\ a_t \sim N(0,1)$$

1- أوجد دالة الترابط الذاتي $\rho_k$ لقيم $k = 1, 2, ..., 5$ وارسمها.

2- أوجد دالة الترابط الذاتي الجزئي $\phi_{kk}$ لقيم $k = 1, 2, ..., 5$ وارسمها.

3- أوجد دالة الأوزان $\psi_j$ لقيم $j = 1, 2, ..., 5$ وارسمها.

4- أوجد دالة التنبؤ $z_n(\ell),\ \ell \geq 0$ .

السؤال الثاني:

المشاهدات التالية لمتسلسلة زمنية: ( إقرأ من اليسار سطرا بسطر )

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **201** | **202** | **203** | **202** | **200** | **198** | **197** | **197** |
| | | | | **198** | **200** | **201** | **199** |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 196 | 193 | 195 | 197 | 199 | 201 | 201 | 201 |
| | | | | 203 | 203 | 200 | 197 |
| 194 | 195 | 197 | 201 | 204 | 204 | 202 | 200 |
| | | | | 201 | 200 | 198 | 198 |
| 198 | 198 | 196 | 193 | 194 | 199 | 204 | 206 |
| | | | | 206 | 203 | 200 | 200 |
| 202 | 204 | 206 | 205 | 202 | 198 | 199 | 201 |
| | | | | 201 | 201 | 204 | 205 |
| | | | | 205 | 201 | 198 | 197 |

ادخل المشاهدات في برنامج MINITAB وأجب على التالي:

1- تعرف على نموذج مناسب من عائلة ARIMA يطبق على المشاهدات وذلك بإستخدام معيار المعلومات الذاتي $AIC$ والذي يعطى بالعلاقة: $AIC\left(m\right)=n\ln\sigma_a^2+2m$

2- للنموذج المقترح قم بفحص البواقي مجريا عليها جميع الإختبارات المناسبة.

3- من النموذج المقترح ولد تنبؤات للقيم المستقبلية حتى 8 أزمنة تقدم مع فترات تنبؤ 95% .

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابات محتملة للإختبار النهائي للفصل الثاني 1423/1422 هـ

مادة 221 بحث (طرق التنبؤ الإحصائي )

إجابة للسؤال الأول:

نضع النموذج $z_t = 200 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t + 0.5a_{t-1},\ a_t \sim N(0,1)$ على شكل إنحرافات

عن المتوسط $400 = \frac{200}{1+0.7-1.2} = \frac{\delta}{(1-\phi_1-\phi_2)} = \mu$ اي

$$z_t - 400 = 1.2(z_{t-1}-400) - 0.7(z_{t-2}-400) + a_t + 0.5a_{t-1},\ a_t \sim N(0,1)$$

1- نوجد $\rho_k$ كالتالي:

$$E\{(z_t-400)(z_{t-k}-400)\} - 1.2E\{(z_{t-1}-400)(z_{t-k}-400)\} + 0.7E\{(z_{t-2}-400)(z_{t-k}-400)\} =$$
$$E\{a_t(z_{t-k}-400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-k}-400)\}$$

$$\gamma_k - 1.2\gamma_{k-1} + 0.7\gamma_{k-2} = E\{a_t(z_{t-k}-400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-k}-400)\}$$

$$k=0: \gamma_0 - 1.2\gamma_1 + 0.7\gamma_2 = E\{a_t(z_t-400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_t-400)\}$$
$$= \sigma^2 + 0.5(0.7\sigma^2) = 1.35\sigma^2$$

$$k=1: \gamma_1 - 1.2\gamma_0 + 0.7\gamma_1 = E\{a_t(z_{t-1}-400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-1}-400)\}$$
$$= 0.5\sigma^2$$

$$k=2: \gamma_2 - 1.2\gamma_1 + 0.7\gamma_0 = E\{a_t(z_{t-2}-400)\} + 0.5E\{a_{t-1}(z_{t-2}-400)\}$$
$$= 0$$

$$k \ge 2: \gamma_k - 1.2\gamma_{k-1} + 0.7\gamma_{k-2} = 0$$

من العلاقات السابقة نجد ان (بوضع $\sigma^2 = 1$ )

