النقاط الداخلية و الخارجية ونقاط الحد

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

19 جانفي 2020

المحتويات

النقاط الداخلية و الخارجية ونقاط الحد

نتابع في هذا الفصل دراستنا لبعض المفاهيم التوبولوجية الأساسية، وهي النقاط الداخلية ونقاط الحد والنقاط الخارجية.

تعريف

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من X.
نقول أن
النقطة $x \in X$ نقطة داخلية (Interior Point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X بحيث أن $x \in U \subset A$. 1
مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A نرمز لها بالرمز $\mathrm{Int}(A)$

تعريف

2 نقول إن النقطة $X \ni x$ نقطة خارجية للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X بحيث $x \in U \subset X \setminus A$.
مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A نرمز لها بالرمز $\mathrm{Ext}(A)$.

3 النقطة $X \ni x$ نقطة حد (Boundary point) للمجموعة A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة U في X تحوي x تتقاطع مع A ومع متممة A. أي أن $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ و $U \cap A \neq \emptyset$. مجموعة نقاط الحد للمجموعة A نرمز لها بالرمز $\mathrm{Bd}(A)$.

ملاحظة

إذا كانت $X \in x$ نقطة داخلية للمجموعة A فإنها تنتمي للمجموعة. بينما نقطة حد، فقد تنتمي للمجموعة أو إلى متممتها. وإذا كانت نقطة خارجية فإنها تنتمي إلى متممة المجموعة.

مثال

ليكن $X = \mathbb{R}$ ولتكن $A = (0,1)$ أوجد $Int(A), Ext(A), Bd(A)$ إذا كان الفضاء X

1. المعتاد.
2. المتقطع.
3. المتممة المنتهية.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X، فإن

1. $Int(A), Ext(A), Bd(A)$ منفصلة مثنى مثنى.
2. $X = Int(A) \cup Ext(A) \cup Bd(A)$
3. $Int(X \setminus A) = Ext(A)$
4. $Ext(X \setminus A) = Int(A)$
5. $Bd(A) = Bd(X \setminus A)$.

مبرهنة

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X، فإن

1. $Int(A)$ هي اتحاد كل المجموعات المفتوحة في X والمحتواه في A
2. $Int(A)$ مجموعة مفتوحة في X.
3. $Int(A)$ هي أكبر مجموعة مفتوحة في X والمحتواه في A، أي أن $Int(A) \subset A$.
4. إذا كانت $A \subset B$ فإن $Int(A) \subset Int(B)$.
5. $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$
6. $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.
7. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كانت $Int(A) = A$.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X فإن

1. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا لا تحتوي A على أي نقطة من نقاط حدها أي أن $Bd(A) \cap A = \emptyset$
2. A مجموعة مغلقة في X إذا وفقط إذا احتوت A جميع نقاط حدها أي أن $Bd(A) \subset A$.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X، فإن $\bar{A} = A \cup Bd(A) = Int(A) \cup Bd(A)$.

نهي هذا الفصل بإعطاء تعريف مكافئ لمجموعة الحد الذي يبين أيضاً أنها مجموعة مغلقة.

مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X فإن $Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

تمرين 1 :
لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ وليكن

$$\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, b.c.d\}, \{a, b, e\}\}$$

ولتكن
$A = \{a, b, c\}$ صف $\bar{A}, Int(A), Bd(A), Ext(A)$.

تمرين 2 :
إذا كانت $A = (0,1) \cup \{2,3\} \subset \mathbb{R}$. صف $\bar{A}, Int(A), Bd(A), Ext(A)$ للفضاءات التالية:

1. المعتاد
2. المتقطع
3. المتممة المنتهية
4. التافه
5. الشعاع الأيسر.

تمرين 3 :

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من X أثبت ما يلي:

1. $Int(A) = A \setminus Bd(A)$
2. أعط مثالا تبين فيه أن عكس $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$ ليس بالضرورة صحيحا.
3. افرض أن $Bd(A) \cap Bd(B) = \emptyset$ أثبت أن عكس 2) صحيحا.

تمرين 4 :
أعط مثالا تبين فيه أن الدالة f التي تعين لكل مجموعة A مجموعتها الداخلية، أي $f(A) = Int(A)$
ليست تبادلية مع الدالة g التي تعين لكل مجموعة انغلاقيتها، أي $g(A) = \bar{A}$. أي أثبت أن $gf \neq fg$.

تمرين 5 :
ليكن X فضاء تبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية من X نعرف مجموعة النقاط الخارجية $Ext(A)$ للمجموعة A بأنها $Ext(A) = Int(X \setminus A$. أثبت أن

1. $Ext(A \cup B) = Ext(A) \cap Ext(B)$.
2. $A \cap Ext(A) = \emptyset$.

تمرين 6 :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. إذا عرفنا $Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$. فأثبت ما يلي:

1. $Int(A)$ و $Bd(A)$ منفصلتان، وأيضا $Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$
2. $Bd(A) = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت A مغلقة ومفتوحة.
3. U مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كان $Bd(U) = \bar{U} \setminus U$.

تمرين 7 :

تعريف " يقال أن المجموعة المفتوحة U في الفضاء التوبولوجي X مجموعة مفتوحة منتظمة إذا كان $U = Int(\bar{U})$ ويقال أن المجموعة المغلقة M مجموعة مغلقة منتظمة إذا كان $M = \overline{Int(M)}$.

استنادا: إلى التعريف، أثبت أن

1. متممة المجموعة المفتوحة المنتظمة تكون مجموعة مغلقة منتظمة.
2. متممة المجموعة المغلقة المنتظمة تكون مجموعة مفتوحة منتظمة.

تمرين 8 :

أثبت ما يلي:

1. $Bd(A) \cap A = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.
2. $Bd(A) = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مغلقة ومفتوحة.
3. $Bd(Int(A)) \subset Bd(A) = \emptyset$ أعط مثالا يوضح أن المساواة لا تتحقق.
4. إذا كانت $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ فإن، $Bd(A \cup B) = Bd(A) \cup Bd(B)$.

تمرين 9 :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X، إذا عرفنا $Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ فأثبت ما يلي:

1. $Bd(A)$ و $Int(A)$ منفصلتان، وأيضا $Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$.
2. $Bd(A) = \emptyset$ إذا فقط و إذا كانت A مغلقة ومفتوحة.
3. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كان $Bd(A) = \bar{A} \setminus A$.

تمرين 10 :
ليكن X فضاء توبولوجي، ولتكن A مجموعة جزئية من X. تعرف مجموعة النقاط الخارجية $Ext(A)$ للمجموعة A بأنها $Ext(A) = Int(X \setminus A)$ أثبت ان

1. $Int\left((X \setminus A) \cup (X \setminus B)\right) = Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)$
2. $\text{Int}\ \emptyset = A \cap In(X \setminus A)$.