حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الثاني

• التكاملات المتعددة MULTIPLE INTEGRALS

- مقدمة
- التكامل الثنائي
- حساب التكاملات الثنائيـــة
- المـــساحات والحجـــوم
- الاحداثيات القطبية
- التكامل الثلاثي
- الاحـــداثيات الاســـطوانية والكرويـــة
- العزم ومركز الثقل
- المساحة السطحية

• المساحات والحجوم
Areas And Volumes

(٢-٥-١) حساب المساحة

لتكن f دالة في المتغيرين y, x معرفة ومتصلة على منطقة مستوية R. من تعريف (٢-٢-٢) إذا كانت $f(x, y) \geq 0$ لكل (x, y) في المنطقة R . فإن $\iint_R f(x, y)dA$ يمثل حجم المجسم الواقع تحت سطح الدالة $z = f(x, y)$ وفوق المنطقة R . الآن إذا كانت $z = f(x, y) = 1$ فإن التكامل $\iint_R 1\, dA$ يمثل مساحة المنطقة R والذي نرمز له بالرمز A ونكتب $A = \iint_R dA$.

هنا لدينا الحالتين التاليتين.

(١) إذا كانت $R = R_x$، فإن

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

(٢) إذا كانت $R = R_y$، فإن

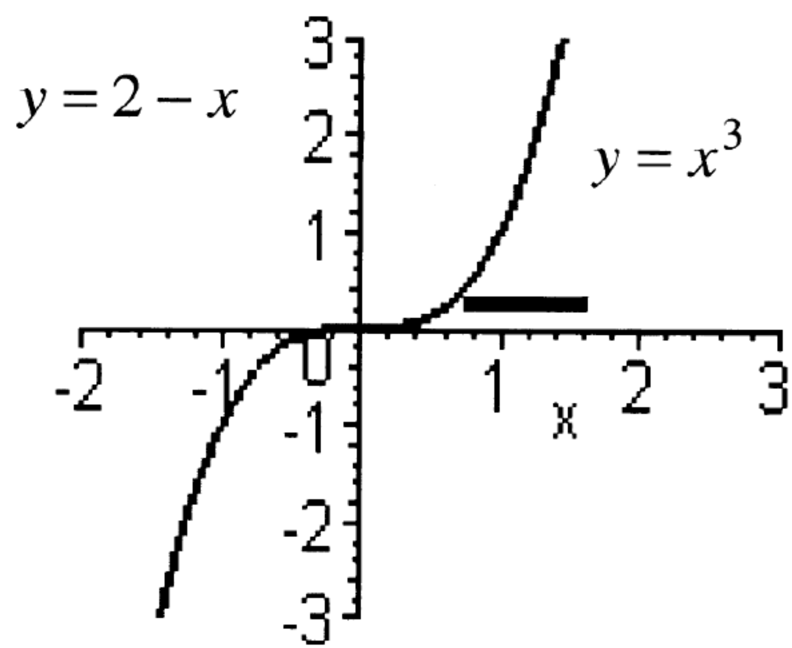
$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)]\, dy.$$

مثال

احسب مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات الدوال $y=0$ ، $x+y=2$ ، $y=x^3$

الحل

الطريقة الأولى : إذا أخذنا شريحة أفقية فإننا نلاحظ أن لا تغير في نهايتي الشريحة أثناء حركتها من بداية إلى نهاية المنطقة، وكما ذكرنا سابقا فإن هذا يعني أن لا تجزئة للمنطقة ومن حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة نجد أن $0 \le y \le 1$ و $\sqrt[3]{y} \le x \le 2-y$.



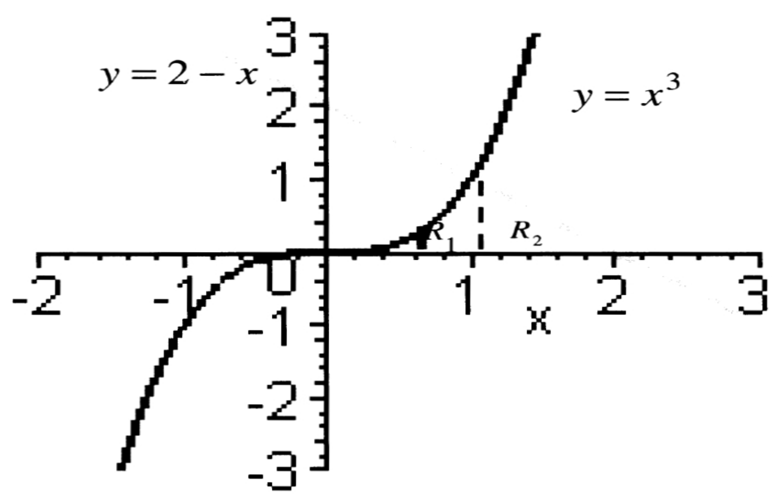
وبالتالي فإن

$$A=\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y}\ dxdy=\int_0^1\ [x]_{\sqrt[3]{y}}^{2-y}dy$$

