التبولوجيا العامة

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

19 جانفي 2020

المحتويات

1 الفضاءات التوبولوجية
- المقارنة بين توبولوجي وآخر على نفس المجموعة
- تمارين

مدخل للفضاءات التوبولوجية

في هذا الفصل نبدأ دراستنا بتعريف التوبولوجي، ومن ثم نعطي بعض الأمثلة مع التركيز على واحد منها وهو التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}$ حيث نبين أن كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تنتمي لهذا التوبولوجي والذي يكمن وراءه تسمية عناصر التوبولوجي بالمجموعات المفتوحة. ونعرف أيضاً الفضاء التوبولوجي. ثم ننهي هذا الفصل بدراسة المقارنة بين توبولوجي وآخر.

تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $\mathcal{I}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X. نقول أن $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X إذا تحققت الشروط االتالية:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{I}$
2. تقاطع أي عنصرين في $\mathcal{I}$ عنصراً في $\mathcal{I}$. أي لكل $U, V \in \mathcal{I}$ فإن $U \cap V \in \mathcal{I}$.
(أو تقاطع عدد منته من عناصر $\mathcal{I}$ عنصرا في $\mathcal{I}$)
3. اتحاد أي تجمع من عناصر $\mathcal{I}$ عنصراً في $\mathcal{I}$. (أي إذا كان $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}$ فإن $\cup_{j\in I} U_j \in \mathcal{I}$.

فيما يلي نستعرض بعضاً من الأمثلة لتوبولوجيات مختلفة.

التوبولوجي المتقطع- Discrete Topology

لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \mathcal{P}(X)$ هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من X فإن $\mathcal{I}$ توبولوجي على X يسمى التوبولوجي المتقطع ويرمز له بالرمز $\mathcal{I}_D$

التوبولوجي غير المتقطع- Indiscrete Topology

لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \{X, \emptyset\}$ فإن $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X يسمى التوبولوجي غير المتقطع أو التافه وهو أصغر توبولوجي يمكن تعريفه على X.

توبولوجي المتممة المنتهية-Cofinite Topology

لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, A \subset X; \#A^c < \infty\}$
($\#A$ هو عدد عناصر المجموعة A).
$\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X.

- $X, \emptyset \in \mathcal{I}$.
- لتكن $U, V \in \mathcal{I}$, $U, V \neq X, \emptyset$.

$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$. و بما أن $\#U^c < \infty$ و $\#V^c < \infty$ فإن $U \cap V \in \mathcal{I}$.

- ليكن $\{U_j, j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}$ غير $X, \emptyset$، فإن $(\cup_{j\in I} U_j)^c = \cap_{j\in I} U_j^c \in \mathcal{I}$ لأن كل $\#U_j^c < \infty$.

نرمز لهذه التبولوجيا بالرمز $\mathcal{I}_C$.

التوبولوجي المعتاد أو القياسي (Usual or Standard Topology)

لتكن $\mathbb{R} = X$. نقول أن مجموعة جزئية U من $\mathbb{R}$ مفتوحة إذا كانت إما المجموعة الخالية أو لكل $x \in U$ توجد فترة مفتوحة $(a, b) \subset U$ و تحتوي على x.
لتكن $\mathcal{I}$ مجموعة المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.
فإن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{R}$. لأن:

- $\mathbb{R}, \emptyset$ مفتوحتين.
- لتكن U, V مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين. إذا كان $x \in U \cap V$، يوجد $(a, b) \subset U$، $(c, d) \subset V$ و $x \in (a, b) \cap (c, d)$.

الفترة $(a, b) \cap (c, d)$ تحتوي على x و $(a, b) \cap (c, d) \subset U \cap V$. و بالتالي المجموعة $U \cap V$ مفتوحة.

- ليكن $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}$.

إذا كان $x \in \cup_{j\in I} U_j$، توجد فترة $(a, b) \subset U_1$ و تحتوي على x.

$(a, b) \subset \cup_{j\in I} U_j$.

إذاً $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على $\mathbb{R}$ يسمى التوبولوجي المعتاد أو القياسي (Usual or Standard Topology) على $\mathbb{R}$ ونرمز له بالرمز $\mathcal{I}_U$.

