التوبولوجي المتري (Metric Topology)

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

8 أكتوبر 2019

المحتويات

التوبولوجي المتري Metric Topology

الطرق الهامة في تعريف توبولوجي على مجموعة هي أن نعرف توبولوجي باستخدام المترك على المجموعة. و في الفصل الثاني ندرس التوبولوجي المتري وكذلك ندرس بعضاَ من خوصه. إن إحدى المسائل في التوبولوجي المتري والتي بقيت حتى خمسينيات القرن الماضي هي المسألة المترية. نثبت في نهاية الفصل إن الفضاء المعتاد $\mathbb{R}^n$ يحقق المترية.

تعريف

القرص المفتوح, الكرة المفتوحة Open Ball, Open Sphere

ليكن (X, d) فضاء متري. نعرف القرص المفتوح (أو الكرة المفتوحة) $B_d(x, r)$ ذات نصف قطر $r > 0$ ومركزه x بأنهه:

$$B_d(x, r)\{y \in X \ : d(x, y) < r\}.$$

ملاحظة

يجب ألا يفهم من التعريف السابق أن $B_d(x, r)$ له الشكل الهندسي القرص المفتوح أو الكرة المفتوحة التي نعرفها في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$. بشكل عام $B_d(x, r)$ مجرد مجموعة جزئية من X قد لا يكون لها أي شكل هندسي على الإطلاق, وسبب التسمية, كما سنرى

فيما بعد أنه في $\mathbb{R}^2$ مع المترك المعتادة (القياسية) فإن $B_d(x, r)$ هو القرص المفتوح في $\mathbb{R}^2$ و في $\mathbb{R}^3$ مع المترك المعتادة فإن

$B_d(x, r)$ هو الكرة المفتوحة في $\mathbb{R}^3$ لذلك أتفق على تسميتها بالأقراص المفتوحة أو الكريات المفتوحة بشكل عام. (في $\mathbb{R}$ مع المترك المعتادة: الأقراص المفتوحة هي عبارة عن فترات مفتوحة).

مثال

ليكن $(\mathbb{R}, d)$, صف $B(x, r)$ لأي $r > 0$ و $x \in \mathbb{R}$.
$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R};\ d(x, y) = |x-y| < r\}$. وهي الفترة المفتوحة $(x-r, x+r)$.
في $(\mathbb{R}^2, d)$, $B(x, r)$ هي القرص المفتوح الذي مركزه x , نصف قطره r.

تعريف

إذا كان (X, d) فضاء متري, فإننا نعرف القرص المغلق لأي $a \in X$ و لأي $r > 0$ كما يلي:

$$B^*(a, r)\{x \in X \ : d(a, x) \leq r\}$$

تمهيدية

ليكن (X, d) فضاء متري, وليكن $B(a, r)$ قرص مفتوح في X. لأي $x \in B(a, r)$، يوجد $s > 0$ بحيث $B(x, s) \subset B(a, r)$.

تمهيدية

إذا كان (X, d) فضاء متري, فإن لكل $z \in B(x, r) \cap B(y, s)$ يوجد $t > 0$ بحيث $B(z, t) \subset B(x, r) \cap B(y, s)$.

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري. نقول إن مجموعة $U \subset X$ مفتوحة إذا كانت إما المجموعة الخالية أو لكل $x \in U$ يوجد $r > 0$ بحيث $B(x, r) \subset U$.

نظرية

إذا كان (X, d) فضاء متري, فإن المجموعات المفتوحة تكون توبولوجيا على X

تعريف

ليكن (X, d) فضاء متري, التوبولوجي المولد من d في التعريف السابق يسمى التوبولوجي المتري ونرمز له بالرمز $\mathcal{T}_d$ ويسمى $(X, \mathcal{T}_d)$ الفضاء المتري المولد من d.

ملاحظة

كل فضاء متري فضاء هاوزدورف.

تعريف

ليكن $(X, \mathcal{I})$ فضاء توبولوجي. نعرف المتتالية في X بأنها دالة $f\colon \mathbb{Z}^+ \longrightarrow X$.
سنكتب المتتالية
$(x_n)_n$.

تعريف

لتكن $(x_n)_n$ متتالية في X فإن $(x_n)_n$ متتالية متقاربة من x أو أن x نهاية للمتتالية $(x_n)_n$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U يوجد عدد صحيح N بحيث $x_n \in U$ لكل $n \geq N$ و نكتب $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.

نظرية

إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية متقاربة في فضاء هاوزدورف X فإنها تتقارب من نقطة وحيدة في X.

تمهيد

ليكن $\mathcal{I}_d$ و $\mathcal{I}_\delta$ التوبولوجي المولدة على X من d و δ على الترتيب. فإن $\mathcal{I}_d \subset \mathcal{I}_\delta$ إذا وجد لكل $x \in X$ ولكل $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي $\rho > 0$
بحيث أن $B_d(x, \varepsilon) \subset B_\delta(x, \rho)$.

نظرية

$\mathbb{R}^n$ لكل $n \geq 1$
يحقق المسألة المترية, أي أن كلاً من التوبولوجي المولدة على $\mathbb{R}^n$ من المترك المربعة والمترك المعتادة متطابقة, وكلاهما يتطابق مع التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^n$.