$$=\ \int_0^1\ (2-y-\sqrt[3]{y})dy=\frac{3}{4}$$

الطريقة الثانية : إذا أخذنا شريحة رأسية فإننا نلاحظ أن هناك تغير في نهايتي الشريحة أثناء حركتها من بداية إلى نهاية المنطقة، وكما ذكرنا سابقا فإن هذا يعني أن علينا تجزئة المنطقة R إلى منطقتين R_1 ، R_2 ومن حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة على كل منطقة، نجد أن على R_1 فإن

$$0\le x\le 1 \quad \text{و} \quad 0\le y\le x^3.$$



وعلى R_2 فإن

$$.0 \le y \le 2-x \quad \text{و} \quad 1 \le x \le 2$$

وبالتالي فإن

$$A = \iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x3} dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\ .$$

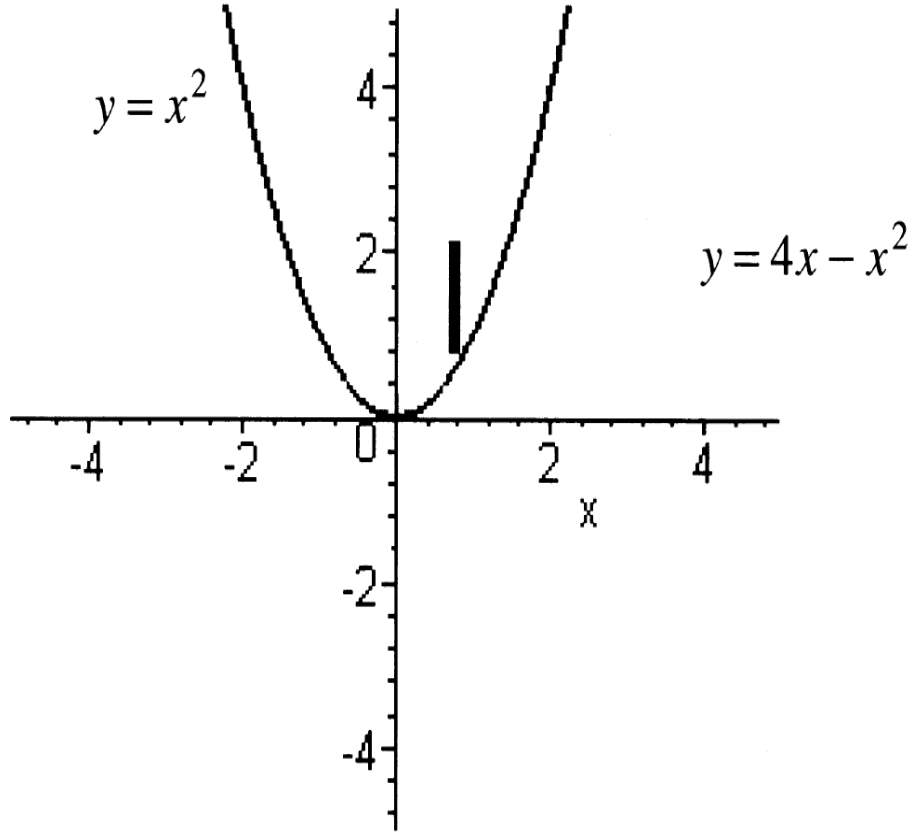
مثال

احسب مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيي الدالتين

$$y = x^2 \ ، \ y = 4x - x^2$$

الحل

في هذا المثال بأخذ أي من الشريحتين الأفقية أو الرأسية فلن يكون هناك تجزئة للمنطقة، وهنا الأفضلية للشريحة الرأسية لأنها تعطينا حدود تكاملات أسهل من الشريحة الأفقية. أنظر شكل (٢-١٠). نجد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4x - x^2$ ، $y = x^2$ وذلك بحل المعادلتين. $x^2 = 4x - x^2$ ، وهذا يقتضي أن $2x^2 = 4x$ ، ومنه فإن $x = 0$ أو $x = 2$. بالتالي فإن $y = 0$ أو $y = 4$ على الترتيب. وعلي فإن $0 \le x \le 2$ و $x^2 \le y \le 4x - x^2$



$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\, dx = \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = \frac{8}{3}\ .$$

(٢-٥-٢) حساب حجوم المجسمات

يمكن إستخدام التكامل الثنائي لحساب مساحة منطقـــة في المـــستوى
والآن سنرى كيف يمكن استخدام التكامل الثنائي لحساب حجوم بعض المجسمات وذلك كتطبيـــق آخر على التكامل الثنائي

