الفضاءات المترية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

27 أوت 2019

المحتويات

الفضاءات المترية

عند دراسة الفضاء المعتاد $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}^n$ بشكل عام، ندرك أهمية المسافة بين نقطتين في هذين الارتباط الوثيق بين التوبولوجي المعتاد على هذين الفضائين والدالة التي تعرف . الفضائين. سنر المسافة بين نقطتين في الفضائين.

خصص الفصل الأول من هذا الباب لتعميم دالة المسافة بين نقطتين يتطابق مع معلوماتنا عن الفضاء $\mathbb{R}^n$. نعرف ما يسمى بالمترك على مجموعة غير خالية ثم نعرف المسافة بين مجموعتين ونعمم تعريف قطر مجموعة.

إحدى الطرق الهامة في تعريف توبولوجي على مجموعة هي أن تعرف توبولوجي باستخدام المترك على المجموعة. في الفصل الثاني ندرس التوبولوجي المتري وكذلك ندرس بعضاً من خواصه. إحدى المسائل في التوبولوجي المتري والتي بقيت حتى خمسينيات القرن الماضي هي المسألة المترية. نثبت في نهاية الفصل إن الفضاء المعتاد $\mathbb{R}^n$ يحقق المترية

في هذا الفصل نقوم بدراسة دالة خاصة تسمى دالة المسافة أو المترك ثم نعرف الفضاء المتري وندرس خواصه.

تعريف

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية. يقال أن الدالة ذات القيمة الحقيقة $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة مسافة أو مترك على X إذا حققت الشروط التالية لكل $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
3. (التماثل) (Symmetry) $d(x, y) = d(y, x)$.
4. (المتراجحة المثلثية) (Triangle Inequality) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

مثال

لتكن $X \neq \emptyset$ ولنعرف $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$. فإن d مترك على X. نسميه المترك التافهه أو المترك المتقطعة (Discrete Metric)

مثال

لتكن $X = \mathbb{R}$ ولنعرف $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $d(x, y) = |x - y|$. وتسمى المترك المعتادة أو مترك اقليدس.

مثال

لتكن $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ معرفة كالتالي: $d(x,y)=x^2-y^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. فإن d ليست مترك لأن $d(x,y)$ ليست بالضرورة موجبة.

مثال

لتكن $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} :d$ معرفة كالتالي: $d(x, y) = x^2 + y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
d ليست مترك على $\mathbb{R}$ لأنه إذا كان $x = y \neq 0$, $d(x, y) \neq 0$.

مثال

لتكن $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ معرفة كالتالي: $d(x,y)=(x-y)^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.
d ليست مترك على $\mathbb{R}$ لأنه إذا كان $x>0$, $y<0$, $z=0$ $d(x,y)=x^2+y^2-2xy$,
$d(x,z)=x^2$, $d(y,z)=y^2$ و لكن $-2xy>0$.

مبرهنة

: متراجحة شفارتز (Schwarz Inequality)

لتكن $x, y \in \mathbb{R}^n$ حيث $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$، $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ فإن:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$$

أو ما تكافؤها

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

مبرهنة

المترك المعتادة على $\mathbb{R}^n$ (Usual Metric)

لتكن .

$d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي:

لكل $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ في $\mathbb{R}^n$ حيث $n \geq 1$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

فإن d مترك على $\mathbb{R}^n$ وتسمى المترك المعتادة (Usual Metric) أو مترك اقليدس (Euclidian Metric).

مبرهنة

المترك المربعة (Square metric) لتكن $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي:
لكل $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ في $\mathbb{R}^n$ حيث $n \geq 1$

$$d(x, y) = \max |x_j - y_j|;\ 1 \leq j \leq n$$

فإن d مترك على $\mathbb{R}^n$ وتسمى المترك المربعة (Square Metric)

مبرهنة

لتكن d مترك على X فإن الدالة $e\colon X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة كالتالي:
$e(x,y)=\min(1,d(x,y))$ مترك على X.

تعريف

الفضاء المتري هو زوج مرتب (X, d) من مجموعة غير خالية X ومترك d على هذه المجموعة.
سنستخدم التعبير X فضاءاً مترياً ليفهم من ذلك الزوج المرتب (X, d)

فيما يلي نتعرض لدراسة بعض المفاهيم والتي سبق لنا دراستها على أشكال هندسية معينة منها، قطر الدائرة، قطر المستطيل، قطر المربع, سنعمم هذه الفكرة إلى قطر أي مجموعة جزئية من فضاء متري، ثم نعرف المسافة بين نقطة ومجموعة، والمسافة بين مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري.

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري، ولتكن $A \neq \emptyset$ مجموعة جزئية من X وليكن $b \in X$.
نعرف المسافة كما يلي: $d(b, A) = \inf\{d(b, a);\ a \in A\}$

كنتيجة للتعريف: إذا كان $(b \in A)$ فإن $d(b, A) = 0$.

مثال

لنأخذ $(\mathbb{R}, d)$ ولتكن $A = (0,1)$ و $b = \frac{3}{2}$ فإن $d(b, A) = \inf\{d(a, \frac{3}{2}); a \in (0,1)\} = d(\frac{3}{2}, 1)\}$.