$$\rho_1 = 0.74436$$

ومن العلاقة الأخيرة وبالقسمة على $\gamma_0$ نجد

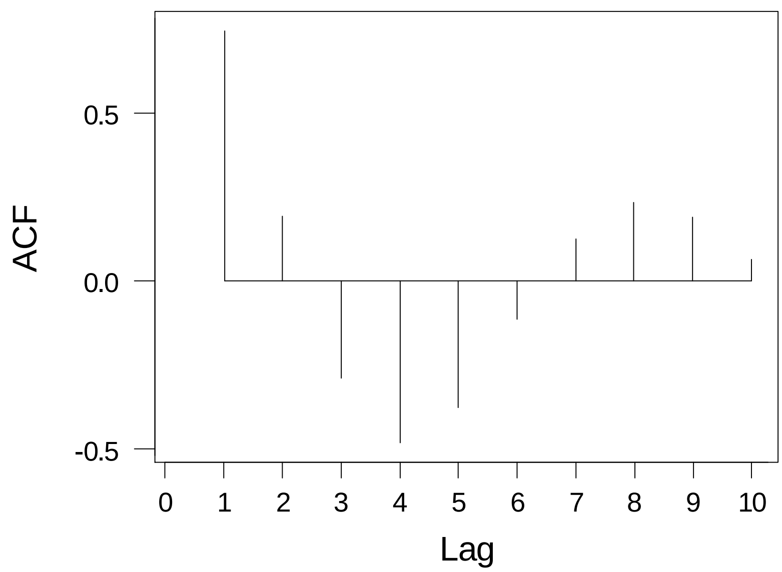
$$\gamma_k = 1.2\gamma_{k-1} - 0.7\gamma_{k-2},\ k = 2,3,...$$
$$\rho_k = 1.2\rho_{k-1} - 0.7\rho_{k-2},\ k = 2,3,...$$

$$\therefore \rho_2 = 1.2\rho_1 - 0.7\rho_0 = 1.2(0.74436) - 0.7(1) = 0.193232$$

$$\rho_3 = 1.2\rho_2 - 0.7\rho_1 = \text{-}0.289173$$
$$\rho_4 = \text{-}0.482271$$
$$\rho_5 = \text{-}0.376304$$
$$\rho_6 = \text{-}0.113975$$
$$\rho_7 = 0.126642$$
$$\rho_8 = 0.231754$$
$$\rho_9 = 0.189455$$
$$\rho_{10} = 0.651180$$

وترسم كالتالي:

ACF of the Model




2- نوجد $\phi_{kk}$

$\phi_{00} = 1, \textit{by definition}$

$\phi_{11} = \rho_1 = 0.744361, \textit{by definition}$

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_j}, \quad k = 2,3,\ldots$$

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-1}, \quad j = 1,2,\ldots,k-1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1-\phi_{11}\rho_1} = \frac{0.193233-(0.744361)(0.744361)}{1-(0.744361)(0.744361)} = \frac{-0.3608402}{0.4459268} = -0.8091915$$

$\phi_{33} = 0.343852$

$\phi_{44} = -0.165706$

$\phi_{55} = 0.821095$

$\phi_{66} = -0.409620$

$\phi_{77} = 0.204689$

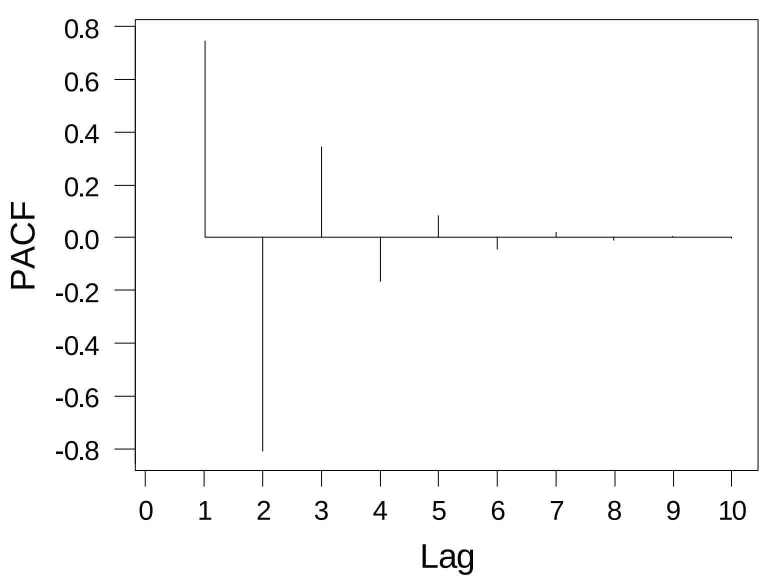
$\phi_{88} = -0.102327$

$\phi_{99} = 0.511617$

$\phi_{10,10} = -0.255822$

ونرسمها كالتالي:

PACF of the Model




3- دالة الأوزان $\psi_j$

نضع النموذج على الشكل:

$$
\begin{aligned}
z_t &= 200 + 1.2z_{t-1} - 0.7z_{t-2} + a_t + 0.5a_{t-1} \\
z_t - 1.2z_{t-1} + 0.7z_{t-2} &= 200 + a_t + 0.5a_{t-1} \\
\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right) z_t &= 200 + \left(1 + 0.5B\right) a_t \\
z_t &= \frac{200}{1 - 1.2 + 0.7} + \frac{\left(1 + 0.5B\right)}{\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right)} a_t \\
&= 400 + \psi\left(B\right) a_t
\end{aligned}
$$

دالة الأوزان هي:

$$
\psi\left(B\right) = \frac{\left(1 - 0.5B\right)}{\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots
$$

نوجد الأوزان كالتالي:

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots\right)\left(1 - 1.2B + 0.7B^2\right) \equiv \left(1 + 0.5B\right) \\
&B : \psi_1 - 1.2 = 0.5 \Rightarrow \psi_1 = 1.7 \\
&B^2 : \psi_2 - 1.2\psi_1 + 0.7 = 0 \Rightarrow \psi_2 = 1.2\psi_1 - 0.7 = 1.34 \\
&B^3 : \psi_3 - 1.2\psi_2 + 0.7\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_3 = 1.2\psi_2 - 0.7\psi_1 = 0.418 \\
&\vdots \\
&B^j : \psi_j = 1.2\psi_{j-1} - 0.7\psi_{j-2} \\
&\psi_4 = 1.2\psi_3 - 0.7\psi_2 = \text{-}0.4364 \\
&\psi_5 = \text{-}0.81628 \\
&\psi_6 = \text{-}0.674056 \\
&\psi_7 = \text{-}0.237471 \\
&\psi_8 = 0.186874 \\
&\psi_9 = 0.390478 \\
&\psi_{10} = 0.337762
\end{aligned}
$$

ولها الشكل التالي:


4- دالة التنبؤ $z_n(\ell),\ \ell \ge 0$ تعطى بالعلاقة:

$$z_n(\ell) = E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \ge 1$$

مع

$$E\left(a_{n+j} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) = \begin{cases} a_{n+j}, & j \le 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}$$

$$E\left(z_{n+j} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right) = \begin{cases} z_{n+j}, & j \le 0 \\ z_n(j), & j > 0 \end{cases}$$

إذا:

$$\begin{aligned} z_n(\ell) &= E\left(z_{n+\ell} \middle| z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \ge 1 \\ &= E\left(200 + 1.2 z_{n+\ell-1} - 0.7 z_{n+\ell-2} + a_{n+\ell} + 0.5 a_{n+\ell-1} \mid z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \ge 1 \\ &= 200 + 1.2 E\left(z_{n+\ell-1} \mid z_n, z_{n-1}, \cdots\right) - 0.7 E\left(z_{n+\ell-2} \mid z_n, z_{n-1}, \cdots\right) \\ &\quad + E\left(a_{n+\ell} \mid z_n, z_{n-1}, \cdots\right) + 0.5 E\left(a_{n+\ell-1} \mid z_n, z_{n-1}, \cdots\right), \quad \ell \ge 1 \end{aligned}$$

$$\ell = 1: z_n(1) = 200 + 1.2 z_n - 0.7 z_{n-1} + 0.5 a_n$$

$$\ell = 2: z_n(2) = 200 + 1.2 z_n(1) - 0.7 z_n$$

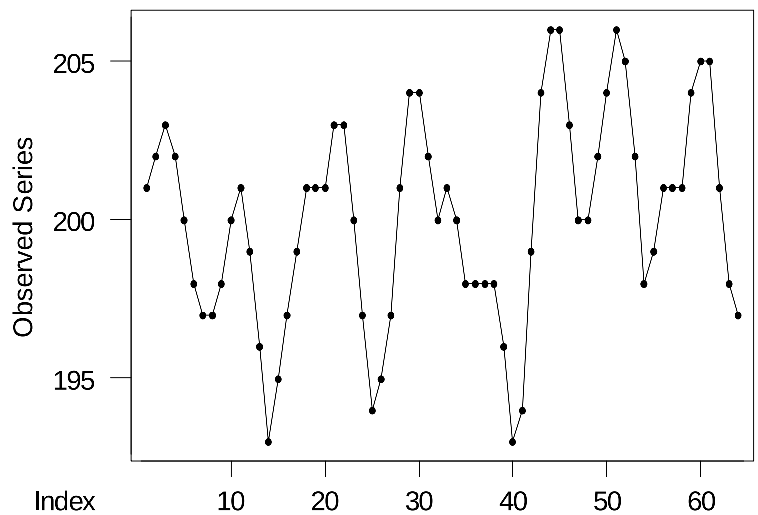
$$\ell \ge 3: z_n(\ell) = 200 + 1.2 z_n(\ell - 1) - 0.7 z_n(\ell - 2)$$