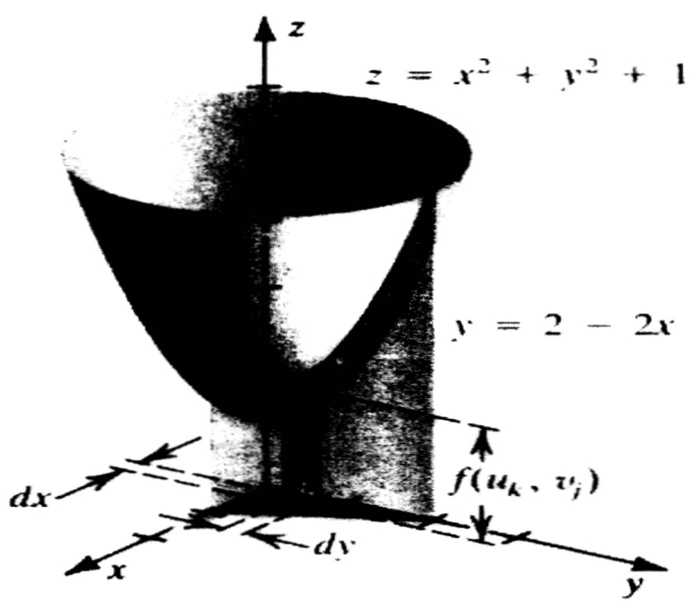
مثال

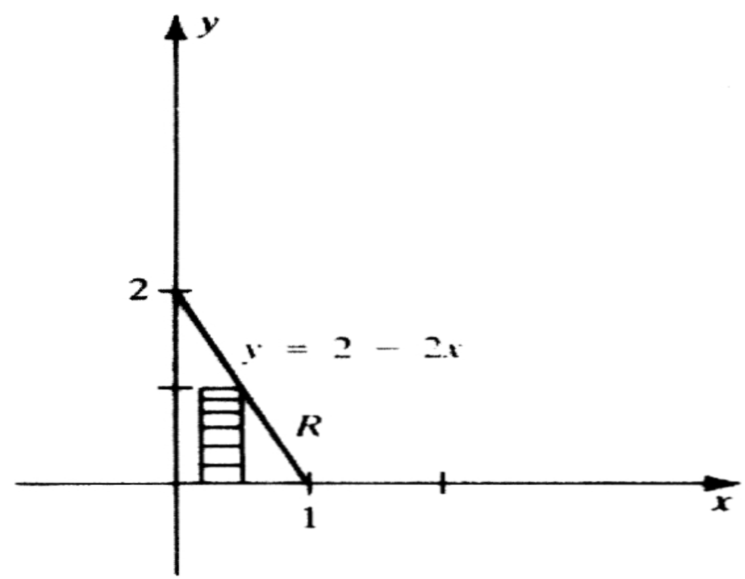
أوجد حجم المجسم الواقع في الثمن الأول (أي$x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$) والمحدود بالمستويات الإحداثية وبالسطوح

$$2x + y = 2 , \quad z = x^2 + y^2 + 1$$

الحل

إن الدالة$z = x^2 + y^2 + 1$ موجبه على المنطقة R الوضحة بالشكل





$$R = \{(x, y): 0 \le y \le 2-2x, 0 \le x \le 1\}$$

$$V = \iint_R f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1)dydx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx$$