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري، ولتكن $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ مجموعات جزئية من X. نعرف المسافة بين A و B
بأنها

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b);\ a \in A, b \in B\}.$$

مثال

لنأخذ الفضاء المتري (X, d) ولتكن $A = (0, 1]$، $B_1 = (1, 2)$ و $B_2 = [1, 2)$.
جد ؟$d(A, B_1)$ و $d(A, B_2)$.
$d(A, B_1) = 0$ و $d(A, B_2) = 0$.
ملاحظة
$d(A, B) = 0$
إذا كانت $A \cap B \neq \emptyset$ لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري، ولتكن A مجموعة جزئية من X. نعرف قطر A بأنه
$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2;\ a_1, a_2 \in A\}$.

مثال

1. لنأخذ $(\mathbb{R}, d)$ و $A = (0, 1)$ و $\operatorname{diam}(A) = 1$.
2. المترك التافهة $(\mathbb{R}, d)$،

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad \operatorname{diam}(A) = 1$$

تعريف

لتكن $A \neq \emptyset$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري X يقال إن A محدودة إذا كان $\operatorname{diam}(A) < +\infty$ أو ما يكافئه: إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $d(a_1, a_2) \leq M$ لأي $a_1, a_2 \in A$.

تعريف

يقال إن المترك d محدودة إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن لكل $x, y \in A$ فإن $d(x, y) \leq M$

ملاحظة

لأي مترك نستطيع دائماً أن نعرف مترك محددة.

تمارين

تمرين 1 :
لتكن $X=\mathcal{C}[0,1]$ مجموعة الدوال ذات القيمة الحقيقية والمتصلة على الفترة المغلقة $[0,1]$.
إذا عرفت $d_1, d_2 : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ كما يلي: لكل $f, g\in X$

$$d_1(f,g)=\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$$

و

$$d_(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

اثبت أن d_1, d_2 كل تعرف متري على X.

تمرين 2 :

لتكن X مجموعة الدوال $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ القابلة للتكامل بمفهوم ريمان. إذا عرفت $d_1, d_2\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ كما يلي: لكل $f, g \in X$

$$d_1(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

و

$$d_(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

اثبت أن d_1 تعرف مترك على X ولكن d_2 لا تعرّف مترك على X.

تمرين 3 :

لتكن (x, y) و (z, w) نقطتان في $\mathbb{R}^2$ وضح أي من التالية لا تعرف متركاً على $\mathbb{R}^2$

1. $d((x, y), (z, w)) = \min(|x - z|, |y - w|)$.
2. $d((x, y), (z, w)) = (x.z)^2 + (y.w)^2$
3. $d((x, y), (z, w)) = |x| + |y| + |z| + |w|$

تمرين 4 :

ليكن (X, d) فضاء متري ولتكن A مجموعة جزئية من X.

اثبت أن الدالة $d_{A\times A} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ تعرف متركاً على A.

تمرين 5 :
أثبت أن أي من الدوال التالية

$$\rho(x, y) = |x - y|^2, \qquad d(x, y) = (x - y)^2$$

لا تعرف دالة على $\mathbb{R}$.

تمرين 6 :
ليكن (X, d) فضاء متري ولتكن A مجموعة جزئية من X.
أثبت أن $X \in \bar{A}$ إذا وفقط إذا كانت $d(x, A) = 0$.

تمرين 7 :
أثبت أن المجموعات الأحادية في الفضاءات المترية مجموعات مغلقة. أعط مثالا تبين فيه أن هذا ليس بالضرورة صحيحا للفضاءات التوبولوجية بشكل عام.

تمرين 8 :
ليكن (X, d) فضاء متري. إذا كانت الدالة معرفة كما يلي:
$\rho\colon (X \times X) \times (X \times X) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\rho((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d(y, w)$$

فاثبت أن ρ مترك على $X \times X$. عرف مترك للمجموعة X^n.

تمرين 9 :
لتكن $(X_1, d_1), \ldots (X_n, d_n)$ فضاءات مترية، ولتكن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y =$ $(y_1, \ldots, y_n)$ نقطتين اختياريتين في مجموعة الجداء $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$.
أثبت أن الدالة $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ والمعرفة

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

تعرف مترك على X.

تمرين 10 :
إذا كانت $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $n \geq 2$ معرفة $d(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$ لكل $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ في $\mathbb{R}^n$.
أثبت أن d مترك على $\mathbb{R}^n$.
ارسم عنصر القاعدة في حالة $n = 2$.

تمرين 11 :
لتكن $(X_1, d_1), \ldots (X_n, d_n)$ فضاءات مترية، ولتكن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ نقطتين اختياريتين في $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$.
أثبت أن الدالة المعرفة

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \ldots d_n(x_n, y_n)^2}$$

مترك على المجموعة X.

تمرين 12 :
أثبت أن المجموعات المنتهية في الفضاءات المترية ليس لها نقطة نهاية وبالتالي فهي مغلقة.

تمرين 13 :
أثبت أن الدالة $d\colon X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ تعرف متريك على X إذا وفقط إذا حققت الشرطين التالين لكل $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

تمرين 14 :
إذا كانت F مجموعة مغلقة في الفضاء المتري (X, d) وإذا كان $x \in X$ و $x \notin F$ أثبت أن $d(x, F) \neq 0$.

تمرين 15 :
أعط مثالا لمجموعتين جزئيتين مغلقتين وغير خاليتين من الفضاء المتري $(\mathbb{R}, d)$ بحيث $d(A, B) = 0$ لكن $A \cap B = \emptyset$.