*مبرهنة*: إذا كانت $f$ متصلة عند $z_0$ و $g$ متصلة عند $f(z_0)$ فإن $g \circ f$ متصلة عند $z_0$.

افترض $\epsilon > 0$:

بما أن $f(z_0)$ نقطة داخلية لـ $D_g$ وأن $g$ متصلة عند $f(z_0)$

فإنه يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث:

$f(w)$ معرفة وأن:

$|w - f(z_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(w) - g(f(z_0))| < \epsilon$.

حيث إن $f$ متصلة عند $z_0$ فإنه:

يوجد $\delta > 0$ بحيث $f(z)$ معرفة وأن:

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \delta_1$.

الآن:

If $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon$

$\Leftarrow$ $g \circ f$ متصلة عند $z_0$.

---

$|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

س/ متى تتحقق شرط المساواة؟

الحل:

إذا كان $k < 0$, $z_1 = kz_2$ أي كلا العددين على استقامة واحدة مرورا بنقطة الأصل لكن بعكس الاتجاه حول نقطة الأصل.

---

تمرين (6)

عوض

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} , & z \neq 0 \\ 0 , & z = 0 \end{cases}$$

$y = 0$

$y = x$ تحقق

هذه الدالة متصلة عند $z=0$ ~~[illegible]~~ وتحقق كوشي ريمان في $z = 0$

ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $z = 0$ .

* لكن تفحص كوشي ريمان احسب النهاية عندما $x \to 0$ و $y \to 0$ ومن ثم احسبها عند

$x = y$ ، أي $z = x + ix$

العكس

أثبت أن الدالة $f(z)=\begin{cases} \bar{z}^2/z \ ; & z\neq 0 \\ 0 \ ; & z=0 \end{cases}$

غير قابلة للاشتقاق عند $z=0$

**الحل:**

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2/z-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z^2} \quad \cdots (*)$$

نأخذ مسارين يمران بـ $z=(0,0)$

**الأول:** $y=0$ (محور $x$) $\Leftarrow$ $z=x$ و $\bar{z}=x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0} 1 = 1$$

**الثاني:** $y=x$ $\Leftarrow$ $z=x+ix$ $\Leftarrow$ $\bar{z}=x-ix$

$(\bar{z})^2=-2x^2 i$ و $z^2=2x^2 i$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2 i}{2x^2 i}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$$

النهايتان مختلفتان $\Leftarrow$ النهاية في $(*)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ $f'(0)$ غير موجودة