وبشكل دالة:

$$z_n(\ell)=\begin{cases}200+1.2z_n-0.7z_{n-1}+0.5a_n, & \ell=1\\ 200+1.2z_n(1)-0.7z_n, & \ell=2\\ 200+1.2z_n(\ell-1)-0.7z_n(\ell-2), & \ell\geq 3\end{cases}$$

<u>إجابة للسؤال الثاني:</u>

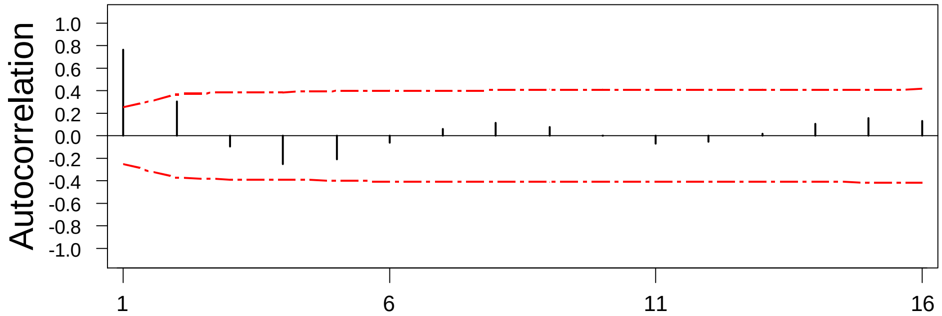
نرسم المتسلسلة




يبدو انها مستقرة في التوقع والتباين

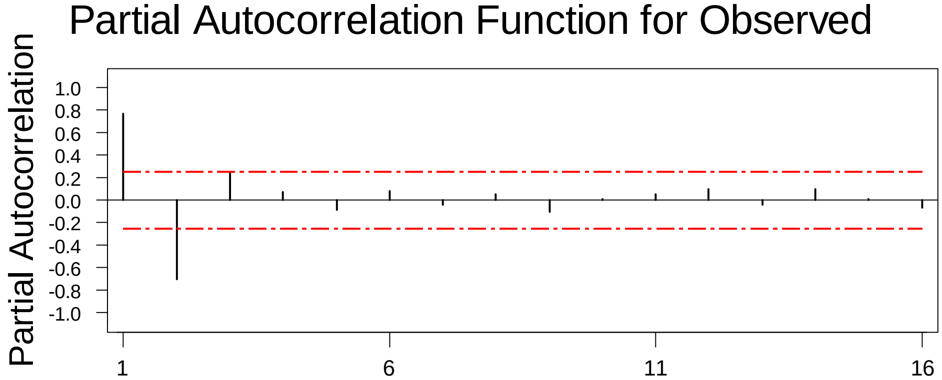
نرسم كلا من دالتي الترابط الذاتي والترابط الذاتي الجزئي

Autocorrelation Function for Observed




| Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ | Lag | Corr | T | LBQ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.77 | 6.18 | 39.96 | 8 | 0.11 | 0.55 | 56.38 | 15 | 0.16 | 0.75 | 60.52 |
| 2 | 0.31 | 1.67 | 46.47 | 9 | 0.08 | 0.38 | 56.84 | 16 | 0.13 | 0.63 | 62.00 |
| 3 | -0.09 | -0.48 | 47.06 | 10 | -0.00 | -0.01 | 56.84 | | | | |
| 4 | -0.26 | -1.33 | 51.72 | 11 | -0.07 | -0.33 | 57.21 | | | | |
| 5 | -0.21 | -1.06 | 54.89 | 12 | -0.06 | -0.27 | 57.47 | | | | |
| 6 | -0.06 | -0.32 | 55.19 | 13 | 0.02 | 0.08 | 57.49 | | | | |
| 7 | 0.06 | 0.29 | 55.45 | 14 | 0.11 | 0.52 | 58.44 | | | | |

Partial Autocorrelation Function for Observed




| Lag | PAC | T | Lag | PAC | T | Lag | PAC | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.77 | 6.18 | 8 | 0.05 | 0.44 | 15 | 0.01 | 0.04 |
| 2 | -0.71 | -5.68 | 9 | -0.11 | -0.87 | 16 | -0.07 | -0.56 |
| 3 | 0.24 | 1.91 | 10 | 0.01 | 0.06 | | | |
| 4 | 0.07 | 0.56 | 11 | 0.05 | 0.42 | | | |
| 5 | -0.08 | -0.67 | 12 | 0.10 | 0.77 | | | |
| 6 | 0.08 | 0.62 | 13 | -0.04 | -0.35 | | | |
| 7 | -0.04 | -0.34 | 14 | 0.09 | 0.74 | | | |

