المجموعات المغلقة و الإنغلاقية و نقطة النهاية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

19 جانفي 2020

المحتويات

المجموعات المغلقة و الإنغلاقية و نقطة النهاية

لدينا الآن العديد من الأمثلة مما يمكننا من تقديم بعض المفاهيم التوبولوجية الأساسية. وسندرس في هذا الفصل المجموعات المغلقة وانغلاقية المجموعة، وكما ندرس مجموعة نقاط النهاية.

تعريف

ليكن X فضاء توبولوجي. نقول أن المجموعة الجزئية $F \subset X$ مجموعة مغلقة في X إذا كانت متممتها F^c مجموعة مفتوحة في X.

مثال

1. ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_L)$ فضاء الشعاع الأيسر.
ما المجموعات المغلقة في هذا الفضاء؟
2. ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ فضاء المتممة المنتهية.
صف المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.

مثال

سبق وأن بينا في مثال سابق أن الفترات المفتوحة هي الوحيدة من بين الفترات التي تكون مجموعات مفتوحة في الفضاء المعتاد. وحيث أن الفترات المغلقة هي متممات الفترات المفتوحة، فإن الفترات المغلقة تكون مجموعات مغلقة في الفضاء المعتاد، وهي الوحيدة من بين الفترات التي تكون مغلقة في هذا الفضاء.

مثال

نعلم أن كل مجموعة جزئية في الفضاء المتقطع هي مجموعة مفتوحة، وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية هي أيضا مجموعة مغلقة. أي، كل مجموعة جزئية في الفضاء المتقطع تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد. وكما عرفنا سابقا المجموعات المغلقة مستخدمين المجموعات المفتوحة، فإننا نستطيع تعريف المجموعات المفتوحة باستخدام المجموعات المغلقة.

تعريف

لتكن X فضاء توبولوجي. نقول أن المجموعة الجزئية U مجموعة مفتوحة في X إذا كانت متممتها U^c مجموعة مغلقة في X.

في الفضاء المتقطع وجدنا أن كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تكون مغلقة ومفتوحة، بينما في الفضاء المعتاد وجدنا أن الفترات المفتوحة تكون مجموعات مفتوحة، ولكنها ليست مغلقة والفترات المغلقة تكون مجموعات مغلقة، بينما الفترات نصف مغلقة نصف مفتوحة والفترات نصف مفتوحة نصف مغلقة ليست مفتوحة وليست مغلقة.
إن تجمع المجموعات الجزئية المغلقة في الفضاء X له خواص شبيهة بتلك الخواص التي يحققها تجمع المجموعات الجزئية المفتوحة في X.

مبرهنة

ليكن $(X, \mathcal{I})$ فضاء توبولوجي، وليكن $\mathcal{F} = \{F_j;\ j \in J\}$ تجمع كل المجموعات المغلقة في X فإن

1. $X, \emptyset \in \mathcal{I}$،
2. اتحاد عدد منته من عناصر $\mathcal{F}$ ينتمي إلى $\mathcal{F}$ أي أن اتحاد عدد منته من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة.
3. تقاطع أي من عناصر $\mathcal{F}$ ينتمي إلى $\mathcal{F}$. أي أن تقاطع أي من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة.

العكس: لتكن X مجموعة و $\mathcal{F}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X تحقق الثلاث حصائص 1)، 2(، 3) فإن تجمع متممات عناصر $\mathcal{F}$ تعرف توبولوجي على X بحيث تجمع المجموعات المغلقة في هذا التوبولوجي هو $\mathcal{F}$.

مبرهنة

ليكن A فضاء جزئيا من X فإن المجموعة B مغلقة في A إذا وفقط إذا كانت تساوي تقاطع مجموعة مغلقة في X مع A.

مبرهنة

ليكن B فضاء جزئي من الفضاء X. إذا كانت B مغلقة في A و A مغلقة في X فإن B مغلقة في X.