$$= \frac{11}{6}$$

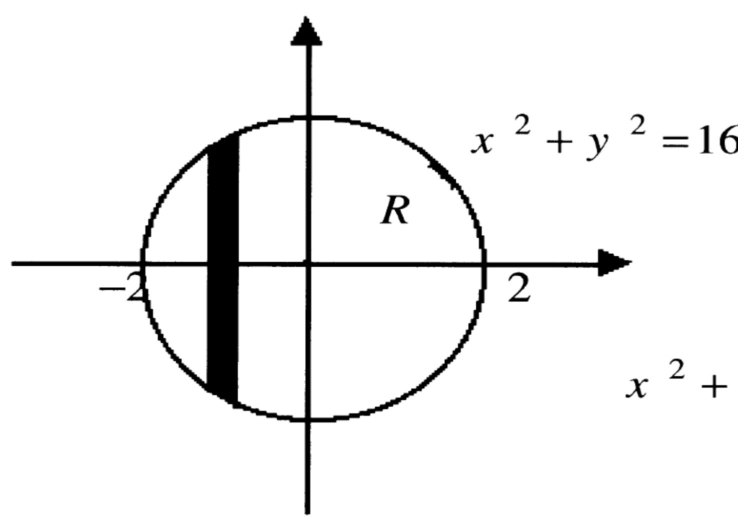
مثال

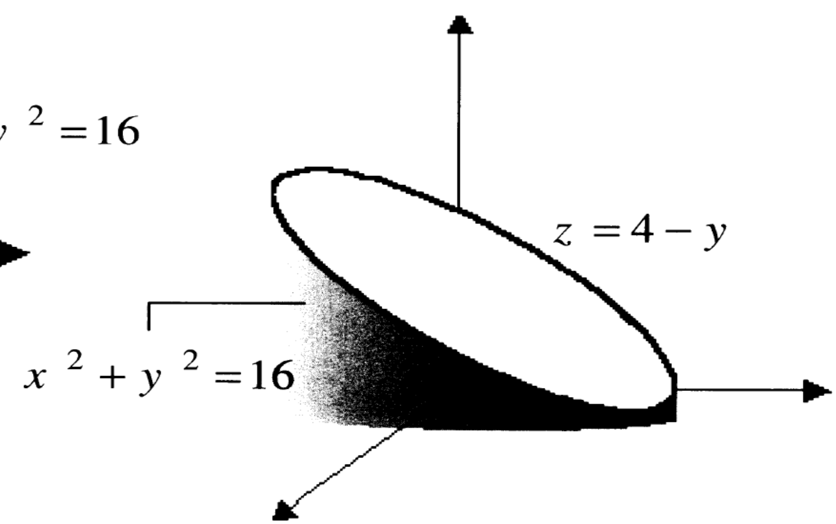
أوجد حجم المجسم المحدود بالأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ وبالمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$.

الحل

أن الدالة $z = f(x, y) = 4 - y$ موجبة فوق المنطقة R والتي تمثلها قاعدة الأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ كما أن حدود R هي :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{16 - x^2} \le y \le \sqrt{16 - x^2},\ \ -4 \le x \le 4 \right\}$$





وبالتالي فإن حجم المجسم هو :

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-4}^{4} \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dx = \int_{-4}^{4} 4\sqrt{16-x^2}\,dx$$

لحساب التكامل الأخير نجري التعويض التالي $x = 4\sin\theta$، فنجد بعد إجراء الحسابات اللازمة أن $V = 64\pi$.

التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية

The Double Integral In Polar Coordinates

هناك العديد من التكاملات الثنائية والتي لا يمكن حسابها بالاحداثيات الديكارتية، على سبيل المثال، التكاملات $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$ و $\iint_R (x^2+y^2)^{3/2}\,dA$ بغض النظر عن R، وهناك العديد من التكاملات التي يمكن حسابها بالاحداثيات الديكارتية ولكن الحسابات قد تكون طويلة ولا بد من إجراء بعض التعويضات، كمثال على ذلك $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-y^2)\,dydx$.

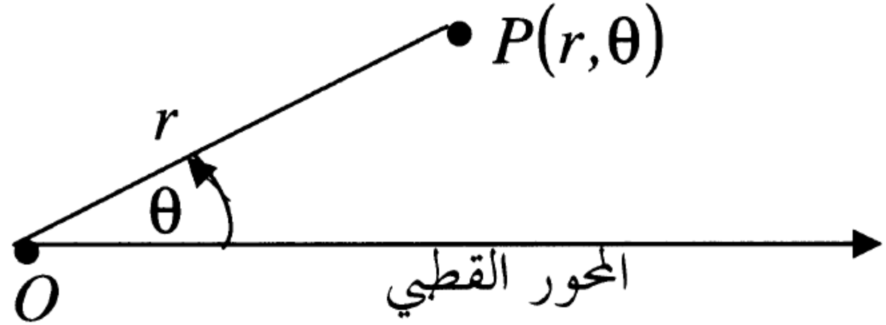
(٢-٧-١) الإحداثيات القطبية

لإنشاء المستوى القطبي نتبع مايلي:

(أ) نختار نقطة في المستوى ونرمز لها بالرمز O وتسمى القطب (pole).

(ب) نرسم من القطب نصف خط مستقيم متجه يسمى المحور القطبي (polar axis) أنظر الشكل (٢- ١٣). لتكن P نقطة تختلف عن القطب.

إذا كان $r=|OP|$ أي المسافة بين O و P أنظر شكل (٢-١٣)، وإذا كانت θ الزاوية التي يصنعها OP مع نصف المستقيم. فإن الزوج المرتب (r,θ) يسمى الإحداثيات القطبية للنقطة P.



الشكل (٢-١٣)

(٢–٧–٢) العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية:

إن كلا النظامين الديكارتي والقطبي هما تمثيل لنقاط المستوى، أي أن كل نقطة في المستوى تمثل بالإحداثيات الديكارتية (x, y) والقطبية (r, θ)، مما يعني أن هناك علاقة بين هذين النظامين.

(٢–٧–٣) نظرية

الإحداثيات الديكارتية (x, y) والقطبية (r, θ) لنقطة P في المستوى ترتبطان بالعلاقات التالية.

