# مسلمة الفصل (Hausdorff Spaces)

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

8 أكتوبر 2019

# المحتويات

## مسلمة الفصل Hausdorff Spaces

إن خبرتنا عن المجموعات المفتوحة والمغلقة ونقاط النهاية في الفضاءات المعتادة $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ إلى حد ما مضللة عند النظر إلى الفضاءات التوبولوجية العامة. على سبيل المثال، المجموعات الأحادية $\{x_0\}$ مغلقة في الفضاءات المعتادة $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ بحيث أن اتغلاقيتها المجموعة نفسها $\{x_0\}$.

لكن هذه الحقيقة ليست صحيحة لفضاءات توبولوجية أخر. على سبيل المثال في التوبولوجي $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$ على المجموعة $X = \{a,b,c\}$ ذات العناصر الثلاث، فإن المجموعة الأحادية $\{a\}$ ليست مغلقة لأن متممتها ليست مفتوحة.

مثل هذه التوبولوجيات ليس لها أهمية عند المهتمين بالرياضيات. من أجل ذلك, نقوم بإضافة شرط على الفضاء التوبولوجي لاستبعاد مثل هذه الفضاءات, والحصول على مجموعة من الفضاءات قريبو من تلك حيث ينطبق الحدس الهندسي. الشرط الذي نحن بصدد دراسته أقترح من قبل عالم الرياضيات هاوزدورف وللسبب ذاته سمي الفضاء باسمه. في هذا الفصل ندرس فضاء هاوزدورف وبعضا من خواصه. ننوه هنا إلى أننا وفي الباب السادس من هذا الكتاب سنقوم بدراسة مسلمات أخر وسنرى هناك سبب التسمية فضاء $T_2$.

### تعريف

ليكن $(X, \mathcal{I})$ فضاء توبولوجي يقال أن $X$ فضاء هاوزدورف Hausdorff أو فضاء $(T_2)$ إذا وجد لكل $y \neq x$ في $X$ مجموعتين مفتوحتين $U$ و $V$ بحيث أن:

$$x \in U, y \in V \text{ و } U \cap V = \emptyset$$

# أمثلة

1. لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ ليس فضاء هاوزدورف.
2. الفضاء التوبولوجي المتقطع فضاء هاوزدورف.
3. الفضاء المعتاد $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ فضاء هاوزدورف. ليكن $x < y$ ولتكن
$$U = (x-1, \frac{x+y}{2}), \quad V = (\frac{x+y}{2}, y+1)$$
$U$ و $V$ عنصري قاعدة في الفضاء المعتاد وكذلك $U \cap V = \emptyset$ بالتالي $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ فضاء هاوزدورف.

كل من توبولوجي المتممة المنتهية على أي مجموعة غير منتهية, وكذلك فضاء توبولوجي الشعاع الأيسر على $\mathbb{R}$
ليسا فضاء هاوزدورف.
أولاً:
فضاء المتممة المنتهية: لنفرض أن $X$ مجموعة غير منتهية، ولنفرض العكس أي أن فضاء هاوزدورف. أي لكل $y \neq x$ في $X$ توجد $U$ و $V$ بحيث $x \in U$, $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$. من تعريف $U$ و $V$ فإن $U = A^c$ و $V = B^c$ حيث $A$ و $B$ مجموعتان منتهيتان

$$U \cap V = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.$$

بالتالي فإن $X = A \cup B$ أي أن $X$ مجموعة منتهية وهذا يتناقض مع فرضنا أن $X$ مجموعة غير منتهية. إذن فضاء المتممة المنتهية ليس فضاء هاوزدورف.

ثانياً:
فضاء الشعاع الأيسر: ليكن، $x < y \in \mathbb{R}$. لتكن $U = (-\infty, a)$ و $V = (-\infty, b)$ مجموعتان مفتوحتان تحويان $x$ و $y$ على الترتيب. بالتالي فإن $U \cap V \neq \emptyset$. إذن فضاء الشعاع الأيسر ليس فضاء هاوزدورف.

### نظرية

1 كل فضاء جزئي من فضاء هاوزدورف، فضاء هاوزدورف.

2 إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ فضاءات توبولوجية فإن $\prod_{j=1}^{n} X_j$ فضاء هاوزدورف، إذا كان كل من $X_1, X_2, \ldots, X_n$ فضاء هاوزدورف.