لا يكتب في هذا الهامش

تمارين مقرر ٢٨٧ ريض فصل ١ - عام ١٤٤٢هـ
(الفصل الأول)

١) أحسب ناتج المقدار: $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

٢) صف وارسم الحل الهندسي لكل مما يلي:

(أ) $|z-i|=2$ (ب) $|z+2i|+|z-2i|=6$

(جـ) $z(\bar{z}+2)=3$ (د) $Im(z^2)=4$

٣) صف هندسياً كل منطقة من المناطق التالية:

(أ) $1<|z+i|\le 2$ (ب) $Re(z^2)>1$

(جـ) $|z+3i|>4$ (د) $|z+2-3i|+|z-2+3i|<10$

٤) أحسب المقدار التالي: $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

٥) (أ) أثبت أن: $\dfrac{\sin(4\theta)}{\sin(\theta)}=8\cos^3(\theta)-4\cos(\theta)=2\cos(3\theta)+2\cos(\theta)$

(ب) أثبت أن: $\cos(4\theta)=8\sin^4(\theta)-8\sin^2(\theta)+1$

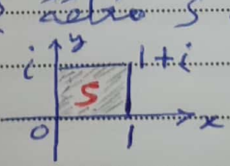
٦) أوجد جميع الجذور: (أ) $(-4+4i)^{\frac{1}{5}}$ (ب) $(2+2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$ (جـ) $(-16i)^{\frac{1}{4}}$

٧) حل كلاً من المعادلات: (أ) $z^4+81=0$ (ب) $z^6+1=\sqrt{3}i$

٨) أثبت أن $1+\cos(72^\circ)+\cos(144^\circ)+\cos(216^\circ)+\cos(288^\circ)=0$

٩) أوجد كل الجذور: $(1+z)^5=(1-z)^5$

١٠) لتكن S مجموعة كل الأعداد $a+ib$ حيث $a,b\in\mathbb{Q}$ الواقعة داخل المربع. هل S مغلقة؟ محدودة؟ مفتوحة؟ مترابطة؟ نطاق؟



١١) أثبت أن معادلة الخط المار بـ z_1 و z_2 تعطى بـ: $\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)=0$

١٢) مثل هندسياً مجموعة الأعداد z لكل مما يلي:

(أ) $|z|>|z-1|$ (ب) $|z+2|>1+|z-2|$

تمارين مقرر ٤٨٧ ريض - فصل ١ - ١٤٤٢هـ

الفصل الثاني

١) أوجد صورة المربع الذي رؤوسه $(0,1)$ ، $(1,1)$ ، $(1,0)$ ، $(0,0)$ تحت تأثير كل من الدالتين: (أ) $f(z)=z^2$ (ب) $f(z)=\frac{1}{z+1}$

٢) أوجد قيم z: (أ) $e^{4z}=i$ (ب) $e^{3z}=1$

٣) أثبت أن جذور المعادلة: $\sin(z)=a$ حقيقية حيث $-1\le a\le 1$

٤) أوجد جميع القيم: (أ) $Log(-4)$ (ب) $\log(\sqrt{3}-i)$

٥) أوجد جميع القيم: (أ) $\sin^{-1}(z)$ (ب) $\cos^{-1}(i)$ (ج) $\cosh^{-1}(i)$ (د) $(1+i)^i$ (هـ) $1^{\sqrt{2}}$ (و) $\cosh(\frac{\pi i}{2})$

٦) أحسب النهايتين: $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1}$ ، $\lim\limits_{z\to 1+i}\left[\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right]^2$

٧) أوجد نقاط عدم الاتصال لكل دالة:

(أ) $f(z)=\frac{2z-3}{z^2+2z+2}$ (ب) $f(z)=\cot(z)$

(جـ) $f(z)=\frac{\tanh z}{z^2+1}$

٨) أثبت أن المعادلة: $\tan(z)=(z)$ لها فقط جذور حقيقية.

٩) أثبت أن جميع المقادير $(1-i)^{\sqrt{2}i}$ تقع على خط مستقيم.

تمارين مقرر ٤٨٧ ريض - فصل ١ - ١٤٤٢هـ

الفصل الثالث

١) أثبت أن $f'(z)$ غير موجودة عند أي نقطة حيث $f(z)=z^2\bar{z}$

٢) أوجد النقاط الشاذة لكل من الدوال: (أ) $f(z)=\dfrac{3z-2}{z^2+2z+5}$

(ب) $f(z)=\dfrac{z}{z+i}$.