(a) $x = r\cos\theta$ (b) $y = r\sin\theta$

(c) $r^2 = x^2 + y^2$ (d) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$

مثال

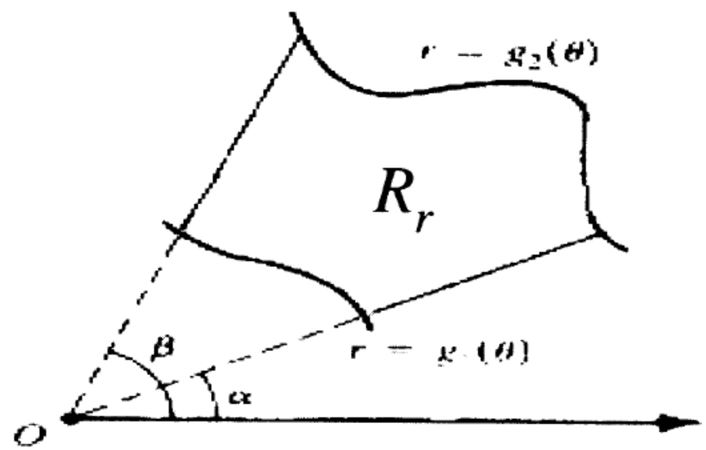
أوجد معادلة المنحنى بالإحداثيات الديكارتية إذا كانت معادلته بالإحداثيات القطبيه هي $r = 4\sin\theta$

الحل

نضرب طرفي المعادلة $r = 4\sin\theta$ بالمتغير r نحصل على $r^2 = 4\, r\sin\theta$، باستخدام العلاقات السابقة نحصل على $x^2 + y^2 = 4y$ ، أي أن $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$، ومنه نجد أن ، $x^2 + (y-2)^2 = 4$. وهذه تمثل معادلة دائرة مركزها $(0,2)$ ونصف قطرها 2 .

(٢-٧-٤) تعريف

نعرف المنطقة المستوية R_r بأنها المنطقة المحـــدودة بمنحنيـــي الـــدالتين القطبيـــتين $r = g_1(\theta)$ و $r = g_2(\theta)$ المعرفتين والمتصلتين على الفترة المغلقة $[\alpha,\beta]$ والمستقيمين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$، بحيـــث أن $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ وأن $g_2(\theta) \geq g_1(\theta) \geq 0$ لكل $\alpha \leq \theta \leq \beta$. كما هو موضح بالـــشكل



نظرية (٢-٧-٥)

لتكن $z = f(r,\theta)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_r$ ، فإن

$$\text{(i)}\ \iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

نظرية (٢-٧-٦)

لتكن $z = f(x,y)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_r$ ، فإن

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

مثال

أحسب التكامل

$$I=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

الحل

بقراءة لحدود التكامل نجد أن المنطقة R محدودة بالمنحنيات $y=\sqrt{a-x^2}$ ، $y=0$ و $x=a$ و $x=-a$ أي أن R هي:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -a\le x\le a, 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

وهي عبارة عن النصف العلوي للقرص الدائري والذي مركزة نقطة الأصل ونصف قطره a .

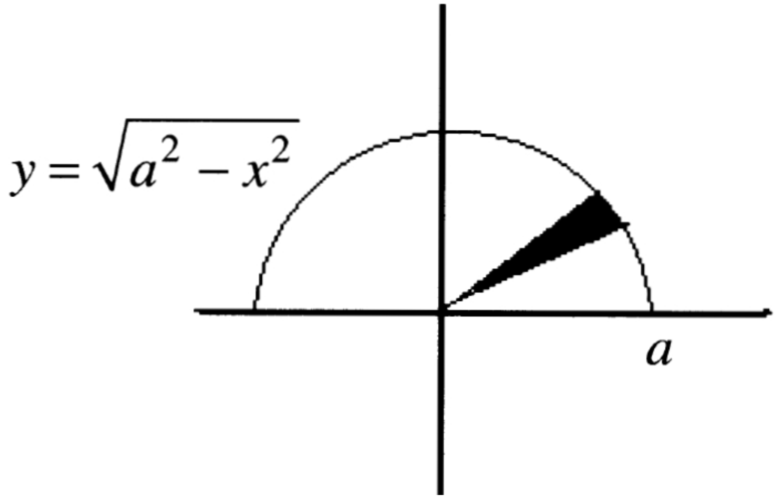
كما سبق وأن نوهنا في بداية هذا الفصل فإن هذا التكامل لا يمكن حسابه بالإحداثيات الديكارتية ولذلك سوف نستخدم الاحداثيات القطبية وفق الخطوات التالية:

١- نكتب الدالة $f(x,y)$ بالاحداثيات القطبية

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^{3/2}=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=(r^2)^{3/2}=r^3$$

٢- نرسم المنطقة R ، ثم نرسم شريحة مثلثية تقع بكاملها داخل المنطقة R .