تعريف

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء X نعرف انغلاقية A (closure) بأنها تقاطع كل المجموعات المغلقة في X التي تحوي A ونرمز لها بالرمز $\mathrm{Cl}(A)$ أو بالرمز $\bar{A}$.
أي إذا كان $\{F_j;\ j\in J\}$ تجمع كل المجموعات المغلقة في X والتي تحوي A، فإن

$$\bar{A}=\bigcap_{j\in J}F_j.$$

مثال

ليكن $X = \{a, b, c, d\}$ و $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ فإن المجموعات المغلقة في X هي: $\mathcal{F} = \{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}\}$.

إذا كانت $A = \{c, d\}$ فإن المجموعات المغلقة التي تحوي A هي:

$X, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}$

بالتالي $\bar{A} = \{b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$.

إذا كانت $B = \{a, c\}$ فإن المجموعات المغلقة التي تحوي $\{a, c\}$ هي

$\{X, \{a, c, d\}\}$ أي أن $\bar{B} = \{a, c, d\}$.

مثال

إذا كانت $\mathbb{R}$ الفضاء المعتاد، أوجد $\bar{A}$

1. $A = (0, 1)$
2. A مجموعة منتهية في $\mathbb{R}$

مثال

في الفضاء المتقطع كل مجموعة جزئية مغلقة، وبالتالي تساوي انغلاقيتها.

نقدم في النظرية التالية بعضاً من خواص انغلاقية المجموعة.

مبرهنة

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية من X فإن:

1. $\bar{A}$ مجموعة مغلقة في X
2. $\bar{A}$ أصغر مجموعة مغلقة في X تحوي A. هذا يعني أن أي مجموعة مغلقة في X تحوي A تحوي أيضاً $\bar{A}$.
3. $A \subset \bar{A}$.
4. إذا كانت B مجموعة جزئية في X وكانت $A \subset B$، فإن $\bar{A} \subset \bar{B}$.
5. A مغلقة في X إذا وفقط إذا كانت $A = \bar{A}$.
6. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$، $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

في النظرية التالية نعطي مزيداً من خواص الانغلاقية.

مبرهنة

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X. فإن

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.

مبرهنة

لتكن A فضاء جزئي من الفضاء X ولتكن B مجموعة جزئية من A ولتكن $\bar{B}$ انغلاقية B في X فإن انغلاقية B في A تساوي $A \cap \bar{B}$.

إن التعريف الذي قدمناه لانغلاقية مجموعة، لا يعطينا طريقة ملائمة لإيجاد الانغلاقية لمجموعة ما: لأن تجمع كل المجموعات المغلقة كتجمع كل المجموعات المفتوحة عادة ما يكون كبيراً جداً مما يصعب معه إيجاد الانغلاقية. وتصنف النظرية التالية انغلاقية المجموعة باستخدام المجموعات المفتوحة. وقبل ذلك سندخل المفهوم التالي، سنقول أن المجموعة A تتقاطع مع المجموعة B إذا كان التقاطع $A \cap B$ مجموعة غير خالية.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. فإن $x \in \bar{A}$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة U في X تحوي x تتقاطع مع A. أي أن

$$x \in \bar{A} \iff \forall U \in \mathcal{I},\ x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset.$$

مثال

ليكن X فضاء المتممة المنتهية، لتكن A مجموعة جزئية من X.
صف $\bar{A}$.
لدينا حالتان:

1. A مجموعة منتهية. A مجموعة مغلقة. إذاً $A = \bar{A}$.
2. A مجموعة غير منتهية.
ليكن $x \in X$، ولتكن U مجموعة مفتوحة في X تحوي x. من تعريف المجموعة المفتوحة في فضاء المتممة المنتهية فإن U^c مجموعة منتهية، وحيث إن A مجموعة غير منتهية فإن $A \neq U^c$. بالتالي $U \cap A \neq \emptyset$. إذاً $x \in \bar{A}$ ومنه $\bar{A} = X$.