٣) أثبت أن الدالة $f(z)=x^2+iy^3$ غير تحليلية في أي مكان. هل معادلتا كوشي - ريمان متحققة عند $(0,0)$ ؟

٤) أثبت أن الدالة $u=x^2-y^2-2xy-2x+3y$ توافقية، وأوجد المرافق التوافقي لها v. عبر عن $f(z)=u+iv$ بدلالة z.

٥) أوجد النقاط الشاذة وصنفها لكل من الدوال:

(أ) $f(z)=\dfrac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$ (ب) $f(z)=\dfrac{\log(z+3i)}{z^2}$ (جـ) $f(z)=\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(د) $f(z)=\sqrt{z(z^2+1)}$ (هـ) $f(z)=\dfrac{\cos(z)}{(z+i)^3}$ (و) $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}$

(ط) $f(z)=\csc\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ (ح) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^{\frac{3}{2}}}$.

٦) أوجد دالة تحليلية $f(z)$ بحيث $\mathrm{Re}\{f'(z)\}=3x^2-4y-3y^2$ و $f(1+i)=0$.

٧) أثبت أن $f(z)=|z|^4$ قابلة للاشتقاق عند $z=0$، لكنها ليست تحليلية عندها.

٨) إذا كانت كل من u و v توافقية في نطاق D، فأثبت أن الدالة $g(z)=(u_y-v_x)+i(u_x+v_y)$ تحليلية في D.

تمارين مقرر ٤٨٧ ريض - فصل ١ - ١٤٤٢هـ

الفصل الرابع

١) أحسب $\int_{i}^{2-i} (3xy + iy^2)\, dz$ على القطعة المستقيمة الواصلة بين $z=i$ و $z=2-i$.

٢) أحسب $\oint_C \bar{z}^2\, dz$ حول الدوائر: (أ) $|z|=1$ ، (ب) $|z-1|=1$.

٣) أثبت أن: $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)\,d\theta = 0$.
(استخدم حساب التكامل $\oint_C e^{z}\,dz$ حول الدائرة: $|z|=1$.

٤) أحسب التكامل $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}\,dz$ حيث C الدائرة: $|z|=2$.

٥) أحسب: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz$ حيث: $C: |z|=3$ و $t>0$.

٦) أوجد القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ في $|z|\leq 1$:
(أ) $f(z)=z^2-3z+2$ (ب) $f(z)=z^4+z^2+1$ (ج) $f(z)=\cos(3z)$
(د) $f(z)=\frac{2z+1}{2z-1}$.

٧) أحسب: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2\,dz}{z^2+4}$ ، حيث C المربع الذي رؤوسه $\pm 2, \pm 2+4i$.

٨) أثبت أن الدالة $xy(x^2-y^2)$ ليس لها قيمة عظمى ولا صغرى مطلقتين داخل الدائرة: $|z|=1$.

لا يكتب في
هذا الهامش

تمارين مقرر ٤٨٧ ريض - فصل ١ - ١٤٤٢هـ.
الفصل الخامس

(١) أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$ لكل $z \in \mathbb{C}$.

(٢) أوجد متسلسلة لوران للدالة $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ في كل من الحالات:
(أ) $|z|<1$ (ب) $1<|z|<2$
(جـ) $|z|>2$

(٣) حدد وصنف كل النقاط الشاذة لكل دالة مما يلي:
(أ) $f(z) = \frac{1}{(2\sin z-1)^2}$ (ب) $f(z) = \frac{z}{e^{\frac{1}{z}}-1}$
(جـ) $f(z) = \cos(z^2+z^{-2})$ (د) $f(z) = \tan^{-1}(z^2+2z+2)$
(هـ) $f(z) = \frac{z}{e^{z}-1}$

(٤) لتكن: $f(z) = \frac{\tan^{-1}(z)}{z^4}$
(أ) اكتب متسلسلة لوران للدالة $f(z)$.
(ب) حدد منطقة تقارب المتسلسلة في (أ).
(جـ) أحسب التكامل $\oint_C f(z)dz$ حيث C المربع الذي رؤوسه $2\pm 2i, -2\pm 2i$