نلاحظ أنه أثناء دوران الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن نهايتي الشريحة تبقى على نفس المنحنيين مما يعني أن لا تجزئة للمنطقة. من حركة الشريحة نجد أن $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le r \le a$.



وعندئذٍ ومن نظرية (٢-٧-٦) يصبح التكامل على الشكل التالي :

$$I = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^a r^3 dr\, d\theta = \int_0^\pi \int_0^a r^4 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{a^5}{5} d\theta = \frac{\pi a^5}{5}$$

مثال

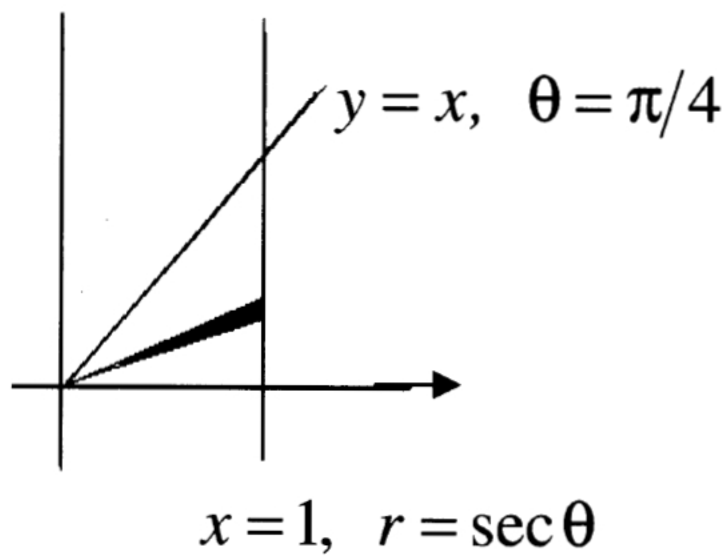
احسب التكامل

$$I = \iint_R \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

حيث R المنطقة المحدودة بالمستقيمات :

$$y=0 \ , \ x=1 \ , \ y=x$$

الحل



هنا أيضاً لا يمكن حساب هذا التكامل بالإحداثيات الديكارتية، لذلك سنستخدم الاحداثيات القطبية.

بما أن $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$ ، فإن $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\dfrac{1}{(1+r^2)^{3/2}}$

لايجاد حدود R بالإحداثيات القطبية نقوم بتحويل معادلات المنحنيات التي تحد المنطقة إلى الإحداثيات القطبية. من المعادلة $y=x$ ، بالتالي $r\sin\theta=r\cos\theta$ ومنه $\sin\theta=\cos\theta$ أي أن $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. أيضا المعادلة $x=1$ تصبح $r\cos\theta=1$ ، أي أن $r=\sec\theta$. وبالنظر إلى الشريحة نجد أن:

$$R=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le r\le sec\,\theta \text{ ، } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

وبالتالي، من نظرية (٢-٧-٦) فإن التكامل يصبح

$$I=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}rd\ rd\theta=\int_0^{\pi/4}\left[\ (1+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\sec\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\left[1+\sec^2\theta\right]^{-1/2}d\theta=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\,d\theta$$

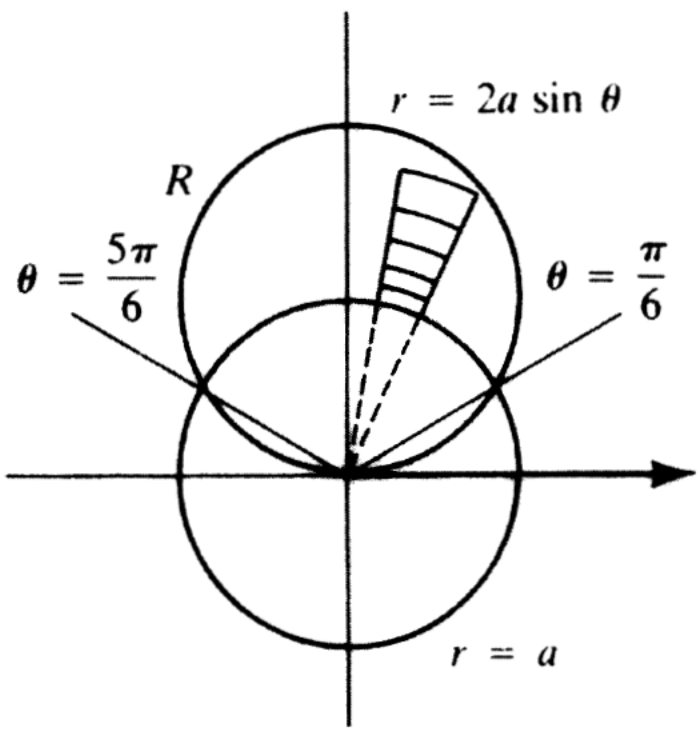
$$=\frac{\pi}{4}-\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\theta\right)\right\}_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

مثال

أوجد مساحة المنطقة المستوية الواقعة خارج الدائرة $r=a$ ، وداخل الدائرة $r=2a\ \sin\theta$ حيث إن $a>0$.