مثال

ليكن $\mathbb{R}$ الفضاء المعتاد. جد $\bar{A}$ إذا كانت A تساوي:

1. $A = (0, 1)$
2. $A = \{5, 6\} \cup (2, 4]$
3. $A = \mathbb{Z}^+$، $A = \mathbb{Z}$، $A = \mathbb{Q}$.

نقطة النهاية

هناك طريقة ثانية لوصف انغلاقية مجموعة، وتعتمد هذه الطريقة على أحد المفاهيم المهمة وهو نقطة النهاية، والذي سيقدمه التعريف التالي:

تعريف

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية من X. نقول أن $x \in X$ نقطة نهاية (Limit point) أو نقطة تجمع (Cluster point) أو نقطة تراكمية (Accumulation point) للمجموعة A، إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في X تحوي x تتقاطع مع A في نقطة تختلف عن x.

مجموعة نقاط النهاية تسمى المجموعة المشتقة (Derived Set) ونرمز لها بالرمز A'

$$x \in A' \iff \forall U \in \mathcal{I},\ x \in U, \Rightarrow U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

مثال

إذا كان $A = (0,1)$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.
صف A' إذا كانت $\mathbb{R}$

1. الفضاء المعتاد.
2. الفضاء المتقطع.
3. فضاء الشعاع الأيسر.
4. فضاء المتممة المنتهية.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X، ولتكن A' المجموعة المشتقة للمجموعة A فإن $\bar{A} = A \cup A'$.

نتيجة

المجموعة الجزئية من الفضاء التوبولوجي مغلقة إذا وفقط إذا احتوت على جميع نقاط نهايتها.

مبرهنة

ليكن $\{A_j;\ j \in J\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من الفضاء X، فإن

1. $\overline{\bigcap_{j\in J} A_j} \subset \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}$.
2. $\bigcup_{j\in J} \overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{j\in J} A_j}$.

إن الأمثلة السابقة تظهر لنا أن نقطة النهاية للمجموعة A ربما تنتمي للمجموعة وربما لا تنتمي لها. إن عناصر A التي ليست نقاط نهاية تسمى نقاط معزولة للمجموعة A طبقاً للتعريف التالي:

تعريف

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X فإن $x \in A$ نقطة معزولة للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X تحوي x بحيث أن $U \cap A = \{x\}$.

من تعريف نقطة النهاية والنقطة المعزولة يمكن القول أنه كلما صغر التوبولوجي على X كلما كانت فرصة النقطة $X \ni x$ أفضل لكي تكون نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A، وكلما كبر التوبولوجي كلما كانت فرصة النقطة $X \ni x$ أفضل لكي تكون نقطة معزولة للمجموعة A.

تعريف

نقول إن المجموعة الجزئية A من الفضاء X كثيفة (Dense) في X إذا كانت $\bar{A} = X$.

مثال

1. في مثال ?? أثبتنا أنه إذا كانت مجموعة غير منتهية في فضاء المتممة المنتهية X، فإن $\bar{A} = X$.
   إذاً كل مجموعة غير منتهية في فضاء المتممة المنتهية كثيفة.
2. في مثال ?? أثبتنا أنه في الفضاء المعتاد فإن $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
   إذاً $\mathbb{Q}$ كثيفة في الفضاء المعتاد $\mathbb{R}$.
3. في الفضاء المتقطع X كل مجموعة جزئية A مغلقة، وبالتالي $\bar{A} = A$.
   إذاً لا توجد مجموعة كثيفة في X إلا X.
4. إذا كان $\mathbb{R}$ فضاء الشعاع الأيسر وكانت $A = (-\infty, a)$ حيث $a \in \mathbb{R}$، فإن $\bar{A} = \mathbb{R}$.
   إذاً A كثيفة في $\mathbb{R}$.

النظرية التالية تعطي شروطاً مكافئة لتعريف المجموعة الكثيفة.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X، فإن الشروط التالية متكافئة:

1. المجموعة A كثيفة في X.
2. إذا كانت B مجموعة مغلقة في X، وكانت $A \subset B$، فإن $X = B$.
3. لكل $x \in X$، كل مجموعة مفتوحة في X تحوي x تقاطعها مع A لا يساوي المجموعة الخالية.

