Applications of The Integral
تطبيقات التكامل
Math 111
Lecture 25

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

Applications of The Integral:

Applications of The Integral:

الفصل الثالث :

طول القوس وسطح الدوران:

١) طول القوس:

إذا كان لدينا الدالة $y = f(x)$ دالة متصلة وناعمة على الفترة $[a, b]$ و
ايضاً قابلة للاشتقاق على نفس الفترة. فإن طول المنحنى $y = f(x)$ من
$x = a$ الي $x = b$ يعطى من القانون التالي:

Applications of The Integral:

الفصل الثالث :

طول القوس وسطح الدوران:

(١) طول القوس:

إذا كان لدينا الدالة $y = f(x)$ دالة متصلة وناعمة على الفترة $[a, b]$ و ايضاً قابلة للاشتقاق على نفس الفترة. فإن طول المنحنى $y = f(x)$ من $x = a$ الي $x = b$ يعطى من القانون التالي:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

تطبيقات التكامل

Applications of The Integral:

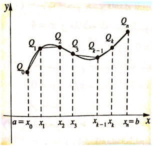
الفصل الثالث :

طول القوس وسطح الدوران:

١) طول القوس:

إذا كان لدينا الدالة $y = f(x)$ دالة متصلة وناعمة على الفترة $[a, b]$ و ايضاً قابلة للاشتقاق على نفس الفترة. فإن طول المنحنى $y = f(x)$ من $x = a$ الي $x = b$ يعطى من القانون التالي:

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

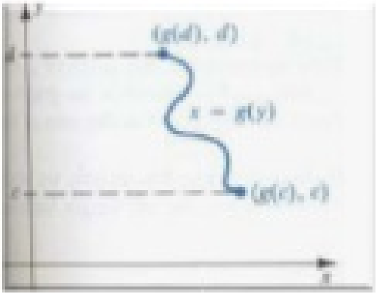


وبالمثل إذا كان لدينا $x = g(y)$. فإن طول المنحنى $x = g(y)$ من $y = c$ إلي $y = d$ يعطى من:

$$L(g) = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy.$$

وبالمثل إذا كان لدينا $x = g(y)$. فإن طول المنحنى $x = g(y)$ من $y = c$ إلي $y = d$ يعطى من:

$$L(g) = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

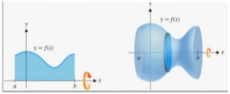


مثال :أاحسب طول المنحنى $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 10$ من $x = 8$ إلى $x = 27$.

مثال : أحسب محيط الدائرة التي مركزها نقطة الاصل و نصف قطرها r .

٢) مساحة سطح الدوران :

إذا كان لدينا الدالة $y = f(x) \geq 0$ دالة متصلة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$. فإنه لو قمنا بدوران $y = f(x)$ حول محور x على الفترة $[a, b]$ فسنحصل على سطح الدوران



نظرية:
إذا كان لدينا الدالة $y = f(x) \geq 0$ دالة متصلة وقابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$. فان مساحة سطح الدوران S والناتج من دوران $y = f(x)$ حول محور x يعطى من:

نظرية:

إذا كان لدينا الدالة $y = f(x) \geq 0$ دالة متصلة وقابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$. فان مساحة سطح الدوران S والناتج من دوران $y = f(x)$ حول محور x يعطى من:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx.$$

ملاحظة :

و على نهج شبيه نحصل على القاعدة التاليـــة إذا كان الدوران حول محور y و كانت $a \geq 0$:

$$(١٦) \quad S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

أما إذاكان المنحني معطى بالقاعـــدة $x = g(y)$ حيث g دالـــة ناعمـــة على $[c,d]$، فمساحة السطح الناتجة من دوران الجزء من المنحني بـــين $y = c$ و $y = d$ حول محور y، بافتراض أن $g(y) \geq 0$، هي

$$(١٧) \quad S = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

و مساحة السطح الناتج من الدوران حول محور x، بافتراض أن $c \geq 0$، فهي

$$(١٨) \quad S = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

ملحوظة

إذا كانت $y = f(x)$ سالبة لبعض قيم x، فإن مساحة السطح S الناشئة عن دوران بيان الدالة f حول محور x هي:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

و بالمثل إذا كانت الدالة $x = g(y)$ سالبة لبعض قيم y، فإن مساحة السطح الناشئة عن دوران بيان g حول محور y هي:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |g(y)| \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy}$$

مثال : أحسب مساحة السطح الناشئ من دوران بيان الدالة $y = \sqrt{x}$
على الفترة $[1, 4]$ حول محور x .

Thanks for listening.