الحل

لنحسب أولاً نقاط تقاطع الدائرتين فنجد أنه بوضع $2a\ \sin\theta=a$ ، نحصل على $2a\ \sin\theta=a$



ومنه فإن $\sin\theta=\frac{1}{2}$، وبالتالي فإن $\theta=\frac{\pi}{6}, \theta=\frac{5\pi}{6}$

من حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة نجد أن :

$$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad a\le r\le 2a\sin\theta$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة المستوية هي:

$$A=\iint_R dA=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_a^{2a\ \sin\ \theta} r\ dr\ d\theta=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[\ \frac{r^2}{2}\right]_a^{2a\ \sin\ \theta} d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(4a^2\ \sin^2\theta\ -a^2)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}4a^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta-\frac{a^2}{2}[\ \theta\ ]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$=a^2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6}-\frac{a^2}{2}\left[\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right]$$

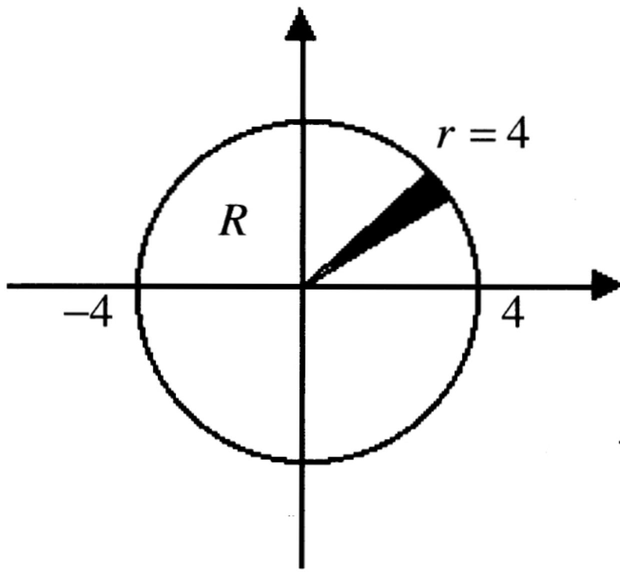
$$=\frac{a^2}{2}(\frac{2\pi}{3})-\frac{a^2}{2}\sin(\frac{5\pi}{3})+\frac{a^2}{2}\sin(\frac{\pi}{3})$$

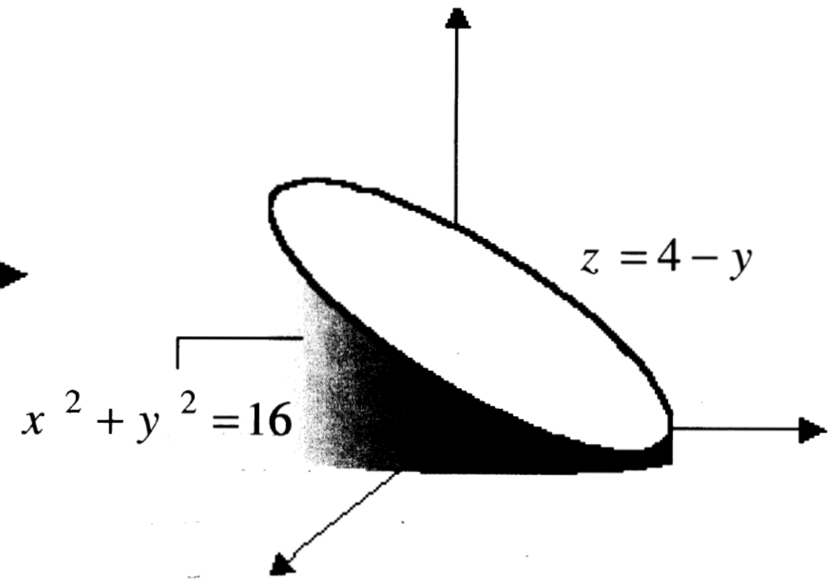
$$=\frac{\pi}{3}a^2+a^2\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}a^2+a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال

أوجد حجم الجسم المحدود بالأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ وبالمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$.