كلا من الدالتين تبين ان المتسلسلة مستقرة وهي على الشكل $ARMA(p,q)$ نطبق مجموعة من النماذج لقيم $q=0,1,2$ $p=0,1,2$ ونأخذ اقل قيمة للمعيار $AIC(m)=n\ln\sigma_a^2+2m$ كالتالي:

$ARMA(1,0)$ 1-

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 0.7841 | 0.0803 | 9.77 |
| Constant | 43.1776 | 0.2587 | 166.90 |
| Mean | 199.954 | 1.198 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 264.844 (backforecasts excluded)

MS = 4.272 DF = 62

= 64 ln(4.272)+2(3) = 64(1.452)+6 = 98.928 $AIC\left(m\right)=n\ln\sigma_a^2+2m$

$ARMA(2,0)$ 2-

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 1.3568 | 0.0870 | 15.60 |
| AR 2 | -0.7422 | 0.0872 | -8.51 |
| Constant | 77.0740 | 0.1768 | 435.96 |
| Mean | 200.013 | 0.459 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 121.868 (backforecasts excluded)

MS = 1.998 DF = 61

= 64 ln(1.998)+2(4) = 64(0.692)+8 = 52.288 $AIC\left(m\right)=n\ln\sigma_a^2+2m$

$ARMA(0,1)$ 3-

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| MA 1 | -0.8772 | 0.0775 | -11.32 |
| Constant | 200.032 | 0.464 | 430.96 |
| Mean | 200.032 | 0.464 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 252.640 (backforecasts excluded)

MS = 4.075 DF = 62

$= 64\ln(4.075) + 2(3) = 64(1.40487) + 6 = 95.912\ AIC(m) = n\ln\sigma_a^2 + 2m$

$ARMA(0,2)$ 4-

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| MA | 1 | -1.3321 | 0.1042 | -12.78 |
| MA | 2 | -0.6491 | 0.1032 | -6.29 |
| Constant | | 200.038 | 0.580 | 344.69 |
| | Mean | 200.038 | 0.580 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 149.291 (backforecasts excluded)

MS = 2.447 DF = 61

$= 64\ln(2.447) + 2(4) = 64(0.89486) + 8 = 65.271\ AIC(m) = n\ln\sigma_a^2 + 2m$

$ARMA(1,1)$ 5-

| Type | | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|---|
| AR | 1 | 0.6823 | 0.1023 | 6.67 |
| MA | 1 | -0.6832 | 0.1054 | -6.48 |
| Constant | | 63.5287 | 0.3342 | 190.09 |
| | Mean | 199.954 | 1.052 | |

Number of observations: 64

Residuals: SS = 153.610 (backforecasts excluded)

MS = 2.518 DF = 61

$= 64\ln(2.518) + 2(4) = 64(0.92346) + 8 = 67.101\ AIC(m) = n\ln\sigma_a^2 + 2m$

$ARMA(2,1)$ 6-

Model cannot be estimated with these data

$ARMA(1,2)$ 7-

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 0.5112 | 0.1492 | 3.43 |
| MA 1 | -1.0134 | 0.1518 | -6.68 |
| MA 2 | -0.4821 | 0.1482 | -3.25 |
| Constant | 97.7668 | 0.4536 | 215.55 |
| Mean | 200.014 | 0.928 | |

```
                        Number of observations:  64
Residuals:       SS  =  126.688    (backforecasts
                                         excluded)
                              MS =   2.111  DF = 60
```

$$= 64\ \ln(2.111) + 2(5) = 64(0.74716) + 10 = AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

57.818

$ARMA(2,2)$ 8-

| Type | Coef | StDev | T |
|---|---|---|---|
| AR 1 | 1.1047 | 0.2011 | 5.49 |
| AR 2 | -0.5789 | 0.1608 | -3.60 |
| MA 1 | -0.4394 | 0.2275 | -1.93 |
| MA 2 | -0.1918 | 0.1973 | -0.97 |
| Constant | 94.8688 | 0.2824 | 335.90 |
| Mean | 200.041 | 0.596 | |

```
                        Number of observations:  64
Residuals:       SS  =  113.051    (backforecasts
                                         excluded)
                              MS =   1.916  DF = 59
```

$$= 64\ \ln(1.916) + 2(6) = 64(0.65) + 12 = 53.6\ AIC(m) = n \ln \sigma_a^2 + 2m$$