تمارين

تمرين 1 :
لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ وليكن

$$\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

1. صف المجموعات المغلقة.
2. صف انغلاقية كل من المجموعات $\{a, b\}$، $\{a\}$ و $\{c, e\}$.
3. أي المجموعات في 2) كثيفة في X؟

تمرين 2 :

إذا كانت $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت $U_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ليكن

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, U_1, U_2, U_3, \ldots\}$$

فإن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{Z}^+$.

1. صف المجموعات المغلقة في الفضاء $(\mathbb{Z}^+, \mathcal{I})$.
2. أوجد انغلاقية المجموعتين $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ و $\{8, 25, 48, 86\}$
3. أوجد المجموعات الجزئية من $\mathbb{Z}^+$ والكثيفة في $\mathbb{Z}^+$.

تمرين 3 :
إذا كان X فضاء تبولوجي و A فضاء جزئي في X أثبت أن المجموعة الجزئية F مغلقة في A إذا وفقط إذا كانت $F = M \cap A$ حيث M مجموعة مغلقة في X.

تمرين 4 :
أثبت إذا كانت A مجموعة مغلقة في B وكانت B مجموعة مغلقة في X، فإن A مغلقة في X.

تمرين 5 :

أثبت ما يلي: إذا كانت x نقطة نهاية للمجموعة الجزئية $A \subset \mathbb{R}$ وكانت U مجموعة مفتوحة تحوي x فإن $A \cap U$ مجموعة غير منتهية.

تمرين 6 :

• تعريف "لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. يقال أن $x \in X$ نقطة معزولة للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X بحيث $U \cap A = \{x\}$.

أثبت ما يلي: إذا لم يكن للفضاء التوبولوجي X نقاط معزولة، فإن كل مجموعة مفتوحة في X لن يكون لها نقاط معزولة.

تمرين 7 :
يقال أن المجموعة A مجموعة تامة إذا وفقط إذا كانت $A = A'$.
أثبت أن المجموعة تامة إذا وفقط إذا كانت مغلقة وليس لها نقاط معزولة.

تمرين 8 :
لتكن $A, B \subset X$. أثبت أن $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

تمرين 9 :

ليكن $\mathcal{I}_1$، $\mathcal{I}_2$ كل تبولوجي على المجموعة غير الخالية X بحيث أن $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ ولتكن $A \subset X$.

1. أثبت أن كل نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_2$ هي أيضا نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_1$.
2. أعط مثالا توضح فيه أن وجود نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_1$ ولـكنها ليست نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_2$.

تمرين 10 :
إذا كانت U مجموعة مفتوحة في X و A مجموعة مغلقة في X. أثبت أن $A \setminus U$ مجموعة مفتوحة في X و $U \setminus A$ مجموعة مغلقة في X.

تمرين 11 :
أعط مثالا لمجموعات مغلقة في X بحيث أن اتحادها مجموعة غير مغلقة.

تمرين 12 :
صف انغلاقية المجموعات $(4, 9]$، $\{26, 55, 99\}$ و $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ في فضاء الشعاع الأيسر.

تمرين 13 :

ليكن X الفضاء اللامتقطع.

1. أوجد المجموعات المغلقة في X
2. أوجد انغلاقية أية مجموعة جزئية A في X
3. ما المجموعات الكثيفة في X؟

تمرين 14 :

لتكن A مجموعة كثيفة في الفضاء التوبولوجي X ولتكن U مجموعة مفتوحة في X.

أثبت أن $A \cap U \neq \emptyset$.

تمرين 15 :

ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ الفضاء المعتاد. ولتكن p نقطة لا تنتمي إلى $\mathbb{R}$. و ليكن $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p\}$.

نعرف التجمع $\mathcal{I}$ من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^*$ من النوعين:

النوع 1: U حيث U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

النوع 2: $\mathbb{R}^* \setminus B$ حيث B مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}$.

أثبت أن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{R}^*$.