الفضاءات التبولوجية الجزئية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

19 جانفي 2020

المحتويات

الفضاءات التبولوجية الجزئية

قبل البدء بدراسة التوبولوجي الجزئي، سنقوم بدراسة كيفية استخدام أي دالة في تعريف توبولوجي على كل من X إذا أعطي توبولوجي على Y وكذلك على Y إذا أعطي توبولوجي على X وهو ما يعرف بالتوبولوجي المستحث.
إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X فإننا نستطيع تعريف أكثر من توبولوجي على A، ولكن ما نريده هو توبولوجي على A مرتبط بالتوبولوجي على X من أجل هذا سنستخدم التوبولوجي المستحث في تعريف توبولوجي على المجموعة A ثم نعطي تعريفا آخر مكافئا لهذا التعريف.

مبرهنة

لتكن $f\colon (X,\mathcal{I}_X) \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي $(X,\mathcal{I}_X)$ إلى المجموعة Y.
(f ليس بالضرورة شاملة). وليكن $\mathcal{I}_Y = \{V \subset Y;\ f^{-1}(V) \in \mathcal{I}_X\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من Y فإن $\mathcal{I}_Y$ توبولوجي على Y.

مثال

لتكن $X = Y = \mathbb{R}$ وليكن $(X, \mathcal{I}_U)$ الفضاء المعتاد ولتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ معرفة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

صف $\mathcal{I}_U$.

مبرهنة

لتكن $f\colon X \longrightarrow (Y, \mathcal{I}_Y)$ دالة من المجموعة X إلى الفضاء التوبولوجي $(Y, \mathcal{I}_Y)$.
(f ليست بالضرورة شاملة). وليكن $\mathcal{I}_X = \{f^{-1}(V) \subset X;\ \ V \in \mathcal{I}_Y\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X. فإن $\mathcal{I}_X$ توبولوجي على X.

تعريف

التوبولوجي $\mathcal{I}_X$ المعرف على X بالنظرية السابقة يسمى التوبولوجي المستحث على X من $\mathcal{I}_Y$ و f. (Induced Topology).

مثال

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ و $\mathcal{I}_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
لنعرف $f\colon X \longrightarrow Y$ بأنها $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$.
جد $\mathcal{I}_X$.

تعريف

إذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة X فإننا نعرف دالة الاحتواء
(Inclusion Function) $i\colon A \longrightarrow X$ و $i(x) = x$ لكل $x \in A$.

تعريف

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي $(X, \mathcal{I}_X)$ فإن التوبولوجي المستحث على A من X ودالة الاحتواء i يسمى بالتوبولوجي الجزئي على A ونرمز له بالرمز $\mathcal{I}_A$.

مبرهنة

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي $(X,\mathcal{I}_X)$ فإن التجمع،

$$\mathcal{I}_A=\{V\subset A;\ \ V=U\cap A,\ \ U\in\mathcal{I}_X\}$$

يعرف توبولوجي على A.

مثال

ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ الفضاء المعتاد ولتكن $A = [c, d]$ حيث $c, d \in \mathbb{R}$.
صف $\mathcal{I}_A$.

ملاحظة

من المثال السابق يتضح أن المجموعة المفتوحة في الفضاء الجزئي ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة في الفضاء نفسه. فمثلاً $[c, d]$ مفتوحة في $(a, b]$ لكنها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

تمهيدية

إذا كانت A مجموعة مفتوحة في X فإن كل مجموعة مفتوحة في A مجموعة مفتوحة في X.
أي لكل $V \in \mathcal{I}_A$، $V \in \mathcal{I}_X$.

تمارين

تمرين 1 :

ليكن $X = Y = \mathbb{R}$ و لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$$

صف التوبولوجي على Y إذا كان التوبولوجي على X توبولوجي المتممة المنتهية.

تمرين 2 :

إذا كان $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ فضاء المتممة المنتهية وكانت $A = [a, b]$.

صف التوبولوجي الجزئي $\mathcal{I}_A$.

تمرين 3 :
إذا كان $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_L)$ فضاء النهاية السفلى وكانت $A = (-\infty, a]$.
صف التوبولوجي الجزئي $\mathcal{I}_A$.