س1: إذا كانت $f(z)$ متصلة عند z_0 فأثبت أن $|f(z)|$ متصلة كذلك عند z_0 .

جواب السؤال (١):

$f(z)$ متصلة عند z_0 ⇐ لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث:

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\epsilon$$

من أجل الدالة $|f(z)|$ خذ نفس δ السابقة لأن:

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow \big||f(z)|-|f(z_0)|\big| \le |f(z)-f(z_0)|<\epsilon$$

⇐ $|f(z)|$ متصلة عند z_0 (بتعريف $\epsilon-\delta$).

س2: إذا كانت $f(z)$ متصلة عند z_0 فأثبت أن $\frac{1}{f(z)}$ متصلة كذلك عند z_0 . (حيث $f(z_0)\neq 0$)

جواب السؤال (٢):

f متصلة عند z_0 ⇐ لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث:

$$|z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\epsilon$$

$|f(z_0)|=\epsilon_0\neq 0$ ⇐ يوجد $\delta_2>0$ بحيث:

$$|z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow$$

$$\big||f(z)|-|f(z_0)|\big|<|f(z)-f(z_0)|<\frac{|f(z_0)|}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|f(z_0)|}{2}<|f(z)|-|f(z_0)|<\frac{|f(z_0)|}{2}$$

$$\Rightarrow |f(z)|>|f(z_0)|/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)|}<\frac{2}{|f(z_0)|}$$

الآن خذ $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$\Rightarrow |z-z_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f(z_0)}\right|$$

$$=\frac{|f(z_0)-f(z)|}{|f(z)|\,|f(z_0)|}<\epsilon\cdot\frac{2}{|f(z_0)|^2}$$

وهذا يعني أن $\frac{1}{f(z)}$ متصلة عند z_0 (بتعريف $\epsilon-\delta$).