

الفضاءات المترية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 أكتوبر 2019

1 مقدمة Metric Spaces

• المترك Metric

2 تمارين

الفضاءات المترية

عند دراسة الفضاء المعتاد \mathbb{R} أو \mathbb{R}^n بشكل عام، ندرك أهمية المسافة بين نقطتين في هذين الارتباط الوثيق بين التوبولوجي المعتاد على هذين الفضاءين والدالة التي تعرف . الفضاءين .
سنر المسافة بين نقطتين في الفضاءين .

خصص الفصل الأول من هذا الباب لتعميم دالة المسافة بين نقطتين يتطابق مع معلوماتنا عن الفضاء \mathbb{R}^n . نعرف ما يسمى بالمتري على مجموعة غير خالية ثم نعرف المسافة بين مجموعتين ونعمم تعريف قطر مجموعة.

إحدى الطرق الهامة في تعريف توبولوجي على مجموعة هي أن تعرف توبولوجي باستخدام المتري على المجموعة. في الفصل الثاني ندرس التوبولوجي المتري وكذلك ندرس بعضاً من خواصه. إحدى المسائل في التوبولوجي المتري والتي بقيت حتى خمسينيات القرن الماضي هي المسألة المترية. نثبت في نهاية الفصل إن الفضاء المعتاد \mathbb{R}^n يحقق المترية

في هذا الفصل نقوم بدراسة دالة خاصة تسمى دالة المسافة أو المترك ثم نعرف الفضاء المتري وندرس خواصه.

تعريف

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية. يقال أن الدالة ذات القيمة الحقيقية $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مسافة أو مترك على X إذا حققت الشروط التالية لكل

$$x, y, z \in X$$

$$d(x, y) \geq 0 \quad 1$$

$$d(x, y) = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } x = y \quad 2$$

$$d(x, y) = d(y, x) \text{ (Symmetry) (التماثل)} \quad 3$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \text{ (Triangle Inequality) (المترابحة المثلثية)} \quad 4$$

لتكن $X \neq \emptyset$ ولنعرّف $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ بتكون

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

فإن d مترية على X . نسميه المترية التافهة أو المترية المتقطعة
(Discrete Metric)

لتكن $X = \mathbb{R}$ ولنعرف $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$ وتسمى المترك المعتادة أو مترك اقليدس.

لتكن $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي: $d(x, y) = x^2 - y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. فإن d ليست مترية لأن $d(x, y)$ ليست بالضرورة موجبة.

لتكن $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي: $d(x, y) = x^2 + y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
 d ليست مترك على \mathbb{R} لأنه إذا كان $x = y \neq 0$, $d(x, y) \neq 0$.

لتكن $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي: $\forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = (x - y)^2$.
 d ليست مترية على \mathbb{R} لأنه إذا كان $x > 0, y < 0$, $d(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy > 0$,
 $d(y, z) = y^2, d(x, z) = x^2$ ولكن $-2xy > 0$.

مبرهنة

: متراجحة كوشي شفارتز (Cauchy-Schwarz Inequality) لتكن $x, y \in \mathbb{R}^n$ حيث $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ فإن:

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

أو ما تكافؤها

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n y_j^2.$$

مبرهنة

\mathbb{R}^n المترك المعتادة على (Usual Metric) لتكن .

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي:

لكل $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ في \mathbb{R}^n حيث $n \geq 1$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$$

فإن d مترك على \mathbb{R}^n وتسمى المترك المعتادة (Usual Metric) أو مترك اقليدس (Euclidian Metric).

مبرهنة

المترك المربعة (Square metric) لتكن $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي:
لكل $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ في \mathbb{R}^n حيث $n \geq 1$

$$d(x, y) = \max |x_j - y_j|; 1 \leq j \leq n$$

فإن d متراك على \mathbb{R}^n وتسمى المتراك المربعة (Square Metric)

مبرهنة

لتكن d مترك على X فإن الدالة $e: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة كالتالي:
 $e(x, y) = \min(1, d(x, y))$ مترك على X .

تعريف

الفضاء المترى هو زوج مرتب (X, d) من مجموعة غير خالية X ومترك d على هذه المجموعة.
سنستخدم التعبير X فضاءً مترياً ليفهم من ذلك الزوج المرتب (X, d)

فيما يلي نتعرض لدراسة بعض المفاهيم والتي سبق لنا دراستها على أشكال هندسية معينة منها، قطر الدائرة، قطر المستطيل، قطر المربع، سنعمم هذه الفكرة إلى قطر أي مجموعة جزئية من فضاء مترى، ثم نعرف المسافة بين نقطة ومجموعة، والمسافة بين مجموعتين جزئيتين من الفضاء المترى.

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري، ولتكن $A \neq \emptyset$ مجموعة جزئية من X وليكن $b \in X$.
نعرف المسافة كما يلي: $d(b, A) = \inf\{d(b, a); a \in A\}$

كنتيجة للتعريف: إذا كان $b \in A$ فإن $d(b, A) = 0$.

لنأخذ (\mathbb{R}, d) ولتكن $A = (0, 1)$ و $b = \frac{3}{2}$ فإن
 $d(b, A) = \inf\{d(a, \frac{3}{2}); a \in (0, 1)\} = d(\frac{3}{2}, 1)$

تعريف

ليكن (X, d) فضاء مترى، ولتكن $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ مجموعات جزئية من X . نعرف المسافة بين A و B بأنها

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

لنأخذ الفضاء المترى (X, d) ولتكن $A = (0, 1]$ و $B_1 = (1, 2)$ و $B_2 = [1, 2)$.