(٥) أوجد مجموع المتسلسلة: $1+\cos(\theta)+\frac{\cos(2\theta)}{2!}+\frac{\cos(3\theta)}{3!}+\dots$

لا يكتب في هذا الهامش

تمارين مقرر ٤٨٧ ريض - فصل ١ - ١٤٤٢هـ

الفصل السادس

(١) لكل دالة، حدد الأقطاب والرواسب عند كل قطب:

أ) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$ (ب) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ (جـ) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$

(٢) باستخدام الرواسب: أحسب التكامل $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

(٣) باستخدام الرواسب: أحسب التكامل $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^5}\,dx$

(٤) أحسب التكامل: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta$

١) أوجد طول وزاوية كلٍ من الأعداد المركبة:

(أ) $1-e^{i\theta}$ (ب) $1+e^{i\theta}$ (ج) $e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}$

٢) حل المعادلة: $z^3=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

٣) أوجد ناتج المقدار: $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$
بدون استخدام الحاسبة.

٤) لدينا $f(z)=\frac{1}{z}$. أوجد صورة كلٍ من المنحنيات التالية تحت تأثير $f(z)$:

(أ) المستقيم $y=3$. (ب) الدائرة $|z-3|=2$

(ج) الدائرة $x^2+y^2=2x$ (د) الخط $y=4x$

٥) أثبت أن: $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|=1 \text{ or } z\in\mathbb{R}$ (حيث $z\neq 0$)

٦) صف وارسم النقاط z التي تحقق كلاً مما يلي:

(أ) $z^2=|z|$ (ب) $|z-2i|=|i\bar{z}+4|$ (ج) $\frac{1}{z}=\bar{z}$

٧) أوجد الجذور التربيعية للعدد: $-3-4i$.

٨) لتكن $w=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ أوجد w^4.

٩) أوجد المجموع $\sum_{k=1}^{n}\cos^2(kx)$.

١٠) حل المعادلة $(1-z)^n=(1+z)^n$

لا يكتب في هذا الهامش

(١) أوجد النقاط التي عندها الدالة لكل من الدوال التالية قابلة للاشتقاق:

(أ) $f(z) = f(x+iy) = x^2 + axy + by^2$; $a, b \in \mathbb{R}$

(ب) $f(z) = f(x+iy) = x^2 + 3y^2 + 2ixy$

(٢) حل المعادلة $\sin(z) = 4$.

(٣) إذا كانت كلٌّ من u و u^2 توافقية، فأثبت أن u ثابتة على مجال D.

① أثبت أن: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}}{1+z^2}dz = \sin(t),\ t>0$ حيث γ الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 3 في الاتجاه الموجب.

② أحسب التكامل $\int_\gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$ حيث γ الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 3 في الاتجاه الموجب.

③ أحسب التكامل $\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}+2}dz$ حيث γ الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 1 في الاتجاه الموجب.

④ لتكن f كلية على قرص الوحدة D. افترض أنه لكل $z\in D$ $|f(z^2)| \geq |f(z)|$. أثبت أن f دالة ثابتة.

⑤ لتكن $\Omega = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ و $f(z) = e^{e^z}$
أحسب $\sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$

⑥ أثبت أن:

أ) $\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi$

ب) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \pi$

(١) صنف النقاط الشاذة لكل من الدوال التالية:

أ) $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{\sin^2(z)}$

ب) $f(z) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$

جـ) $f(z) = z^2 \sin\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

د) $f(z) = \sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$

هـ) $f(z) = e^{\cot(z)}$

و) $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

(٢) أوجد متسلسلة لوران للدالة: $f(z) = e^{\frac{\lambda}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$ في جوار ٠، حيث $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

(٣) أوجد الرواسب لكل دالة عند نقاطها الشاذة:

أ) $f(z) = \dfrac{1}{z+z^3}$

ب) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\pi z)}$

جـ) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$

د) $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$

هـ) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z^2}}$

و) $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$

لا يكـ
هذا الـ

(١) باستخدام الرواسب أحسب التكاملات التالية:

(أ) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+a\cos\theta)^2}, \quad 0<a<1$

(ب) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

(ج) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{(x^2+a^2)^2}\,dx$

(د) $\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$

(هـ) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(px)}{\cosh(x)}\,dx = \frac{\pi}{2\cosh\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \; ; \quad p \in \mathbb{R}$

(و) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin(\lambda x)}{1+x^4}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$