الحل





$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (4 - r\sin\theta) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (32 - \frac{64}{3}\sin\theta)\,d\theta = \left[32\theta + \frac{64}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi} = (64\pi + \frac{64}{3}) - (0 + \frac{64}{3}) = 64\pi$$

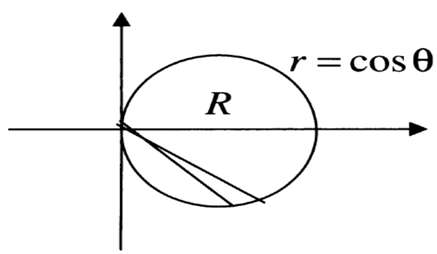
مثال

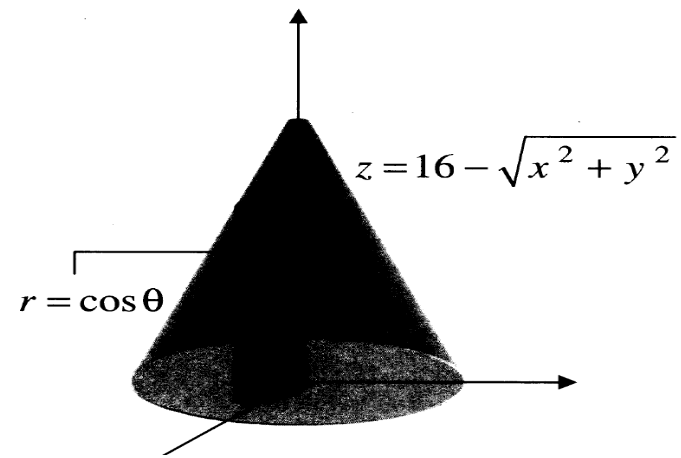
احسب حجم المجسم المحدود من الجوانب بالإسطوانة $r = cos\,\theta$ ومن الأعلى بالسطح المخروطـــي

$$z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

الحل

المجسم هو الموضح بالشكل وكذلك R .





بالنظر إلى R نجد أن $0 \le r \le \cos\theta$ و $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. بالتالي فإن

$$V = \iint_R (16 - \sqrt{x^2 + y^2})\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} (16 - \sqrt{r^2}\,)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[8r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^{\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (8\cos^2\theta - \frac{\cos^3\theta}{3})\,d\theta = 4\pi - \frac{4}{9}$$

تمـــــارين

في التمارين من ١-٤ عبر عن التكامل كتكامل متعاقب بالإحداثيات القطبية، ثم احسبه.

١- $\mathrm{I}=\iint\limits_R 2y\,dA$، حيث إن R هي المنطقة المحدودة بالدائرة $(x-1)^2+y^2=1$ والمستقيم $y=x$ والمستقيم $y=-x$.

٢- $\mathrm{I}=\iint\limits_R \sin(x^2+y^2)dA$، حيث إن R هي المنطقة

$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 16\right\}$.

٣- $\iint\limits_R \sin\theta\,dA$. حيث أن R المنطقة المستوية خارج الدائرة $r=2$ وداخل منحنى القلب $r=2\,(1+\cos\theta)$.

٤- $\iint\limits_R y\,dA$، حيث أن R المنطقة المستوية المحدودة الدائرة $r=2\cos\theta$.

في التمارين من ٥-١١ احسب مساحة المنطقة المستوية باستخدام التكامل المتعاقب بالإحداثيات القطبية.

٥- المنطقة داخل منحنى القلب $r = 1 + \cos\theta$ وخارج الدائرة $r = \frac{1}{2}$.

٦- المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة $r = \sin\theta - \cos\theta$.

٧- المنطقة المحدودة بمنحنى القلب $r = 1 + \sin\theta$ والدائرة $r = -\sin\theta$.

٨- المنطقة داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وعلى يمين الخط $x = 1$.

٩- المنطقة المحدودة بالمنحنى $r = 1 - \cos\theta$

١٠- المنطقة في الربع الأول داخل الدائرة $r = 4\sin\theta$ وخارج $r^2 = 8\cos 2\theta$.

١١- المنطقة في الربع الأول والمحدودة بالمنحنيات $5y = 2x - 4$ و $8y = 16 + x^2$.

في التمارين من ١٢-١٦ استخدم التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية لحساب حجم المجسم.

١٢- المجسم المحدود بنصف الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3.

١٣- المجسم داخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ وخارج الأسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ وفوق المستوى — xy.

١٤- المجسم الذي تقطعه الأسطوانة $r = a\cos\theta$ من الكرة التي نصف قطرها a.

١٥- المجسم المحدود من أعلى بالسطح $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ ومن الأسفل بالمستوى xy ومن الجوانب بالاسطوانتين $x^2 + y^2 = 1$ وَ $x^2 + y^2 = 9$.

١٦- المجسم المحدود بالسطح المكافئ $z = 4 - x^2 - y^2$، المستوى $z = 3$ والمستوى — xy.