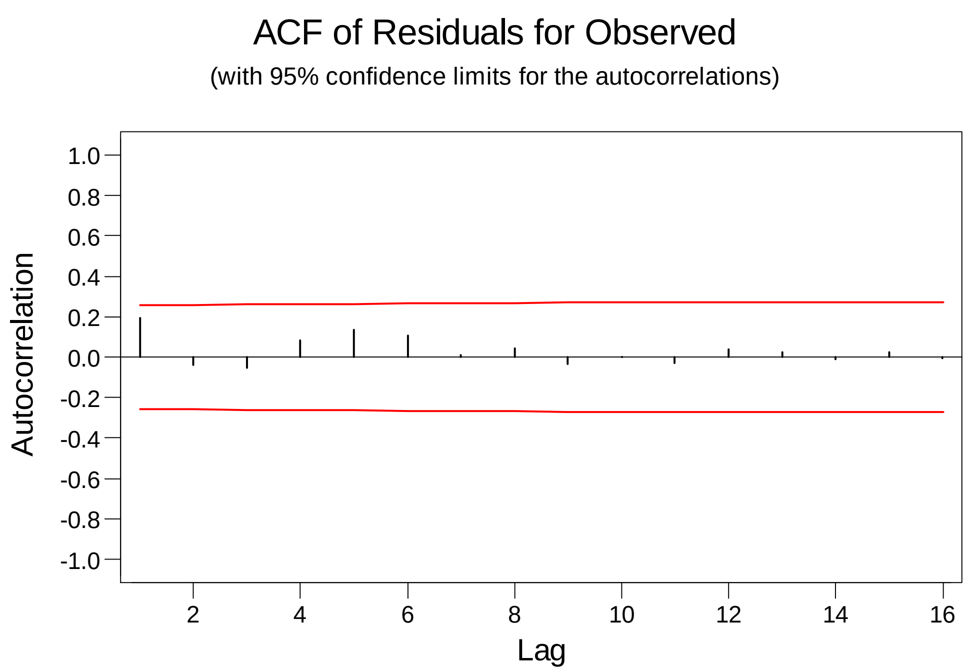
ونلخصها في الجدول التالي:

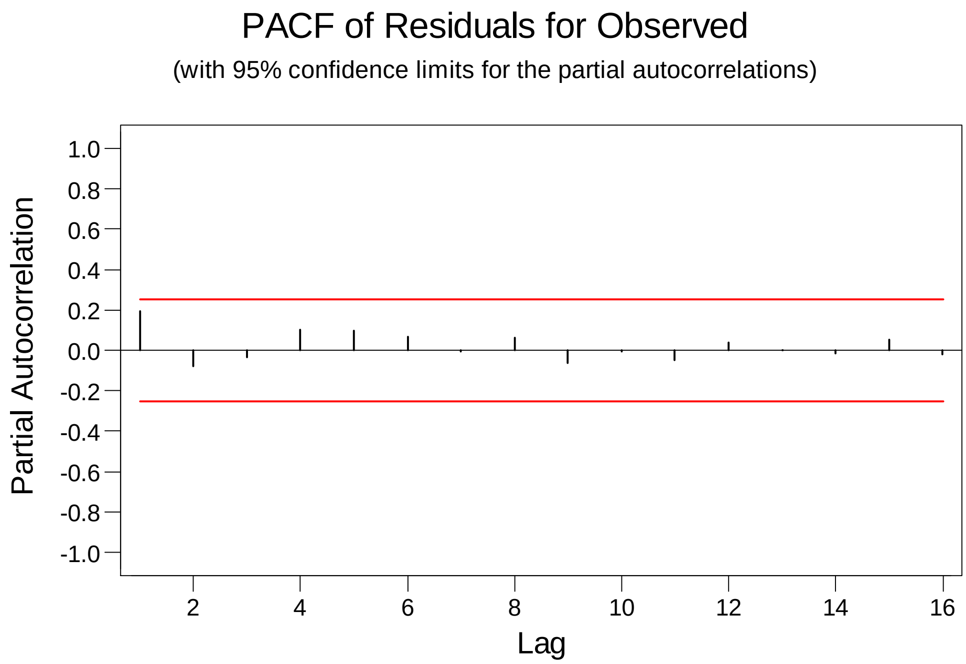
| $ARMA(p,q)$ | $AIC(m)$ | $\min AIC(m)$ |
|---|---|---|