جد $d(A, B_1)$ و $d(A, B_2)$.

$d(A, B_1) = 0$ و $d(A, B_2) = 0$.

ملاحظة

$$d(A, B) = 0$$

إذا كانت $A \cap B \neq \emptyset$ لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري، ولتكن A مجموعة جزئية من X . نعرف قطر A بأنه

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2); a_1, a_2 \in A\}$$

1. لتأخذ (\mathbb{R}, d) و $A = (0, 1)$ و $\text{diam}(A) = 1$.

2. المترك التافهة (\mathbb{R}, d) ،

$$\text{diam}(A) = 1 \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

تعريف

لتكن $A \neq \emptyset$ مجموعة جزئية من الفضاء المترى X يقال إن A محدودة إذا كان $\text{diam}(A) < +\infty$ أو ما يكافئه: إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $d(a_1, a_2) \leq M$ لأي $a_1, a_2 \in A$.

تعريف

يقال إن المترك d محدودة إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن لكل $x, y \in A$

$$d(x, y) \leq M$$

ملاحظة

لأي مترك نستطيع دائماً أن نعرف مترك محددة.

تمارين

تمرين 1 :

لتكن $X = \mathcal{C}[0, 1]$ مجموعة الدوال ذات القيمة الحقيقية والمتصلة على الفترة المغلقة $[0, 1]$.
 إذا عرفت $d_1, d_2: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ كما يلي: لكل $f, g \in X$

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

و

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

اثبت أن d_1, d_2 كل تعرف مترك على X .

تمرين 2 :

لتكن X مجموعة الدوال $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ القابلة للتكامل بمفهوم ريمان. إذا عرفت
 $d_1, d_2: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ كما يلي: لكل $f, g \in X$

$$d_1(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

و

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

اثبت أن d_1 تعرف مترك على X ولكن d_2 لا تعرف مترك على X .

تمرين 3 :

لتكن (x, y) و (z, w) نقطتان في \mathbb{R}^2 وضح أي من التالية لا تعرف مترك على \mathbb{R}^2

$$1. d((x, y), (z, w)) = \min(|x - z|, |y - w|)$$

$$2. d((x, y), (z, w)) = (x - z)^2 + (y - w)^2$$

$$3. d((x, y), (z, w)) = |x| + |y| + |z| + |w|$$

تمرين 4 :

ليكن (X, d) فضاء متري ولتكن A مجموعة جزئية من X .
 اثبت أن الدالة $d_{A \times A}: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ تعرف مترك على A .

تمرين 5 :
أثبت أن أي من الدوال التالية

$$\rho(x, y) = |x - y|^2, \quad d(x, y) = (x - y)^2$$

لا تعرف دالة على \mathbb{R} .

تمرين 6 :
ليكن (X, d) فضاء متري ولتكن A مجموعة جزئية من X .
أثبت أن $X \in \bar{A}$ إذا وفقط إذا كانت $d(x, A) = 0$.

تمرين 7 :

أثبت أن المجموعات الأحادية في الفضاءات المترية مجموعات مغلقة. أعط مثلا تبين فيه أن هذا ليس بالضرورة صحيحا للفضاءات التوبولوجية بشكل عام.

تمرين 8 :

ليكن (X, d) فضاء متري. إذا كانت الدالة معرفة كما يلي:

$$\rho: (X \times X) \times (X \times X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d(y, w)$$

فأثبت أن ρ مترك على $X \times X$. عرف مترك للمجموعة X^n .

تمرين 9 :

لتكن $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ فضاءات مترية، ولتكن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ نقطتين اختياريتين في مجموعة الجداء $X = \prod_{j=1}^n X_j$.
 أثبت أن الدالة $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ والمعروفة

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$$

تعرف مترك على X .

تمرين 10 :

إذا كانت $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $n \geq 2$ معرفة $d(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$ لكل $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ في \mathbb{R}^n .
 أثبت أن d مترك على \mathbb{R}^n .
 ارسم عنصر القاعدة في حالة $n = 2$.

تمرين 11 :

لتكن $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ فضاءات مترية، ولتكن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ نقطتين اختيارييتين في $X = \prod_{j=1}^n X_j$.
أثبت أن الدالة المعرفة

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

مترك على المجموعة X .

تمرين 12 :

أثبت أن المجموعات المنتهية في الفضاءات المترية ليس لها نقطة نهاية وبالتالي فهي مغلقة.

تمرين 13 :

أثبت أن الدالة $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ تعرف مترك على X إذا وفقط إذا حققت الشرطين التاليين لكل $x, y, z \in X$

$$1 \quad d(x, y) = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } x = y.$$

$$2 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$$

تمرين 14 :

إذا كانت F مجموعة مغلقة في الفضاء المترى (X, d) وإذا كان

$$x \in X \text{ و } x \notin F \text{ أثبت أن } d(x, F) \neq 0.$$

تمرين 15 :

أعط مثالا لمجموعتين جزئيتين مغلقتين وغير خاليتين من الفضاء المترى (\mathbb{R}, d) بحيث $d(A, B) = 0$ لكن $A \cap B = \emptyset$.