تعريف

الفضاء التوبولوجي هو مجموعة X وتوبولوجي $\mathcal{I}$ على X. نستخدم الكتابة $(X, \mathcal{I})$ للدلالة على الفضاء التوبولوجي، ولكن عادةً ما نستخدم التعبير X فضاء توبولوجي للدلالة على الزوج $(X, \mathcal{I})$ دون الإشارة للتوبولوجي $\mathcal{I}$

تعريف

ليكن $(X, \mathcal{I})$ فضاء توبولوجي.
تسمى عناصر التوبولوجي $\mathcal{I}$ بالمجموعات المفتوحة (Open sets)

مثال

أي من الفترات التالية في $\mathbb{R}$ تنتمي للتوبولوجي المعتاد؟

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$
5. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$
6. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$
7. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$
8. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$
9. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

نستنتج مما سبق أن الفترات الوحيدة التي تنتمي للتوبولوجي المعتاد هي الفترات المفتوحة. أي أن الفترات المفتوحة هي مجموعات مفتوحة في الفضاء المعتادK ولهذا السبب اتفق على تسمية عناصر أي توبولوجي بالمجموعات المفتوحة. سنستخدم بالتناوب التعبير U مجموعة مفتوحة في X أو U عنصراً في التوبولوجي.
الآن نعيد صياغة تعريف (??) باستخدام المجموعات المفتوحة.

تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{T}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X.

نقول أن $\mathcal{T}$ يعرف توبولوجي على X إذا تحققت الشروط التالية:

1. $X, \emptyset$ مجموعتان مفتوحتان.
2. تقاطع مجموعتين مفتوحتين في X مجموعة مفتوحة في X.
3. اتحاد أي تجمع من المجموعات المفتوحة في X مجموعة مفتوحة في X.

مثال

مجموعة الأعداد الصحيحة ليست مجموعة مفتوحة في الفضاء المعتاد. والسبب أنه لأي $m \in \mathbb{Z}$ فإن أي فترة مفتوحة $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ لكل $\varepsilon > 0$ تحوي أعداداً نسبية وغير نسبية، وبالتالي ليست محتواه في $\mathbb{Z}$.
بالمثل مجموعة الأعداد الكسرية ومجموعة الأعداد اللاكسرية كلتاهما لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد.

ملاحظة

رأينا في المثال ؟؟ أن كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في الفضاء المعتاد. والتساؤل المنطقي هنا هو، هل كل مجموعة مفتوحة هي فترة مفتوحة؟ الإجابة بالنفي فالفترتان $(0, 1)$ و $(2, 4)$ مجموعتان مفتوحتان في الفضاء المعتاد، وبالتالي فإن اتحادهما مجموعة مفتوحة، ولكنها ليست فترة مفتوحة.

مثال

لتكن X مجموعة و $x \in X$ ولتكن U مجموعة جزئية من X تحوي x فإن التجمع $\mathcal{I}_x = \{\emptyset, U \subset X : x \in U\}$ يعرف توبولوجي على X لأن:

- بما أن $x \in X$ فإن $X \in \mathcal{I}_x$ ومن التعريف $\emptyset \in \mathcal{I}_x$.
- لتكن $U, V \in \mathcal{I}_x$ فإن $x \in U$ و $x \in V$ وبالتالي $U \cap V \in \mathcal{I}_x$.
- ليكن $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}_x$.

بما أن $x \in \cup_{j \in I} U_j$، فإن $\cup_{j \in I} U_j \in \mathcal{I}_x$.

إذاً $\mathcal{I}$ توبولوجي على X ويسمى توبولوجي النقطة الخاصة (Particular Point topology) والزوج $(X, \mathcal{I}_x)$ فضاء النقطة الخاصة.

مثال

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن U مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تحقق لكل $x \in U$ توجد فترة نصف مغلقة نصف مفتوحة $[a, b)$ بحيث $x \in [a, b) \subset U$ وليكن

$$\mathcal{I} = \{\mathbb{R}, \emptyset, U \subset \mathbb{R};\ \forall\ x \in\ U,\ \exists[a, b) \subset\ U,\ \ x \in [a, b)\}$$

$\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على $\mathbb{R}$ ويسمى توبولوجي النهاية السفلى.

المقارنة بين توبولوجي وآخر على نفس المجموعة

ليكن $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ كل منهما توبولوجي على المجموعة X.

1. نقول أن $\mathcal{I}_1$ أصغر (coarser) من $\mathcal{I}_2$ إذا كان كل عنصر في $\mathcal{I}_1$ عنصراً في $\mathcal{I}_2$. وفي هذه الحالة نقول أيضاً أن $\mathcal{I}_2$ أكبر (finer) من $\mathcal{I}_1$. إذا كان $\mathcal{I}_1$ أصغر من $\mathcal{I}_2$ نكتب $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$. وإذا كان $\mathcal{I}_2$ أكبر من $\mathcal{I}_1$ نكتب $\mathcal{I}_2 \supset \mathcal{I}_1$.
2. إذا كان $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ و $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$ نقول أن $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ متطابقان ونكتب $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I}_2$.
3. إذا تحقق أي من $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ أو $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$ نقول أن $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ قابلان للمقارنة. وإذا لم يتحقق أي منهما نقول أنهما غير قابلين للمقارنة، ونكتب ذلك $\mathcal{I}_1 \not\equiv \mathcal{I}_2$.