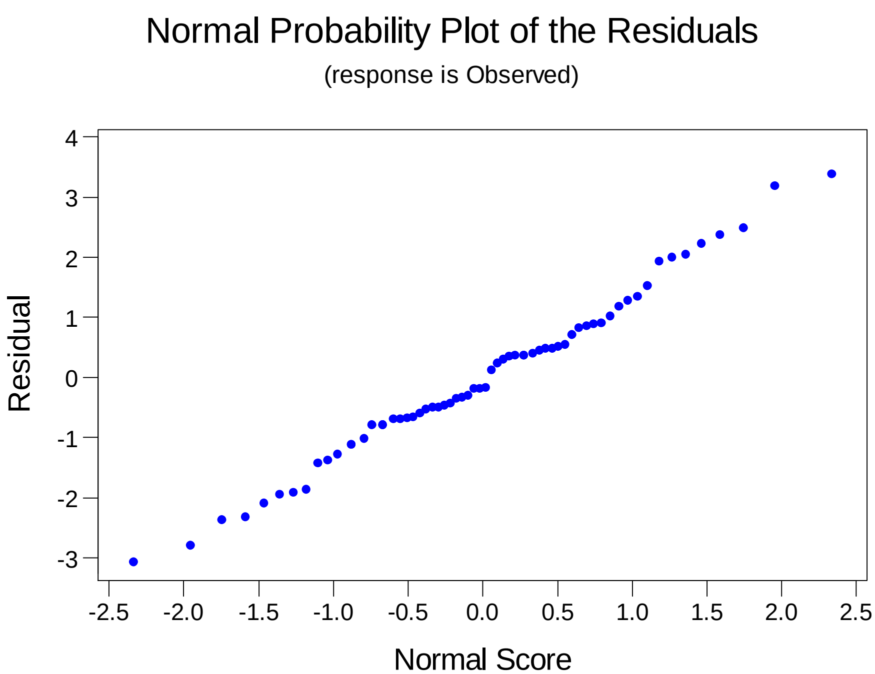
| | | |
|---|---|---|
| $ARMA(0,0)$ | NA | |
| $ARMA(1,0)$ | 98.928 | |
| $ARMA(2,0)$ | 52.288 | * |
| $ARMA(0,1)$ | 95.912 | |
| $ARMA(0,2)$ | 65.271 | |
| $ARMA(1,1)$ | 67.101 | |
| $ARMA(2,1)$ | NA | |
| $ARMA(1,2)$ | 57.818 | |
| $ARMA(2,2)$ | 53.6 | |

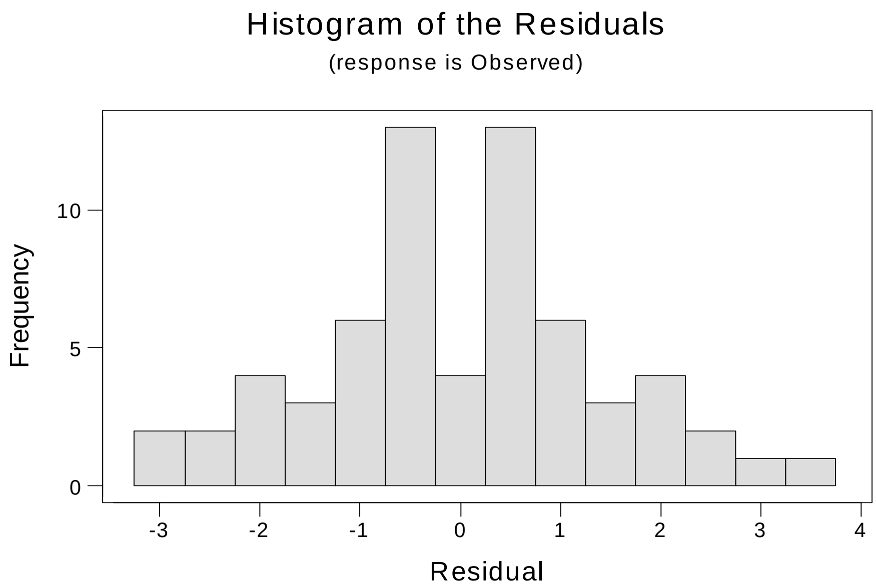
نلاحظ ان أقل قيمة لمعيار المعلومات الذاتي $AIC$ للنموذج $ARMA(2,0)$