مثال

قارن بين فضاء المتممة المنتهية $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ والفضاء المعتاد، $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ والفضاء المتقطع $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_D)$.

$(\mathcal{I}_C \subset \mathcal{I}_U, \mathcal{I}_U \not\subset \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_C \subset \mathcal{I}_D, \mathcal{I}_U \subset \mathcal{I}_D, \mathcal{I}_D \not\subset \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_D \not\subset \mathcal{I}_U)$.

تمارين

تمرين 1 :
إذا كان $\mathcal{C}$ تجمع من المجموعات الجزئية من المجموعة X. بفرض أن $X, \emptyset$ نتميان إلى $\mathcal{C}$ وأن اتحاد عدد منته وتقاطع أي عدد من عناصر $\mathcal{C}$ عنصرا في $\mathcal{C}$، أثبت أن التجمع $\mathcal{I} = \{A^c,\ A \in \mathcal{C}\}$ توبولوجي على X.

تمرين 2 :
إ ذا كانت Y $f\colon (X, \mathcal{I}_X) \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى المجموعة Y (f ليست بالضرورة شاملة)، فأثبت أن التجمع

$$\mathcal{I}_Y = \{V \subset Y;\ f^{-1}(V) \in \mathcal{I}_X\}$$

يعرف تبولوجي على Y يسمى هذا التوبولوجي, بالتوبولوجي المستحث على Y (Induced Topology).

تمرين 3 :
لتكن X مجموعة غير منتهية وليكن

$$\mathcal{I} = \{X, \emptyset, A \subset X;\ \ A^c \text{ countable}\}.$$

أثبت أن $\mathcal{I}$ توبولوجي على X.
صف التوبولوجي إذا كانت X مجموعة قابلة للعد.

تمرين 4 :
لتكن

$$\mathcal{I}_L = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a);\ \ a \in \mathbb{R}\}.$$

أثبت أن $\mathcal{I}_L$ يعرف توبولوجي على $\mathbb{R}$ يسمى توبولوجي الشعاع الأيسر (Left Ray Topology)
ويرمز له بالرمز $\mathcal{I}_L$.

تمرين 5 :
لتكن X مجموعة غير خالية و A مجموعة جزئية غير خالية من X وليكن $\mathcal{I} = \{\emptyset, U\}$ تجمع من المجموعات الجزئية في X حيث U تمثل جميع المجموعات الجزئية في X والتي تحوي A.
أثبت أن $\mathcal{I}$ توبولوجي على X.
ما هو التوبولوجي عندما تكون $X = A$؟
ما هو التوبولوجي عندما تكون $\emptyset = A$؟

تمرين 6 :
أعط مثالا لتجمع من المجموعات المفتوحة التي تقاطعها مجموعة غير مفتوحة.

تمرين 7 :

ليكن $\mathcal{I}$ تبولوجي على X يتكون من أربعة عناصر، أي $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, A, B\}$ حيث A و B مجموعات جزئية فعلية غير خالية من X.

ما الشروط الواجب توافرها على A و B ليحقق شروط التوبولوجي؟

تمرين 8 :

ليكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_\alpha,\ \alpha \in J\}$ تجمع التوبولوجيات المعرفة على X.

أثبت أن $\cap_{\alpha \in J} \mathcal{I}_\alpha$ توبولوجي على X

تمرين 9 :
لتكن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت $U_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$. ليكن

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, U_1, U_2, \ldots\}$$

أثبت إن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{Z}^+$.
اكتب جميع المجموعات المفتوحة التي تحوي العدد 7.

تمرين 10 :
إذا كان $\mathcal{I}$ توبولوجي على X.
أثبت إن $\mathcal{I}$ التوبولوجي المتقطع إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة أحادية مجموعة مفتوحة في X.

تمرين 11 :

1. هل هناك مجموعة بحيث أن التوبولوجي المتقطع والتافه متساويان؟
2. أعط مثالا لتوبولوجي على مجموعة غير منتهية يحتوي فقط عددا منتهيا من العناصر (لا تستخدم التوبولوجي التافه).

تمرين 12 :
أثبت أن تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة.

تمرين 13 :
أعط مثالا لاثنين من التوبولوجيات على المجموعة X، بحيث أن اتحادهما لا يعرف تبولوجي على X.

تمرين 14 :
هل مجموعة الأعداد الكسرية وغير الكسرية مجموعات مفتوحة في الفضاء المعتاد؟

تمرين 15 :
قارن بين فضاء الشعاع الأيسر $(\mathbb{R}_{\mathcal{I}_L})$ والفضاء المعتاد $(\mathbb{R}_{\mathcal{I}_U})$ وفضاء المتممة المنتهية $(\mathbb{R}_{\mathcal{I}_C})$.