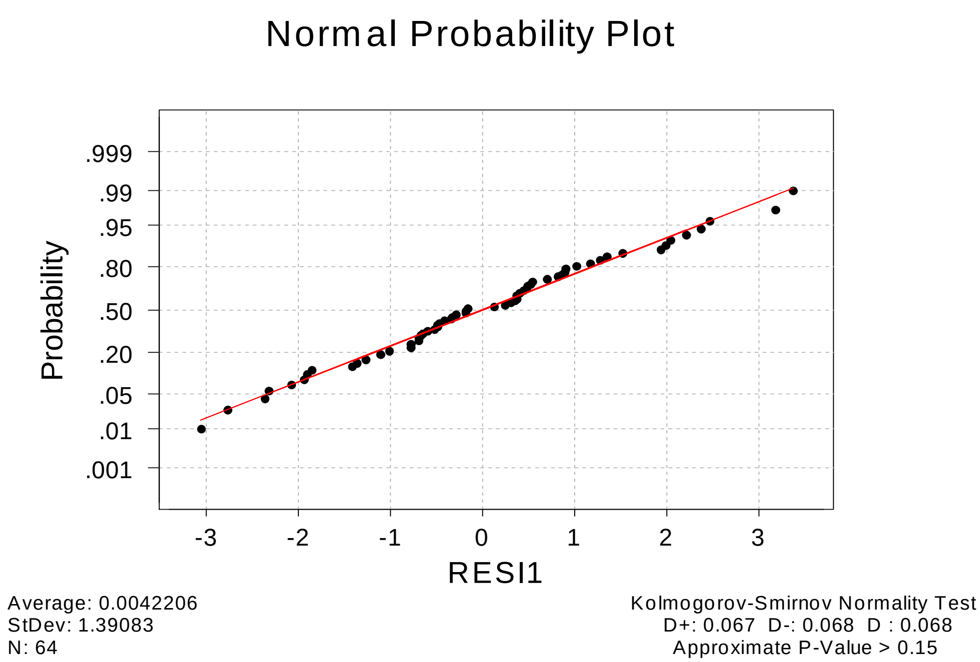
2- فحص وإختبار البواقي:




PACF of Residuals for Observed
(with 95% confidence limits for the partial autocorrelations)
Partial Autocorrelation
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
2
4
6
8
10
12
14
16
Lag


Normal Probability Plot of the Residuals
(response is Observed)
Residual
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
Normal Score

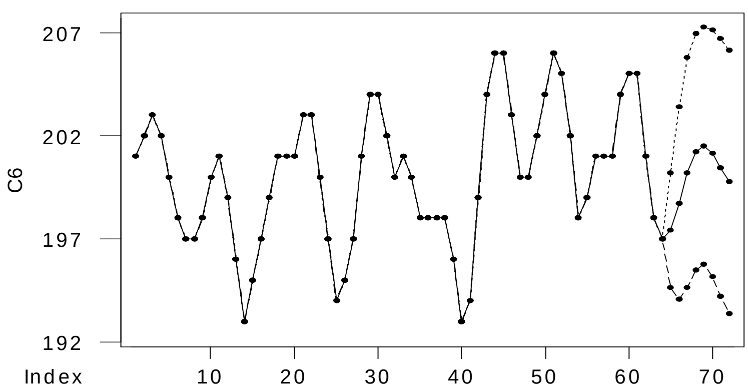



نلاحظ أن البواقي تجتاز كل الإختبارات وهذا يعني ان النموذج المقترح مناسب.

3- تنبؤات للقيم المستقبلية حتى 8 أزمنة تقدم مع فترات تنبؤ 95%

| | | Forecasts from period 64 | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | 95 Percent Limits | |
| Period | Forecast | Lower | Upper |
| | | | Actual |
| 65 | 197.419 | 194.648 | 200.190 |
| 66 | 198.729 | 194.059 | 203.400 |
| 67 | 200.196 | 194.621 | 205.772 |
| 68 | 201.215 | 195.480 | 206.949 |
| 69 | 201.507 | 195.756 | 207.258 |
| 70 | 201.148 | 195.181 | 207.116 |
| 71 | 200.445 | 194.202 | 206.687 |
| 72 | 199.756 | 193.378 | 206.134 |



# المراجع:


1- Abraham, B. and Ledoter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*, John Wiley, New York.

2- Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, John Wiley, New York.

3- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control*, 2nd ed., Holden-Day, San Francisco.

4- Montgomery, D. C., Johnson, L. A. and Gardiner, J. S. (1990). *Forecasting and Time Series Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill International Edition.

5- Makridakis, S., Wheelwright, S. C. and McGee, V. E. (1983). Forecasting Methods and Applications, 2nd ed., John Wiley, New York.

6- Wei, W. W. S. (1990). *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*, Addison Wesley.

7- *Minitab Reference Manual*, Release 11 for Windows. (1998).


للأسف الشديد لاتوجد حسب علمي مراجع عربية تغطي كل أو جزء من محتوى المادة المغطاة في هذا الكتاب وأرجوا من أي طالب أو باحث أو مدرس يعلم بمثل هذا المرجع او الكتاب أن يرسل لي ملاحظة على البريد الإلكتروني:


abarry@abarry.ws أو abarry@ksu.edu.sa